

ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАНЬ ГНУЧКИХ ТРУБЧАСТИХ СКРЕБКОВИХ КОНВЕЄРІВ ДВОВИМІРНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Досліджено залежність частоти власних коливань канату від швидкості пересування сипкого середовища, його амплітуди, фізико-механічних властивостей матеріалу у трубчастих скребкових конвеєрах і умови існування резонансних коливань за дії періодичного збурення на систему. Виведено залежність резонансних коливань, а значить і максимальних динамічних зусиль у канаті від кінематичних, геометричних та фізико-механічних параметрів і стійкість процесу.

Ключові слова: канат, коливання, амплітуда, швидкість.

Вступ. Для гнучких привідних елементів (канатів) конвеєрів потрібно ще на стадії проектування визначити спектр власних частот, вибирати параметри та режими експлуатації таким чином, щоб уникнути резонансні явища у них, а значить, забезпечити довготривалу їх експлуатацію. Дослідити це можна тільки на основі побудови та аналізу розв'язків математичних моделей, які адекватні динамічному процесу.

Огляд останніх джерел досліджень і публікацій. Для випадку коливальних систем (привідних канатів транспортерів у тому числі) це, в першу чергу, комбінаційні резонанси, залежність частоти коливань від амплітуди, відсутність принципу суперпозиції, втрата стійкості займалося багато науковців Андронов І.В. [1] Бабаков І.М [2], Боголюбов Н.Н. [3], Блакєр О. [4], Гробов В.А [5], Доценко П.Д. [6], Кузьо І.В., Сокіл Б.І. [7] тощо.

Виділення невіршених раніше частин загальної проблеми. Побудова аналітичних розв'язків нелінійних математичних моделей коливань гнучких елементів привідних елементів конвеєрних канатів, які враховують постійну складову швидкості їх руху та аналіз на їх основі впливу кінематичних, фізико-механічних, геометричних параметрів на динамічний процес є предметом розгляду статті. Вона базується на: а) принципі одночастотності коливань у нелінійних системах із багатьма ступенями вільності та розподіленими параметрами [3, 8]; б) хвильовій теорії руху [9, 10, 11], яка адаптована для поздовжньо-рухомих систем [12–13]; в) поширенні основної ідеї методу Ван-дер-Поля [14] на розглядувані класи динамічних систем.

Постановка завдання. Дослідити амплітуду коливань частоти вимушуючої сили при проходженні головного резонансу за різних швидкостей руху канату.

Основний матеріал і результати. Набагато складнішим і одночасно більш важливішим з огляду на практичну сторону є дослідження резонансного випадку канату. Резонансні коливання можуть виникати на частотах кратних $2V/l$ або $\pi V/2l$ їх дробовим частинам. Із математичної сторони всі викладки, які стосуються резонансу зумовленого збуренням крайових умов (резонанс на частоті $2V/l$ або кратній чи дробовій її частині) ідентичні резонансу на іншій частоті (зумовленій нерівномірним розподілом маси сипкого середовища між скребками та використанням змінних Ейлера). Тому нижче зупинимось на більш важливому, на наш погляд, першому випадку, а для другого — наведемо тільки остаточні розрахункові залежності.

Зважаючи на вказане вище, розглянемо випадок

$$\Omega^2 = \left(\frac{p}{q} \frac{2V}{l} \right)^2 + \mu\Delta \quad \text{або} \quad \Omega^2 = \left(\frac{p}{q} \frac{\pi V}{2l} \right)^2 + \mu\Delta \quad (1)$$

де $\mu\Delta$ – відхилення квадрата власної частоти від частоти зовнішнього збурення.

