

МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙ ПРИРОДНОГО СХИЛУ ПРИ ЙОГО ОСУШЕННІ

Наведено результати математичного моделювання деформацій природного схилу при його осушенні.

Ключові слова: зміщення, фільтрація, конформне відображення.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИРОДНОГО УКЛОНА ПРИ ЕГО ОСУШЕНИИ

Приведены результаты математического моделирования деформаций природного уклона при его осушении.

Ключевые слова: смещение, фильтрация, конформное отображение.

MODELLING OF NATURAL SLOPE DEFORMATIONS UNDER ITS DRAINAGE

Results of mathematical modeling of natural slope deformations under drainage have been given.

Keywords: displacement, filtration, conform reflection.

Вступ. При проектуванні та будівництві гідроакумуючих електростанцій (ГАЕС) нерідко доводиться виконувати осушення водонасичених природних схилів. Наявність фільтраційного потоку і зміни ваги ґрунту в процесі осушення призводить до виникнення вертикальних і горизонтальних деформацій природного схилу.

Огляд останніх джерел досліджень і публікацій. Започатковано розв'язання цієї проблеми в роботах [1, 2], основними результатами яких є вдосконалення математичних моделей і методів їх рішень для визначення параметрів фільтраційного потоку, оцінювання напружено-деформованого стану (НДС) ґрунтових масивів при дії фільтраційного потоку води. У роботі [3] дано рішення з оцінювання НДС ґрунтових масивів при осушенні їх горизонтальними паралельними дренами. Однак питання моделювання деформацій масивних природних водонасичених схилів при їх осушенні недостатньо вивчено.

Метою роботи є моделювання деформацій водонасиченого природного схилу Канівської ГАЕС при його осушенні. Інженерно-геологічний розріз об'єкта будівництва наведено на рис. 1.

Основний матеріал і результати. Необхідність в осушенні природного схилу Канівській ГАЕС виникла у зв'язку з улаштуванням напірних сталезалізобетонних водоводів, будівлі ГАЕС та монтажного майданчика.

Для зведення цих об'єктів передбачається влаштування котловану з попереднім глибинним водозниженням і відкритим водовідливом (рис. 2).

