УДК 624.15.001

В.Г. Шаповал, д.т.н., профессор, Е.В. Нестерова, ассистент
Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры
Н.Н. Рубан, аспирант
Национальный горный университет

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ НА ОСНОВАНИИ ВИНКЛЕРА – ФУССА

Получено точное аналитическое решение задачи о вынужденных колебаниях бесконечной в плане плиты на упругом Винклеровском основании. Рассмотрены случаи распределенной по площади круга равномерной нагрузки и сосредоточенной силы, которые изменяются во времени по гармоническому закону. Установлено, что на формы колебаний плиты существенное влияние оказывают ее толщина, плотность, частота изменения во времени приложенной к плите внешней нагрузки и жесткостные свойства основания.

Ключевые слова: *упругое основание, плитный фундамент, вынужденные колебания.*

В.Г. Шаповал, д.т.н., професор, Є.В. Нестерова, асистент
Придніпровська державна академія будівництва та архітектури
Н.М. Рубан, аспірант
Національний гірничий університет

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ БЕЗКІНЕЧНОЇ ПЛИТИ НА ОСНОВІ ВІНКЛЕРА – ФУССА

Отримано точне аналітичне розв'язання задачі про вимушені коливання нескінченної в плані плити на Вінклерівській пружній основі. Розглянуто випадки прикладеної до плити зосередженої сили та рівномірно розподіленого по площі кола навантаження, що змінюються в часі за гармонічним законом. Встановлено, що на форму коливань плити суттєво впливають її товщина, щільність, частота зміни в часі зовнішнього навантаження та властивості жорсткості основи.

Ключові слова: *пружна основа, плитний фундамент, вимушені коливання.*

V.G. Shapoval, DrSc., E.V. Nesterova, asisstant
Prydneprovska State Academy of Construction and Architecture
N.N. Ruban, postgraduate student
National Mining University

FORCED VIBRATION OF INFINITE PLATE ON THE WINKLER – FUSS BASE

An exact analytical solution of the infinite variations in terms of plate on elastic Winkler foundation. The cases distributed over a circular area of uniform load and a force that change in time harmonically. Found that on the mode of vibration plates is significantly influenced by its thickness, density, and frequency of the time attached to the plate of the external load and stiffness properties of the base.

Keywords: *elastic base, plate foundation, forced vibration.*

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными и практическими задачами. При решении практических задач проектирования зданий и сооружений, возведенных на сплошном плитном фундаменте, очень часто возникает необходимость учета динамического воздействия расположенного на нем оборудования на их несущие конструкции [1, 2, 3]. При этом также имеет место проблема учета взаимного влияния расположенных в различных местах на плитном фундаменте машин и оборудования с динамическими нагрузками (в данном случае технологические и экологические проблемы) [3].

В связи с этим проблема определения амплитуд и форм вынужденных колебаний, обусловленных динамическими воздействиями на плитные фундаменты расположенных на них машин и оборудования, является актуальной и требует решения.

Анализ последних исследований и публикаций, в которых положено начало решению данной проблемы. Попытка решения близкой по смыслу задачи предпринималась автором работ [4, 5]. При этом в полученных им результатах присутствуют такие ошибки и неточности.

1. В уравнении изгиба плиты (3.122) на странице 114 вместо оператора $D\cdot\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\right)$ следует писать $D\cdot\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\right)$. Здесь D – цилиндрическая жесткость плиты; r – координата; t – время.

2. При подстановке полученного автором [4] решения в виде $W(r)=K\cdot kei(\alpha_1\cdot r)$ в уравнение для определения амплитуд колебаний плиты вида

$$D\cdot\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\right)^2\cdot W(r)+\left(C_z-\rho\cdot h\cdot\omega^2\right)\cdot W(r)=\frac{\delta(r)}{2\cdot\pi\cdot r}\cdot\left(Q+m\cdot\omega^2-C_1\right)$$

имеет место неравенство вида $0\neq\frac{\delta(r)}{2\cdot\pi\cdot r}\cdot\left(Q+m\cdot\omega^2-C_1\right)$, т. е. данное решение не является верным.

Здесь $kei(x)$ – модифицированная функция Макдональда с нулевым индексом [6]; $\delta(r)$ – дельта – функция Дирака [7]; $\alpha_1=\sqrt[4]{\frac{C_z-\rho\cdot h\cdot\omega^2}{D}}$; K – коэффициент пропорциональности; m и C_1 – соответственно расположенные в центре плиты сосредоточенные масса и жесткость.

Выделение не решенных раньше частей общей проблемы, которым посвящается статья. В связи с этим, ввиду практической и теоретической значимости рассматриваемой задачи, целесообразно получить ее правильное (в рамках принятых допущений) решение. На достижение этой цели и направлены материалы изложенных ниже исследований.

Цель работы – определение амплитуд вынужденных колебаний гладкой, бесконечной в плане плиты на основании Винклера как функций координат и времени.

