

*С.Г. Кушнер, к.т.н., научный консультант  
Украинский государственный институт азотной промышленности  
и продуктов органического синтеза (УкрГИАП)  
Украинский государственный институт азотной промышленности,  
г. Днепродзержинск, Украина, г. Тюбинген, Германия*

## **КОМПОНЕНТЫ НАПРЯЖЕНИЙ В ОСНОВАНИИ ПОЛОСЫ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ ОТ НАГРУЗКИ, РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ЗАКОНУ ТРЕУГОЛЬНИКА**

*Полученные формулы, определяющие нормальные и касательные напряжения от треугольной нагрузки, могут использоваться для решения упруго-пластических задач, в том числе определения главных напряжений, составления условий прочности и решения других проблем за пределом упругости.*

**Ключевые слова:** *нормальные напряжения, касательные напряжения, основание, треугольная нагрузка.*

*С.Г. Кушнер, к.т.н., науковий консультант  
Український державний інститут азотної промисловості та  
продуктів органічного синтезу (УкрДІАП)  
Український державний інститут азотної промисловості,  
м. Дніпродзержинськ, Україна, м. Тюбінген, Німеччина*

## **КОМПОНЕНТИ НАПРУГ В ОСНОВІ ПОЛОСИ НАПІВБЕЗКІНЕЧНОГО ПРОТЯГУ ВІД НАВАНТАЖЕННЯ, РОЗПОДІЛЕНОГО ЗА ЗАКОНОМ ТРИКУТНИКА**

*Знайдені формули, які визначають нормальні та дотичні напруги від трикутного навантаження, можуть використовуватися для розв'язання пружно-пластичних задач, у тому числі визначення головних напруг, складання умов міцності й розв'язання інших проблем за межами пружності.*

**Ключові слова:** *нормальні напруги, дотичні напруги, основа, трикутне навантаження.*

*S.G. Kushner, Dr-Ing., scientific consultant  
Ukrainian State Institute of Nitrogen Industry and Organic Synthesis  
Ukrainian State Institute of Nitric Industry, Dneprodzerzhinsk, Ukraine, Tübingen, Germany*

## **COMPONENTS OF STRESSES IN THE BASEMENT OF SEMI- INFINITE EXTENT STRIP FROM THE LOAD SPREAD ACCORDING TO THE TRIANGLE LAW**

*The obtained formulas which determine normal and tangential stresses can be used to solve elastic-plastic problems including finding the main stresses getting of conditions of strength and solving other problems beyond the limit of elasticity from triangle load.*

**Keywords:** *normal stresses, tangential stresses, basement, triangle load.*

**Введение.** Известные решения, определяющие напряжения в упругой полуплоскости или упругом полупространстве от нагрузки, приложенной к прямолинейной границе полуплоскости или к граничной плоскости полупространства, содержат все три компонента напряжений

(сосредоточенная сила [1], равномерная [2, 3] и треугольная нагрузка [4] на полосе бесконечной длины), в пространственной задаче – шесть компонентов (сосредоточенная сила [5], равномерная нагрузка на полосе полубесконечной длины [6 – 8], равномерная и треугольная нагрузка на прямоугольной площади [9]).

Для треугольной нагрузки на полосе полубесконечной протяженности найдены только значения вертикальных нормальных напряжений  $\sigma_{z\Delta, str}$  [6, 8]. Как видим, для этой нагрузки решение является неполным, что исключает возможность решения ряда упруго-пластических задач.

**Обзор последних источников исследований и публикаций.** Как отмечалось в работе [10], напряжения в основаниях ленточных фундаментов, насыпей под пути, дамб, земляных плотин и других протяженных сооружений, ограниченных с одной стороны, по действующим нормативным документам определяют на основании решений Митчела – Колосова [2, 3] и Н.М. Герсеванова [4] для полосы бесконечной длины (плоская задача), расположенной на поверхности полупространства.

В торце полосы полубесконечной длины напряжения в ее основании равны половине напряжений под полосой бесконечной длины и постепенно, по мере удаления от торца, возрастают до напряжений, отвечающих бесконечной длине. Использование этих результатов позволяет получить более экономичные решения и точнее учесть влияние полосовой нагрузки на сооружения, к которым она примыкает.

Полученные в работах [6, 7, 8] решения позволяют определять напряженное состояние в основании полосы полубесконечной протяженности (универсальная пространственная задача), в том числе находить: 1) все компоненты напряжений от вертикальной нагрузки, распределенной равномерно; 2) вертикальные нормальные напряжения  $\sigma_{z\Delta, str}$  от нагрузки, распределенной по закону треугольника.