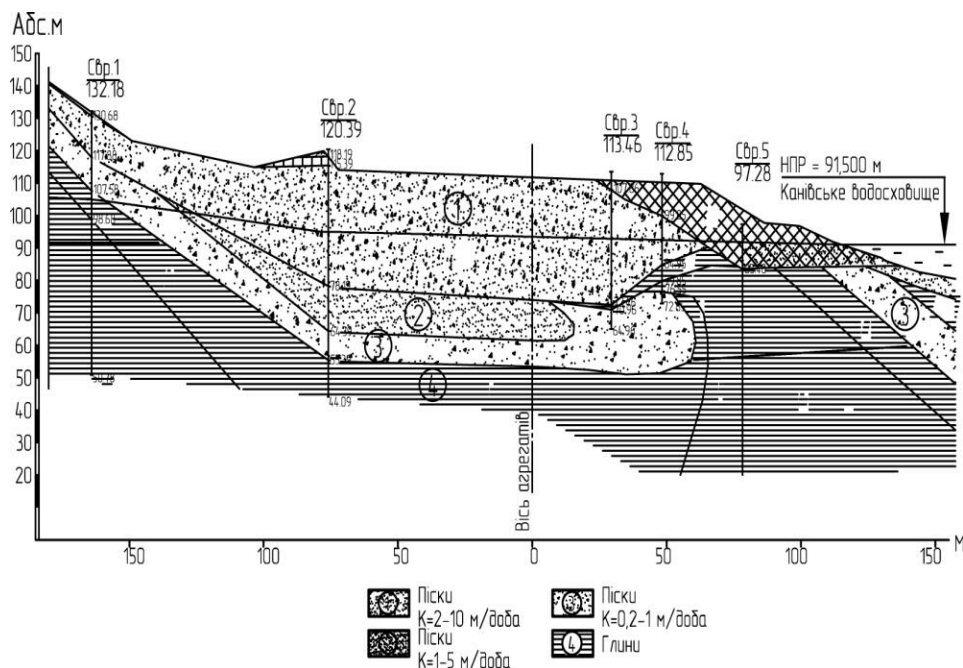


Рис. 1. Інженерно-геологічний розріз об'єкту будівництва

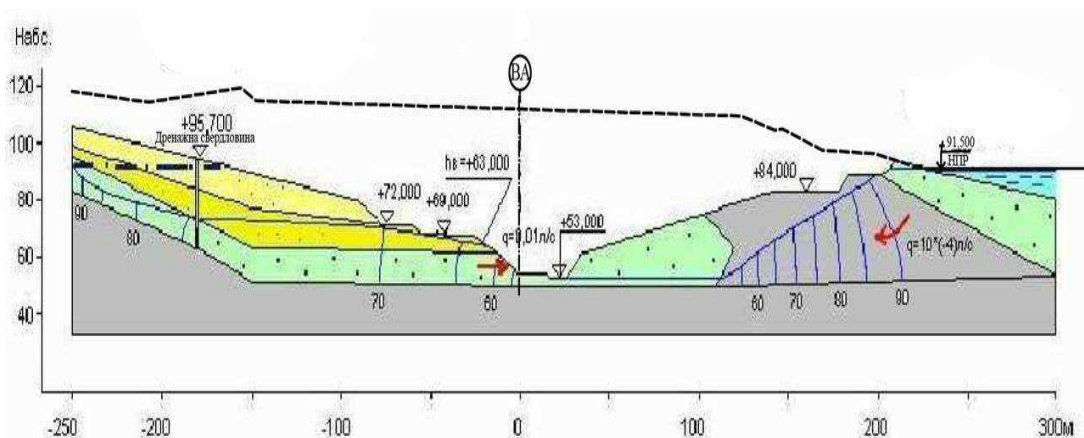


Рис. 2. Схема осушення котловану для влаштування будівлі ГАЕС

При осушенні нижньої частини природного схилу виникають додаткові деформації, що можуть суттєво змінювати важливі проектні позначки будівлі ГАЕС і напірного водоводу.

Для встановлення вертикальних і горизонтальних зміщень ґрунтового масиву в процесі його осушення виконано чисельні дослідження на основі розроблених математичних моделей і методів їх рішень.

Математична модель, що описує цю задачу, складається з диференціальних рівнянь фільтраційного потоку і рівнянь НДС ґрунтового масиву, які записуються в переміщеннях.

Рівняння фільтраційного потоку води в початковий момент осушення ґрунтового масиву записується у вигляді

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

де $H(x, z)$ – напір води в точці (x, z) ґрунтового масиву.

У роботі розглядається задача повного осушення ґрунтового масиву з відомим початковим рівнем поверхні ґрунту і ґрунтових вод. Кінцеве положення ґрунтових вод знаходиться на рівні нижньої межі (водоопору).

У процесі розв'язання поставленої задачі необхідно розрахувати поле напорів, НДС ґрунтового масиву та визначити його зміщення в заданих точках. Математична модель задачі НДС у переміщеннях у початковий момент часу в області, нижчій від рівня ґрунтових вод $\Omega = \{(x, z) | x \in (0, r), z \in (0, h(x, 0))\}$, описується диференціальними рівняннями [4]

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) = \gamma_w \frac{\partial H}{\partial x}; \quad (2)$$

$$\mu \Delta w + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \gamma_{sb} + \gamma_w \frac{\partial H}{\partial z} \quad (3)$$

при таких граничних умовах

$$u(x, 0) = 0, \quad w(x, 0) = 0; \quad (4)$$

$$u(0, z) = 0, \quad u(r, z) = 0; \quad (5)$$

$$\tau_{xz}(0, z) = 0; \quad \tau_{xz}(r, z) = 0; \quad (6)$$

$$\tau_n(x, l_1(x)) = 0; \quad \sigma_n(x, l_1(x)) = \gamma_n(l_1(x) - l(x)). \quad (7)$$

Тут $h(x, 0)$ – висота розміщення ґрунтових вод у момент часу t ; $H(x, z)$ – напір у точці (x, z) у момент часу t ; Δ – оператор Лапласа; λ, μ – пружні сталі; $u(x, z)$ – горизонтальні, а $w(x, z)$ – вертикальні зміщення точки, яка в момент t знаходиться в точці (x, z) ; $\gamma_w = \rho_w g$ – питома вага води; γ_{sb} – питома вага ґрунту у зваженому стані; τ_{xz} – головні дотичні напруження; σ_n – нормальні напруження; τ_n – дотичні напруження; $l_1(x)$ – рівень ґрунтових вод; $l(x)$ – товщина ґрунтового масиву в момент часу t ; γ_n – питома вага ґрунту в природному стані.