Задача исследований была сформулирована так. Упругие свойства грунтового основания описываются с использованием коэффициента постели C_z. Плита неограниченных размеров имеет толщину h, а плотность ее материала равна ρ. В центре плиты приложена вертикальная сосредоточенная сила Q, которая совершает гармонические колебания с частотой ω. Требуется определить зависимость амплитуды вынужденных колебаний плиты W в точке с координатой r от времени t.

Аналогичные исследования необходимо выполнить для изменяющейся по гармоническому закону распределенной нагрузки q, распределенной по площади круга с радиусом R.

Изложение основного материала исследования. Согласно работам [4, 8, 9] зависимость перемещения гладкой плиты от времени t в точке с координатой r в полярной системе координат имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} D\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\right)^2\cdot W^*\left(r,t\right)+C_z\cdot W^*\left(r,t\right)+ \\ +\rho\cdot h^2\cdot\frac{\partial^2 W^*\left(r,t\right)}{\partial t^2}=q\left(r\right)\cdot exp\left(i\cdot\omega\cdot t\right) \end{array}\right\}. \quad (1)$$

Здесь $W^*\left(r,t\right)$ – искомое перемещение, $q\left(r\right)$ – амплитудное значение действующей на плиту внешней нагрузки, а $i=\sqrt{\left(-1\right)}$.

Для бесконечной в плане плиты граничные условия имеют вид

$$W^*\left(0,t\right)<\infty \text{ и } W^*\left(\infty,t\right)=0. \quad (2)$$

Решение ищем в виде

$$W^*\left(r,t\right)=W\left(r\right)\cdot exp\left(i\cdot\omega\cdot t\right). \quad (3)$$

Далее подставим (3) в (1). Имеем

$$D\cdot\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\right)^2\cdot W\left(r\right)+\left(C_z-\rho\cdot h\cdot\omega^2\right)\cdot W\left(r\right)=q\left(r\right). \quad (4)$$

Решение (4) ищем в виде

$$W\left(r\right)=\int_0^\infty A\left(\alpha\right)\cdot J_0\left(\alpha\cdot r\right)\cdot\alpha\cdot d\alpha, \quad (5)$$

где $A\left(\alpha\right)$ – подлежащая определению функция параметра α, а $J_0\left(\alpha\cdot r\right)$ – функция Бесселя первого рода с нулевым индексом [6].

Далее применим к правой части (4) прямое преобразование Бесселя [6], а потом – обратное преобразование Бесселя. Имеем

$$\left.q\left(r\right)=\int_0^\infty F\left(\alpha\right)\cdot\alpha\cdot J_0\left(\alpha\cdot r\right)\cdot d\alpha; \quad F\left(\alpha\right)=\int_0^\infty q\left(r\right)\cdot r\cdot J_0\left(\alpha\cdot r\right)\cdot dr.\right\}. \quad (6)$$

Далее подставим выражения (5) и (6) в равенство (4) и найдем функцию $A\left(\alpha\right)$. Имеем

$$\int_0^\infty\left\{A\left(\alpha\right)\cdot\left[D\cdot\alpha^4+\left(C_z-\rho\cdot h\cdot\omega^2\right)\right]-F\left(\alpha\right)\right\}\cdot\alpha\cdot J_0\left(\alpha\cdot r\right)\cdot d\alpha=0, \quad (7)$$

откуда

$$A\left(\alpha\right)=\frac{F\left(\alpha\right)}{\left[D\cdot\alpha^4+\left(C_z-\rho\cdot h\cdot\omega^2\right)\right]}. \quad (8)$$

С учетом (3) и (8) окончательное решение искомой задачи имеет вид

$$W^*(r,t)=exp(i\cdot\omega\cdot t)\cdot\int_0^\infty\frac{F(\alpha)\cdot\alpha\cdot J_0(\alpha\cdot r)}{\left[D\cdot\alpha^4+\left(C_z-\rho\cdot h\cdot\omega^2\right)\right]}\cdot d\alpha\cdot \tag{9}$$

Далее рассмотрим случай, когда к центру плиты приложена сосредоточенная сила Q. Имеем

$$F(\alpha)=\int_0^\infty q(r)\cdot r\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot dr=\int_0^\infty\left[\frac{Q\cdot\delta(r)}{2\cdot\pi\cdot r}\right]\cdot r\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot dr=\frac{Q}{2\cdot\pi}\cdot \tag{10}$$

В случае, когда в центре плиты приложена распределенная по площади круга нагрузка q, найдем

$$F(\alpha)=\int_0^\infty q(r)\cdot r\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot dr=\int_0^R q\cdot r\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot dr=q\cdot R\cdot\frac{J_1(\alpha\cdot R)}{\alpha}\cdot \tag{11}$$

Таким образом, если в центре плиты приложена изменяющаяся по гармоническому закону сосредоточенная сила, решение задачи имеет вид

$$W^*(r,t)=\frac{Q}{2\cdot\pi}\cdot exp(i\cdot\omega\cdot t)\cdot\int_0^\infty\frac{\alpha\cdot J_0(\alpha\cdot r)}{\left[D\cdot\alpha^4+\left(C_z-\rho\cdot h\cdot\omega^2\right)\right]}\cdot d\alpha\cdot \tag{12}$$