Таким чином, поставлена задача звелась до інтегрування рівняння за неоднорідних крайових умов. Для цього подамо їх у більш загальному вигляді

$$\begin{aligned} u_i(x_i, t)|_{x_i=0} &= \mu g_{i0} \left(u(x_i, t), \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial x_i}, \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t} \right) \Big|_{x_i=0} ; \\ u_i(x_i, t)|_{x_i=L} &= \mu g_{iL} \left(u(x_i, t), \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial x_i}, \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t} \right) \Big|_{x_i=L} . \end{aligned} \quad (2)$$

Для цього, перш за все, задачі із неоднорідними крайовими умовами замінами змінних

$$u_i(x_i, t) = v_i(x_i, t) + \mu w_i(x_i, t) \quad (3)$$

зведемо до більш простих — задач із однорідними крайовими умовами. Дійсно, якщо функції $w_i(x_i, t)$ та $v_i(x_i, t)$ є розв'язками диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} = 0, \quad (4)$$

та

$$\frac{\partial^2 v_i(x_i, t)}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 v_i(x_i, t)}{\partial t \partial x_i} - \left(\frac{EA}{m_0} - V^2 \right) \frac{\partial^2 v_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} = \mu F_i \left(v_i(x_i, t), \frac{\partial v_i(x_i, t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 v_i(x_i, t)}{\partial x_i^2}, \vartheta \right), \quad (5)$$

і задовольняють відповідно крайові умови

$$\begin{aligned} w_i(x_i, t)|_{x_i=0} &= \mu g_{i0} \left(v(x_i, t), \frac{\partial v(x_i, t)}{\partial x_i}, \frac{\partial v(x_i, t)}{\partial t} \right) \Big|_{x_i=0} ; \\ w_i(x_i, t)|_{x_i=L} &= \mu g_{iL} \left(v(x_i, t), \frac{\partial v(x_i, t)}{\partial x_i}, \frac{\partial v(x_i, t)}{\partial t} \right) \Big|_{x_i=L} \end{aligned} \quad (6)$$

та

$$v(x, t)|_{x=0} = 0; \quad v(x, t)|_{x=L} = 0, \quad (7)$$

то отримані таким способом функції $u_i(x_i, t)$ будуть у першому наближенні задовольняти поставленій задачі із неоднорідними крайовими умовами.

Поширити основну ідею методу Ван-дер-Поля на досліджувані класи задач значною мірою полегшує принцип одночастотності коливань нелінійних систем. Із його урахуванням перше одночастотне наближення розв'язку рівняння (5) за крайових умов (6) будемо шукати у вигляді

$$v(x, t) = a(t) [\cos(Kx_i + \Omega t + \varphi(t)) - \cos(Hx_i - \Omega t - \varphi(t))], \quad (8)$$

де a , φ – сталі, K , H – хвильові числа прямої і відбитої хвиль, Ω – власна частота процесу.

Таким чином у резонансному випадку, як і у нерезонансному, розв'язком задачі вважатимемо залежність (8) у котрій амплітуда та фаза коливань є функціями часу. Проте, у резонансному випадку визначальним параметром динамічного процесу є різниця фаз власних та вимушених коливань: $\phi = \psi - \vartheta$. Якщо формально ввести цей параметр у залежність (8), то у резонансному випадку розв'язок буде представлятись у вигляді

$$u(x, t) = a(t) (\cos(Kx + \phi + \vartheta) + \vartheta(t)) - \cos(Hx - \phi - \vartheta). \quad (9)$$

До того ж, на відміну від розглянутого нерезонансного випадку, у резонансному величини da/dt та $d\varphi/dt$, є функціями, що залежать не лише від амплітуди a , але і від різниці фаз ϕ ($\psi = \phi - \vartheta$). Таким чином, базою для визначення основних амплітудно-частотних характеристик резонансного динамічного процесу є диференціальні рівняння

$$\frac{da}{dt} = \mu\Lambda(a, \phi); \quad \frac{d\phi}{dt} = \Omega - \frac{p}{q} \frac{2V}{l} + \mu\Xi(a, \phi), \quad (10)$$

де $\Lambda(a, \phi)$, $\Xi(a, \phi)$ – невідомі функції, які необхідно знайти таким чином, щоб залежність (9), із урахуванням (10), задовольняла вихідну задачу із розгляданим ступенем точності.