У кінцевий момент часу задачу розглядаємо у тій же області Ω Оскільки після осушення вода в ґрунті відсутня, то $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial z} = 0$. Крім того, питому вагу ґрунту приймаємо в природному стані. Також коефіцієнти λ, μ можуть відрізнятися для ґрунту у водонасиченому і природному стані.

Для того щоб знайти зміщення у ґрунтовому масиві, необхідно знати напори в усіх точках масиву в початковий момент часу. Для визначення напорів в області Ω знайдемо розв'язок диференціального рівняння стаціонарної фільтрації (1) при таких граничних умовах

$$H(0, z) = H_0(z); \quad H(r, z) = H_r(z); \quad (8)$$

$$\frac{\partial H(x,0)}{\partial z} = 0; \quad H(x, h(x,t)) = h(x,t), \quad (9)$$

де $H_0(z)$, $H_r(z)$ – напори на лівій та правій межах ґрунтового масиву (відомі функції); r – загальна ширина області, що розглядається.

Знайдемо розв’язок задачі (1), (8), (9). Для цього здійснимо чисельне конформне відображення області $\Omega = \{(x,z) | x \in (0,r), z \in (0, h(x,0))\}$ на параметричний прямокутник у площині $\xi O \eta$ [5]. Відображення здійснюємо таким чином: задаємо h_ξ – крок сітки по ξ і h_η по η . Для поліпшення збіжності при побудові конформної сітки вибираємо $h_\xi = h_\eta$.

$$\Gamma_1 : z = 0 \Rightarrow \eta = 0,$$

$$\Gamma_2 : z = h(x,t) \Rightarrow \eta = b,$$

$$\Gamma_3 : x = 0 \Rightarrow \xi = 0,$$

$$\Gamma_4 : x = r \Rightarrow \xi = a,$$

$$n = \frac{r}{h_\xi},$$

$$m = \frac{h_{av}}{h_\eta},$$

де n – кількість кроків по ξ ; m – кількість кроків по η ; $h_{av} = \frac{\int_0^r h(x,t) dx}{r}$ – осереднений рівень ґрунтових вод.

Алгоритм побудови гідродинамічної сітки, згідно з методами чисельного конформного відображення, полягає в такому. Спочатку задаємо початкові значення координат плаваючих вузлів на сторонах параметричного прямокутника $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$.

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x_{i0} = ih_\xi, \\ z_{i0} = 0; \end{cases}$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x_{im} = ih_\xi, \\ z_{im} = h(x_{im}, t); \end{cases}$$

$$\Gamma_3 : \begin{cases} x_{0j} = 0, \\ z_{0j} = \frac{h(0,t)}{m} j; \end{cases}$$

$$\Gamma_4 : \begin{cases} x_{nj} = r, \\ z_{nj} = \frac{h(r,t)}{m} j. \end{cases}$$

Обчислюємо початкові координати внутрішніх вузлів різницевої сітки, використовуючи формули:

$$\begin{cases} x_{ij}^0 = \frac{1}{2}(x_{i0} + x_{im}), \\ z_{ij}^0 = \frac{1}{2}(z_{0j} + z_{nj}), i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}. \end{cases}$$

Уточнюємо координати внутрішніх вузлів сітки, використовуючи метод послідовної верхньої релаксації,

$$\begin{cases} x_{ij}^{k+1} = \frac{\omega}{4}(x_{i-1,j}^{k+1} + x_{i+1,j}^k + x_{i,j-1}^{k+1} + x_{i,j+1}^k) + (1-\omega) \cdot x_{i,j}^k, \\ z_{ij}^{k+1} = \frac{\omega}{4}(z_{i-1,j}^{k+1} + z_{i+1,j}^k + z_{i,j-1}^{k+1} + z_{i,j+1}^k) + (1-\omega) \cdot z_{i,j}^k, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}, \end{cases}$$

$$\text{де } \omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}, \quad \rho = \frac{\left(\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{m}\right)}{2}.$$