При этом, если в центре плиты приложена изменяющаяся по гармоническому закону распределенная по площади круга нагрузка q, решение задачи имеет вид

$$W^*(r,t)=q\cdot R\cdot exp(i\cdot\omega\cdot t)\cdot\int_0^\infty\frac{J_1(\alpha\cdot R)}{\alpha}\cdot\frac{\alpha\cdot J_0(\alpha\cdot r)}{\left[D\cdot\alpha^4+\left(C_z-\rho\cdot h\cdot\omega^2\right)\right]}\cdot d\alpha\cdot \tag{13}$$

Далее исследуем зависимости амплитуды колебаний $W^*(r)$ от координаты r. Если в центре плиты приложена сосредоточенная сила, то

$$W(r)=\int_0^\infty A(\alpha)\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot\alpha\cdot d\alpha=\frac{Q}{2\cdot\pi}\cdot\int_0^\infty\frac{\alpha\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot d\alpha}{\left[D\cdot\alpha^4+\left(C_z-\rho\cdot h\cdot\omega^2\right)\right]}\cdot \tag{14}$$

Далее примем в (14)

$$\left.\begin{array}{l} a=\sqrt[4]{\dfrac{C_z-\rho\cdot h\cdot\omega^2}{D}};\\ \alpha=a\cdot\xi;\\ d\alpha=a\cdot d\xi;\\ \overline{r}=a\cdot r;\\ \overline{W}=\dfrac{W\cdot D\cdot a^2}{Q}. \end{array}\right\}, \tag{15}$$

где $\overline{W}$ и $\overline{r}$ – соответственно относительная амплитуда колебаний и безразмерный радиус. Имеем

$$\bar{W}(r) = \int_0^{\infty} \frac{\xi \cdot J_0(\xi \cdot \bar{r}) \cdot d\xi}{\xi^4 + 1}. \tag{16}$$

Несобственный интеграл (16) вычислялся численно. Результаты вычислений в графической форме представлены на рисунке 1.

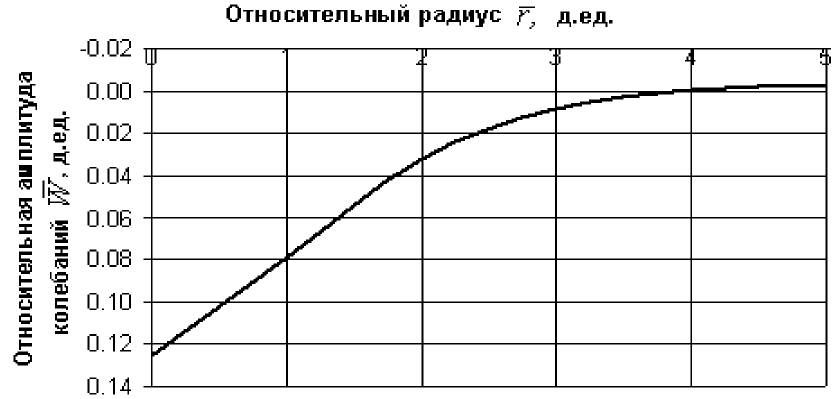

Рисунок 1 – Зависимость безразмерной амплитуды колебаний плиты от координаты

В целом, изложенные в данной работе материалы исследований позволили нам сделать такие **выводы**.

1. Получено аналитическое решение задачи о вынужденных колебаниях бесконечной плиты на основании Винклера.

2. Установлено, что зависимость амплитуды колебаний плиты от координаты имеет вид апериодической функции (рис. 1). При этом величина амплитуды зависит от свойств основания и плиты, ее геометрии, частоты изменения и величины внешней нагрузки.

Литература

1. Баркан, Д.Д. Динамика оснований и фундаментов / Д.Д. Баркан. – М.: Стройвоенмориздат, 1948. – 410 с.

2. СНиП 2.02.05-87. Фундаменты машин с динамическими нагрузками. – М: ЦИТП Госстроя СССР, 1988. – 32 с.

3. Шаповал, В.Г. Сравнительный анализ поведения плитного и свайного фундаментов при воздействии на них динамической нагрузки от линий метрополитена / В.Г. Шаповал, В.Б. Швец, А.Ю. Конопляник // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса, 2001. – С. 190 – 196.

4. Киричек, Ю.А. Комбинированные массивно-плитные фундаменты / Ю.А. Киричек. – Д.: ПГАСА, 2001 – 207 с.

5. Кірічек, Ю.О. Взаємодія комбінованих масивно- плитних фундаментів із ґрунтовою основою при різних видах навантажень: дис. ... докт. техн. наук.: спец. 05.23.02 «Основи і фундаменти» / Ю.О. Кірічек; ПДАБА. – Д., 2001. – 311 с.

6. Корн, Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 840 с.

7. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

8. Власов, В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – М.: Физматгиз, 1960. – 491 с.

9. Тимошенко, С.П. Пластины и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский – Кригер. – М: Наука, 1966. – 636 с.

Надійшла до редакції 09.10.2012