З урахуванням наведеного, шляхом диференціювання (9) по змінних t, x , отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= a \frac{d\phi}{dt} [-\sin(Kx + \phi + \vartheta) - \sin(Hx - \phi - \vartheta)] + \frac{da}{dt} [\cos(Kx + \phi + \vartheta) - \\ &- \cos(Hx - \phi - \vartheta)] - a \frac{p}{q} \frac{2V}{l} [-\sin(Kx + \phi + \vartheta) + \sin(Hx - \phi - \vartheta)]; \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{d^2 a}{dt^2} [\cos(Kx + \phi + \vartheta) - \cos(Hx - \phi - \vartheta)] - 2 \frac{da}{dt} \left(\frac{p}{q} \frac{2V}{l} + \frac{d\phi}{dt} \right) \times \\ &\times [\sin(Kx + \phi + \vartheta) + \sin(Hx - \phi - \vartheta)] - a \frac{d^2 \phi}{dt^2} [\sin(Kx + \phi + \vartheta) + \\ &+ \sin(Hx - \phi - \vartheta)] - a \left(\frac{p}{q} \frac{2V}{l} + \frac{d\phi}{dt} \right)^2 [\cos(Kx + \phi + \vartheta) - \cos(Hx - \phi - \vartheta)]; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} &= \frac{da}{dt} [-K \sin(Kx + \phi + \vartheta) + H \sin(Hx - \phi - \vartheta)] - \\ &- a \left(\frac{p}{q} \frac{2V}{l} + \frac{d\phi}{dt} \right) [K \cos(Kx + \phi + \vartheta) + H \cos(Kx + \phi + \vartheta)]; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= a [-K^2 \cos(Kx + \phi + \vartheta) + H^2 \cos(Hx - \phi - \vartheta)] \end{aligned} \quad (11)$$

Подібним чином як і для нерезонансного випадку, із (5), враховуючи (11), для першого наближення маємо систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій da/dt та $d\phi/dt$

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} \{ &-2\Omega \sin(Kx + \phi + \vartheta) - 2\Omega \sin(Kx + \phi + \vartheta) - 2VK \sin(Kx + \phi + \vartheta) + \\ &+ 2VH \sin(Hx - \phi - \vartheta) \} + a \left(\frac{d\phi}{dt} + \frac{p}{q} \frac{2V}{l} - \Omega \right) \left\{ -2\Omega \cos(Kx + \phi + \vartheta) + 2 \frac{p}{q} \frac{2V}{l} \times \right. \\ &\times \cos(Kx + \phi + \vartheta) - 2VK \cos(Kx + \phi + \vartheta) - 2VH \cos(Kx + \phi + \vartheta) \left. \right\} = \varepsilon \bar{f}(a, x, \phi + \vartheta, \bar{\vartheta}). \end{aligned} \quad (12)$$

Після нескладних перетворень із них знаходимо

$$\begin{aligned} \cos(\phi + \vartheta) &\left\{ \frac{da}{dt} [(-2\Omega - 2VK) \sin Kx + (-2\Omega + 2VH) \sin Hx] + \right. \\ &+ a \left(\frac{d\phi}{dt} + \frac{p}{q} \frac{2V}{l} - \Omega \right) [(-2\Omega - 2VH) \cos Kx + (2\Omega - 2VH) \cos Hx] \left. \right\} + \\ &+ \sin(\phi + \vartheta) \left\{ a \left(\frac{d\phi}{dt} + \frac{p}{q} \frac{2V}{l} - \Omega \right) [(2\Omega + 2VK) \sin Kx + (2\Omega - 2VH) \sin Hx] + \right. \\ &+ \frac{d\phi}{dt} [(-2\Omega - 2VK) \cos Kx - (-2\Omega + 2VH) \cos Hx] \left. \right\} = \varepsilon \bar{f}(a, x, \phi + \vartheta, \bar{\vartheta}). \end{aligned} \quad (13)$$