Уточнюємо координати «плаваючих» вузлів на межах

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x_{i0} = \frac{1}{3}(-x_{i2} + 4x_{i1}), \\ z_{i0} = 0; \end{cases}$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x_{im} = (z_{i-1,m} - z_{i+1,m}) \frac{3y_{im} - 4y_{i,m-1} + y_{i,m-2}}{x_{i+1,m} - x_{i-1,m}} + \frac{1}{3}(4x_{i,m-1} - x_{i,m-2}), \\ p_{im} = \min\{\max\{x_{im}, 0\}, r\}, \\ z_{im} = \max\{h(p_{im}, t), 0\}, \end{cases}$$

де величина p_{im} вводиться для того, щоб можна було задавати функцію h , визначену по змінній x лише на відрізку $[0, r]$.

$$\Gamma_3 : \begin{cases} x_{0j} = 0, \\ z_{0j} = \frac{1}{3}(-z_{2,j} + 4z_{1,j}), \end{cases}$$

$$\Gamma_4 : \begin{cases} x_{nj} = r, \\ z_{nj} = \frac{1}{3}(-z_{n-2,j} + 4z_{n-1,j}). \end{cases}$$

Почергове уточнення координат внутрішніх та «плаваючих» вузлів виконуємо до тих пір, поки середня відстань між попередніми та поточними точками сітки $S = \frac{1}{nm} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sqrt{(x_{ij}^{k+1} - x_{ij}^k)^2 + (y_{ij}^{k+1} - y_{ij}^k)^2}$ більша від заданої точності ε .

Чисельний розв'язок крайової задачі (1), (8), (9) отримаємо шляхом побудови на сітці параметричного прямокутника в площині $\xi O \eta$ різницевої схеми з використанням шаблону типу «хрест» та розв'язання її ітераційним методом послідовної верхньої релаксації.

Розв'яжемо задачу (2) – (7). Для цього виразимо напруження через зміщення

$$\tau_{xz} = \mu \varepsilon_{xz} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (10)$$

Згідно з формулою (5), $u|_{x=0} = u|_{x=r} = 0$, тому $\frac{\partial u}{\partial z}|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial z}|_{x=r} = 0$. Отже, рівняння (6) набуде вигляду

$$\frac{\partial w}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=r} = 0. \quad (11)$$

З опору матеріалів відомі формули

$$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xz} n_x n_z, \quad \tau_n = \sqrt{P_x^2 + P_z^2 - \sigma_n^2}, \quad (12)$$

де $P_x = \sigma_x n_x + \tau_{xz} n_z$, $P_z = \tau_{xz} n_x + \sigma_z n_z$ – складові вектора напружень; n_x, n_z – напрямні косинуси вектора нормалі до верхньої межі Ω_t , а саме $n_x = -\sin \alpha$, $n_z = \cos \alpha$, де $\alpha = \arctg(l_1'(x))$.

Урахувавши рівняння (12) і виразивши напруження через зміщення, із залежності (7) отримаємо

$$\left(2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) n_x n_z + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) (n_x^2 - n_z^2) \right) \Big|_{z=l_1} = 0; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \left((\lambda(n_x^2 + n_z^2) + 2\mu n_x^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda(n_x^2 + n_z^2) + 2\mu n_z^2) \frac{\partial w}{\partial z} + \right. \\ & \left. + \mu n_x n_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \Big|_{z=l_1} = \gamma_n (l_1(x) - l(x)). \end{aligned} \quad (14)$$

Для розв'язання задачі (2) – (5), (11), (13), (14) перейдемо до змінних ξ, η .

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{J_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \right) = \gamma_w \frac{\partial H}{\partial x}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{J_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \gamma_{sb} + \gamma_w \frac{\partial H}{\partial z}, \quad (16)$$

де $J_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2$ – якобіан оберненого відображення.

Аналогічні переходи здійснимо також у крайових умовах. Для знаходження вертикальних та горизонтальних зміщень у заданих точках ґрунтового масиву проведемо заміну перших і других похідних функцій ξ, η по x, z через похідні x, z по ξ, η [6]. Знайдемо похідні x, z по ξ, η на конформній сітці за допомогою стандартних скінченнорізницевих апроксимацій другого порядку точності. Замінімо похідні від функцій u, w по змінних ξ, η їх скінченнорізницевиими аналогами другого порядку точності, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) із квадратною матрицею системи. Розв'язавши СЛАР одним із стандартних числових методів (наприклад, модифікованим методом Гауса), знайдемо значення горизонтальних і вертикальних зміщень у заданих точках сітки.