Сочетание решений для равномерной и треугольной нагрузок (трапецидальная нагрузка) позволяет вычислять напряжения в основании протяженных насыпей и других протяженных сооружений.

**Выделение не решенных ранее частей общей проблемы.** Как видим, задача, определяющая напряжения в основании полосы полубесконечной длины, загруженной треугольной нагрузкой, решена не полностью (неизвестны все другие компоненты напряжений, кроме вертикальных).

Знание всех компонентов напряжений необходимо для решения упруго-пластических задач [8, 11], в том числе для: 1) определения главных напряжений (в основном максимальных и минимальных); 2) установления наклона главных площадок, по которым действуют главные напряжения; 3) составления на основании уравнения Кулона – Мора условия прочности, выраженного как через компоненты напряжений, параллельные осям координат, так и через главные напряжения.

Наличие известных главных напряжений позволяет устанавливать условия пластичности (предельного состояния) Теска – Сен-Венана, Губера – Мизеса, Мизеса – Боткина и находить главные касательные напряжения и октаэдрические касательные напряжения, играющие важную роль в определении предела прочности материалов, в том числе грунтов (установлении момента перехода в пластическое состояние), а также находить интенсивность нормальных напряжений.

**Цель работы** – определение всех компонентов напряжений в основании полосы полубесконечной длины, вызванных нагрузкой, распределенной по закону треугольника.

**Основной материал исследования и результаты.** Компоненты напряжений в основании полосы полубесконечной протяженности, нагруженной треугольной нагрузкой. Компоненты напряжений будем искать, как это показано в работе [11], на основании решения В.Г. Короткина [9] для так же нагруженного прямоугольного фундамента.

В нашем решении, определяющем напряжения  $\sigma_{z\Delta, str}$  в основании полосы полубесконечной протяженности (далее, по возможности, под полосой), нулевые ординаты треугольной нагрузки расположены слева (рис. 1, а), а в решении [9] – справа (рис. 1, б).

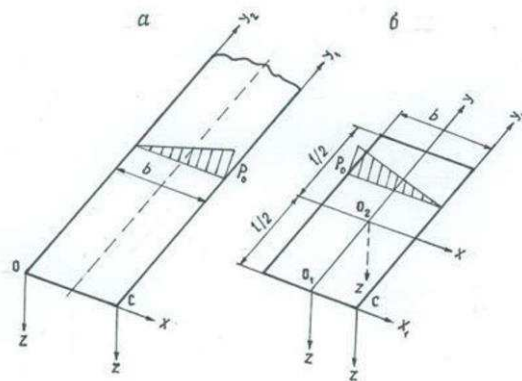


Рис. 1. Схемы нагружения ленточного (полоса) и прямоугольного фундаментов:  
а – полоса полубесконечной длины; б – прямоугольный фундамент

Поэтому для определения компонентов напряжений под полосой, нагруженной треугольной нагрузкой, начало координат в решении [9] для прямоугольного фундамента первоначально переносится из его центра (точка  $O_2$ ) в точку  $O_1$ , лежащую на той же оси  $y$  в торце фундамента, а затем в угловую точку  $C$  (ось  $y_1$ ) или сразу же в точку  $C$  (рис.1, б). При этом используются подстановки  $y = y_1 - l/2$  и  $x = x_1 + b/2$ , где  $y$  и  $x$  и  $y_1$  и  $x_1$  соответственно старые и новые координаты. Затем находится предел этого выражения при  $l \rightarrow \infty$ , т.е. искомое напряжение в основании полосы с началом координат в упомянутой точке  $C$ . Окончательное решение получаем путем разворота нагрузки на  $180^\circ$ , т. е. переноса начала координат из точки  $C$  в точку  $O$  за счет изменения знаков при координатах  $x$  на

обратные (рис.1, а). В окончательных решениях для полосы индексы «1» и «2», относящиеся к новым осям  $x_1$ ,  $y_1$  и  $y_2$ , опускаем.

Так мы получили значения компонентов касательных напряжений  $\tau_{xy\Delta, str}$ ,  $\tau_{yz\Delta, str}$  и  $\tau_{zx\Delta, str}$ , а также нормальных напряжений  $\sigma_{x\Delta, str}$  и  $\sigma_{y\Delta, str}$ .