Співвідношення за повільнозмінними величинами, визначаємо зв'язок між амплітудою та різницею фаз у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\mu}{4\pi L[(\Omega + VK)^2 + (\Omega - VH)^2]} \times \left(\int_0^L \Psi(x) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(a, x, \phi + \theta, \bar{\vartheta}) \cos(\phi + \theta) d\theta d\bar{\vartheta} + \right. \\ &+ \left. \Theta(x) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(a, x, \phi + \theta, \bar{\vartheta}) (\sin(\phi + \theta) d\theta d\bar{\vartheta}) \right) dx; \\ \frac{d\phi}{dt} &= \Omega - \frac{p}{q} \frac{2V}{l} - \frac{\mu}{4\pi La[(\Omega + VK)^2 + (\Omega - VH)^2]} \times \left(\int_0^L \Psi(x) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(a, x, \phi + \theta, \bar{\vartheta}) \times \right. \\ &\times \left. \sin(\phi + \theta) d\theta d\bar{\vartheta} - \Theta(x) \int_0^L \Psi(x) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(a, x, \phi + \theta, \bar{\vartheta}) \cos(\phi + \theta) d\theta d\bar{\vartheta} \right) dx. \end{aligned} \quad (14)$$

У наведених вище залежностях функції $\Psi(x)$ та $\Theta(x)$ мають вигляд аналогічний, як і для нерезонансного випадку. Це дозволяє у першому наближенні резонансні коливання канату транспортера, яка переміщає сипке середовище, описати залежністю (8), в котрій параметри $a(t)$ та $\phi(t)$ визначаються залежностями (14).

Подібним чином, як було наголошено вище, визначаються співвідношення, які описують резонансні коливання у випадку, коли власна частота коливань Ω близька до $\pi V/2l$ чи між ними існує зв'язок вигляду $q\Omega \approx p(\pi V/2l)$:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\mu}{4\pi L[(\Omega + VK)^2 + (\Omega - VH)^2]} \times \left(\int_0^L \Psi(x) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(a, x, \theta, \phi + \bar{\vartheta}) \cos(\phi + \theta) d\theta d\bar{\vartheta} + \right. \\ &+ \left. \Theta(x) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(a, x, \vartheta, \bar{\phi} + \bar{\vartheta}) \sin(\phi + \theta) d\theta d\bar{\vartheta} \right) dx; \\ \frac{d\bar{\phi}}{dt} &= \Omega - \frac{p}{q} \frac{\pi V}{2l} - \frac{\mu}{4\pi La[(\Omega + VK)^2 + (\Omega - VH)^2]} \times \left(\int_0^L \left(\Psi(x) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(a, x, \vartheta, \bar{\phi} + \bar{\vartheta}) \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \sin(\bar{\phi} + \bar{\vartheta}) d\vartheta d\bar{\vartheta} - \Theta(x) \int_0^L \left(\Psi(x) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(a, x, \vartheta, \bar{\phi} + \bar{\vartheta}) \cos(\bar{\phi} + \bar{\vartheta}) d\vartheta d\bar{\vartheta} \right) dx. \right. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким чином, у другому резонансному випадку коливання канату описуються залежністю $u(x, t) = a(t) (\cos(Kx + \bar{\phi} + \bar{\vartheta}) + \vartheta(t) - \cos(Hx - \bar{\phi} - \bar{\vartheta}))$ в якій параметри a та $\bar{\phi}$ визначаються залежністю (15) ($\psi = \bar{\phi} + \bar{\vartheta}$). Наведені вище загальні результати дозволяють для описати амплітудно-частотну характеристику поздовжніх коливань віток у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\mu}{2[(\Omega + VK)^2 + (\Omega - VH)^2]} \{-k_1 \Omega (2\Omega + V(H - X))a + \alpha_1 \cos \phi + \alpha_2 \sin \phi\}; \\ \frac{d\phi}{dt} &= \Omega - \frac{p}{q} \frac{2V}{l} + \frac{\mu}{[(\Omega + VK)^2 + (\Omega - VH)^2]a} \{\alpha_3 a^3 + \alpha_4 \cos \phi + \alpha_5 \sin \phi\}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{де } \alpha_1 = \pi \left[-\left(\frac{DV}{2l^2}\right)^2 \int_0^L x \Psi(x) dx + \left(\frac{D}{2l}\right)^2 \frac{V}{l} \int_0^L \Theta(x) dx \right], \quad \alpha_2 = \pi \left[\left(\frac{DV}{2l^2}\right)^2 \frac{V}{l} \int_0^L x \Theta(x) dx + \left(\frac{D}{2l}\right)^2 \frac{V}{l} \int_0^L \Psi(x) dx \right],$$