Для отримання зміщень унаслідок осушення віднімемо від зміщень після осушення відповідні зміщення в початковий момент часу.

Для чисельного розв'язання задачі створено програму мовою програмування C++.

Згідно з описаним алгоритмом, здійснено чисельні експерименти з визначенням вертикальних зміщень при осушенні природного ґрунтового схилу для влаштування котловану з проектування та будівництва Канівської ГАЕС. Інженерно-геологічний розріз ґрунтового масиву після осушення і влаштування котловану наведено на рис. 3.

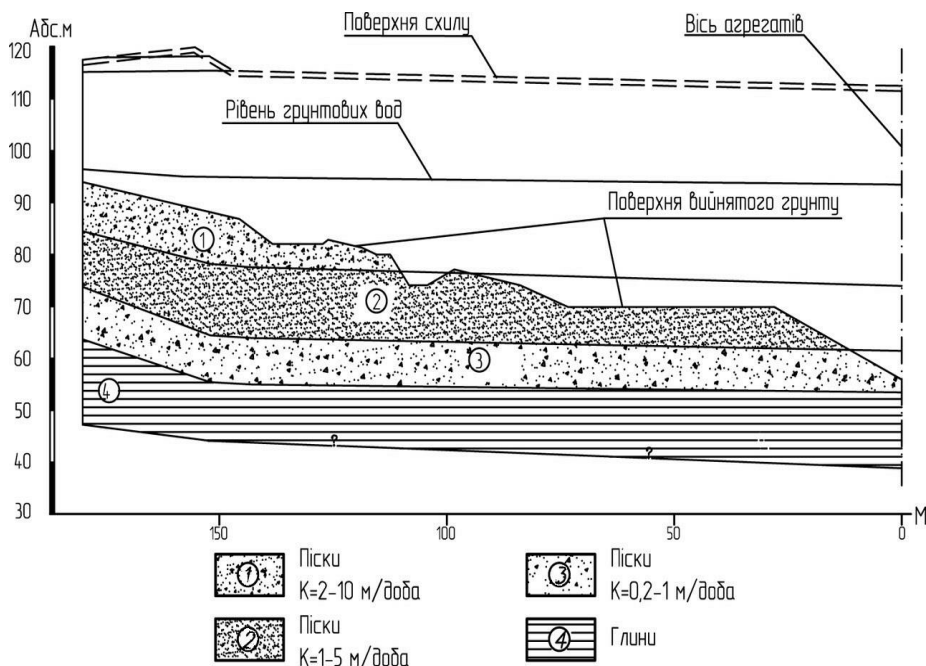


Рис. 3. Інженерно-геологічний розріз ґрунтового масиву після осушення й влаштування котловану

Вихідні дані, що застосовувалися в розрахунках, були такими: $r = 180\text{м}$; $l(x,0) = 67 - 5 \cdot \frac{x}{r} \text{ м}$; $h(x,0) = 43 - \frac{x}{r} \text{ м}$; $H_0(z)|_{t=0} = 43\text{м}$; $H_r(z)|_{t=0} = 42\text{м}$; $\lambda_1 = 18493\text{КПа}$; $\mu_1 = 15748\text{КПа}$; $\lambda_2 = 18000\text{КПа}$; $\mu_2 = 18000\text{КПа}$; $\gamma_w = 10\text{кН / м}^3$; $\gamma_n = 16,48\text{кН / м}^3$; $\gamma_{sb} = 9,63\text{кН / м}^3$; $\gamma_{dr} = 16,48\text{кН / м}^3$. Заданий крок сітки $\approx 3\text{м}$.

Тут λ_1, μ_1 – коефіцієнти Ламе для ґрунту у водонасиченому стані, а λ_2, μ_2 – для осушеного ґрунту. Результати чисельних досліджень з визначення вертикальних і горизонтальних зміщень ґрунтового масиву наведено в таблицях 1, 2 та на рис. 4.