$$\alpha_3 = \frac{EA \{ \Omega(K^4 + 4K^2H^2 + H^4) + V(K^5 + 2K^3H^2 - 2K^2H^3 - H^5) \}}{4m_0 a k \pi},$$

$$\alpha_4 = \pi \left[\left(\frac{DV}{2l^2} \right)^2 \int_0^L x \Theta(x) dx - \left(\frac{D}{2l} \right)^2 \frac{V}{l} \int_0^L \Psi(x) dx \right], \quad \alpha_5 = -\pi \left[\left(\frac{DV}{2l^2} \right)^2 \frac{V}{l} \int_0^L x \Psi(x) dx + \left(\frac{D}{2l} \right)^2 \frac{V}{l} \int_0^L \Theta(x) dx \right].$$

На базі отриманих співвідношень нижче представлені резонансні криві (рис. 1) та закони зміни амплітуди при переході через головний резонанс (рис. 2).

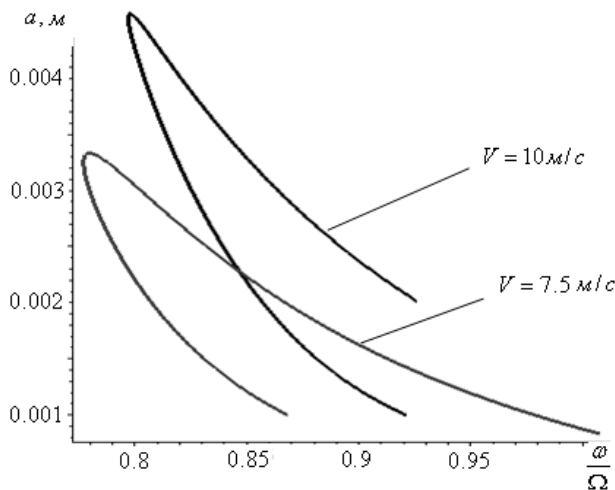


Рис. 1. Резонансні амплітуди за різних значень швидкості руху системи

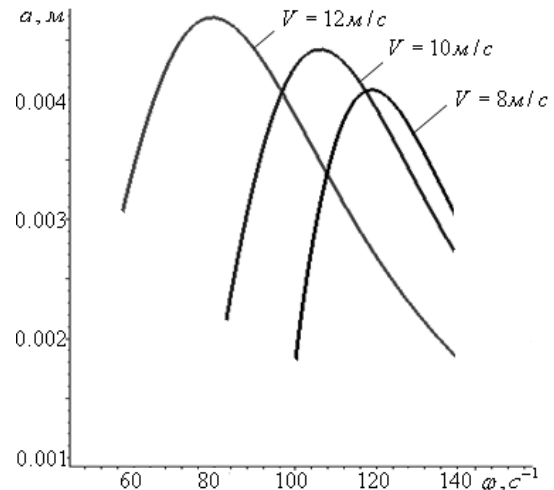


Рис. 2. Залежність амплітуди коливань від частоти вимушуючої сили при проходженні головного резонансу за різних швидкостей руху канату

Висновки. Резонансне значення амплітуди залежить як від геометричних розмірів канату, так і швидкості її позовжнього руху. Величина резонансного значення амплітуди коливань канату у 3–4 рази більша за амплітуду нерезонансних коливань, а значить — максимальні динамічні напруження у вказаному випадку перевищують динамічні напруження усталеного процесу.

Література

1. Андронов, И.В. Неквазилинейная асимптотика задач о колебаниях балок и пластин на нелинейном упругом основании [Текст] / И.В. Андронов, Н.С. Буланова // Доп. НАН України. – К., 1995. – № 9. – С. 28–30.
2. Бабаков, И.М. Теория колебаний [Текст] / И.М. Бабаков. – М.: Наука, 1965. – 560 с.
3. Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [Текст] / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 501 с.
4. Блэкьер, О. Анализ нелинейных систем [Текст] / О. Блэкьер. – М.: Наука, 1969. – 275 с.
5. Гробов, В.А. Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин [Текст] / В.А. Гробов. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 165 с.
6. Доценко, П.Д. О колебаниях и устойчивости прямолинейного трубопровода [Текст] / П.Д. Доценко // Прикладная механика. – 1971. – Вып. 3. – С. 85–91.
7. Кузьо, І.В. Вплив позовжнього руху на поперечні коливання нелінійних пружних систем [Текст] / І.В. Кузьо, Б.І. Сокіл // Вибрації в техніці та технологіях. – 2000. – № 2 (14). – С. 44–46.
8. Митропольский, Ю.А. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю.А. Митропольский, Б.И. Мосеенков. – К.: Вища школа, 1976. – 589 с.
9. Митропольский, Ю.А. О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Клейна-Гордона [Текст] / Митропольский Ю.А. // Укр. мат. журн. – 1995. – 47, № 9. – С. 1209–1216.
10. Митропольский, Ю.А. О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Брезертона [Текст] / Ю.А. Митропольский // Укр. мат. журн. – 1998. – 59, № 1. – С. 58–71.

11. Митропольський, Ю.О. Про застосування Атеб-функцій для побудови асимптотичного розв'язку збуреного нелінійного рівняння Клейна-Гордона [Текст] / Ю.О. Митропольський, Б.І. Сокіл // Укр. мат. журн. – 1998. – 50, № 5. – С. 665–670.

12. Chen, L.Q. Nonlinear parametric vibration of axially moving beams: asymptotic analysis and differential quadrature verification [Text] / Li-Qun Chen, Bo Wang, Hu Ding // Journal of Physics: Conference Series 181 (2009), – P. 1–8.

13. Харченко, Є. Багаточастотні коливання одновимірних нелінійно пружних рухомих середовищ та методика побудови асимптотичних наближень крайових задач, що їх описують [Текст] / Є. Харченко, М. Сокіл // Машинознавство. Всеукраїнський щомісячний науково-технічний і виробничий журнал. – 2007. – № 1. – С. 19–25.

14. Wan der Pol, B. A Theory of the Amplitude of Free and Forced Triode Vibrations [Text] // Radio Review. – 1920. – № 1.

15. Митропольський, Ю.А. Лекции по методу усреднения в нелинейной механике [Текст] / Ю.А. Митропольський – К.: Наукова думка, 1966. – 467 с.

16. Митропольський, Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике [Текст] / Ю.А. Митропольський – К.: Наукова думка, 1971. – 440 с.

© О.Л. Ляшук

О.Л. Ляшук, к.т.н., доц.

Тернопольского национального технического университета им. Ивана Пулюя

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИБКИХ ТРУБЧАТЫХ СКРЕБКОВЫХ КОНВЕЙЕРОВ ДВУМЕРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Исследовано зависимость частоты собственных колебаний каната от скорости передвижения сыпучей среды, ее амплитуды, физико-механических свойств материала у трубчатых скребковых конвейеров и условия существования резонансных колебаний за действия периодического возмущения на систему. Выведена зависимость резонансных колебаний, а значит и максимальных динамических усилий в канате от кинематических, геометрических и физико-механических параметров и стойкость процесса.

Ключевые слова: канат, колебание, амплитуда, скорость.

O.L. Layshyk, Ph.D., Associate Professor

Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University

RESEARCH OF RESONANCE VIBRATIONS OF FLEXIBLE TUBULAR SCRAPER CONVEYERS OF TWO-DIMENSIONAL ELEMENTS

Investigate the dependence of frequency natural oscillations of rope for speed movement friable environment, its amplitude, physical and mechanical properties of the material in tubular drag conveyors and conditions for the existence of resonant oscillations and a periodic perturbation of the system. Displaying dependence of resonance oscillations, and maximum dynamic rope efforts from kinematic, geometric, mechanical parameters and the stability of the process.

Keywords: rope, vibration, amplitude, speed.