Таблиця 1. Значення горизонтальних зміщень

z \ x	22,5	45	67,5	90	112,5	135	157,5
39,9	-1,33	-2,18	-2,62	-2,76	-2,62	-2,18	-1,34
29,925	-1,31	-2,07	-2,46	-2,58	-2,46	-2,07	-1,31
19,95	-1,07	-1,66	-1,95	-2,04	-1,95	-1,66	-1,06
9,975	-0,64	-0,97	-1,13	-1,17	-1,12	-0,96	-0,63

Таблиця 2. Значення вертикальних зміщень

z \ x	22,5	45	67,5	90	112,5	135	157,5
39,9	-78,5	-78,6	-78,6	-78,6	-78,6	-78,6	-78,7
29,925	-75,5	-75,6	-75,5	-75,5	-75,5	-75,5	-75,6
19,95	-61,44	-61,4	-61,4	-61,3	-61,3	-61,2	-61,2
9,975	-36,28	-36,2	-36,2	-36,1	-36,1	-36,0	-36,0

На рис. 4 наведено лише вертикальні зміщення, оскільки горизонтальні значно менші. Числові значення зміщень у заданих вузлах, наведені в таблицях і на рисунку, вимірюються в міліметрах.

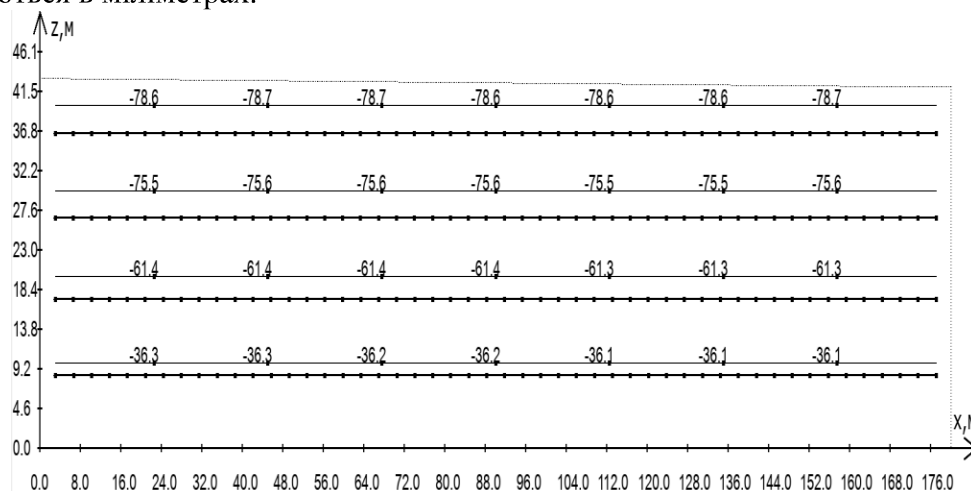


Рис. 4. Значення вертикальних зміщень при осушенні ґрунтового масиву

Висновок. На основі математичного моделювання встановлено вертикальні зміщення природного ґрунтового схилу після його осушення. Отримані результати дозволяють уточнити проектні відмітки при зведенні напірних водоводів і будівлі ГАЕС. Результатом подальших досліджень може бути встановлення деформацій огорожувальних споруд верхньої водойми цієї ГАЕС.

Література

- 1 Кузло, М.Т. Моделювання напружено-деформованого стану ґрунтових масивів при пониженні рівня ґрунтових вод / М.Т. Кузло // Світ геотехніки. – 2011. 2(30). – С. 12 – 14.
2. Кузло, М.Т. Моделювання вертикальних зміщень ґрунтового масиву в процесі його осушення / М.Т. Кузло // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. – Вип. 87 – К.: 2013. – С. 49 – 55.
3. Власюк, А.П. Математичне моделювання напружено-деформованого стану водонасиченого ґрунтового масиву у процесі його осушення / А.П. Власюк, М.Т. Кузло, І.О. Кушнір // Вісник НУВГП: зб. наук. праць. – Вип. 4(56) – Рівне, 2011. – С.190 – 204.
4. Сергиенко, И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека.– К., 1991. – 432 с.
5. Власюк, А.П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с «плавающими» узлами / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук.– К., 1989. – 55 с.
6. Thompson, J.F. Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies / J.F. Thompson, Z.U.A. Warsi, C.W. Mastin // J. Comp. Phys.– 1974. – №15. – P. 299 – 319.

Надійшла до редакції 23.09.2013

© М.Т. Кузло