Ниже приводятся значения перечисленных компонентов напряжений. Графики распределения этих компонентов напряжений, построенные на основании численных примеров, приведены на рис. 2.

**Касательные напряжения  $\tau_{yz\Delta, str}$ .** В качестве примера приведем наиболее простую формулу. На основании [9, формулы (26) и (15)] в результате выполненных преобразований (переноса начала координат в точку С (рис. 1, б) и нахождения предела преобразованного выражения при  $l \rightarrow \infty$  получаем

$$\tau_{yz\Delta, str} = \frac{p_0 z^2}{2\pi b} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x+b)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x}{y^2 + z^2} \left[ -\frac{x+b}{\sqrt{(x+b)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] \right\}. \quad (1)$$

Поворачивая нагрузку на  $180^\circ$  и меняя знаки при  $x$  на обратные, окончательно находим (рис. 1, а)

$$\tau_{yz\Delta, str} = \frac{p_0}{2\pi} \frac{z^2}{b} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2}} \left[ 1 + \frac{x(x-b)}{y^2 + z^2} \right] - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \left[ 1 + \frac{x^2}{y^2 + z^2} \right] \right\}. \quad (2)$$

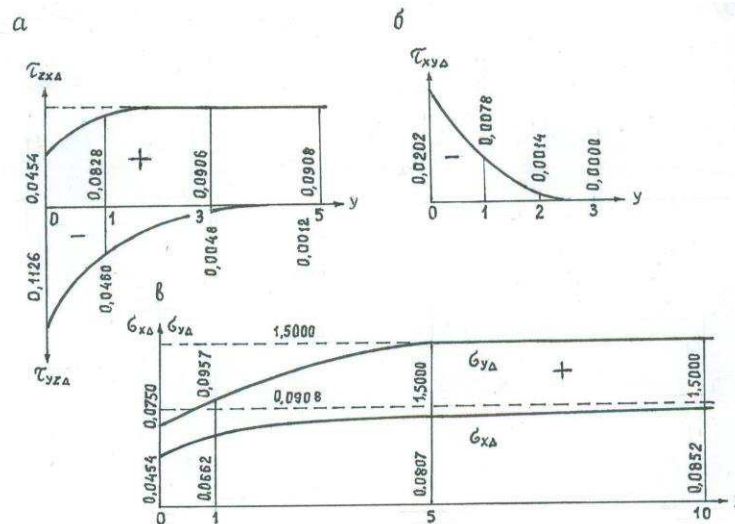


Рис. 2. Графики изменения компонентов напряжений под полосой полубесконечной протяженности, нагруженной треугольной нагрузкой, построенные на основе выполненных численных примеров: а – напряжения  $\tau_{zx\Delta, str}$  и  $\tau_{yz\Delta, str}$ ;

б – напряжения  $\tau_{xy\Delta, str}$ ; в – напряжения  $\sigma_{x\Delta, str}$  и  $\sigma_{y\Delta, str}$

В целях упрощения формулы (2) и формул, определяющих другие компоненты напряжений, при их выводе производились преобразования и сокращения подобных членов. Поэтому в окончательных решениях, как

правило, не всегда представляется возможным выделить части, учитывающие в отдельности равномерную и треугольную нагрузки.

При раскрытии формул из работы [9] для прямоугольного фундамента, учитывающих отдельно эти виды нагрузок, имеют место сокращения подобных членов. Формула (2) и другие полученные нами формулы дальнейших сокращений не требуют.

Далее будет приводиться только окончательная формула.

**Касательные напряжения  $\tau_{zx\Delta, str}$ .** Из работы [9, формулы (27) и (16)] находим напряжения  $\tau_{zx\Delta, str}$ . Они выражаются формулой (формулы, занимающие не более двух строк, приводятся без сокращающих обозначений)

$$\tau_{zx\Delta, str} = -\frac{p_0}{2\pi} \left\{ \frac{z^2}{(x-b)^2 + z^2} + \frac{yz^2}{[(x-b)^2 + z^2] \sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z}{b} \left[ \operatorname{arctg} \frac{x-b}{z} - \operatorname{arctg} \frac{x}{z} - \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{arctg} \frac{(x-b)y}{z \sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{xy}{z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] \right\}. \quad (3)$$

Формуле (3) отвечает полоса с началом координат в точке  $O$  – рис. 1,  $a$  (этот рисунок относится и ко всем остальным компонентам напряжений, простирающаяся от  $y=0$  до  $y \rightarrow \infty$ ). Прибавив к ней выражение, определяемое такой же формулой, но с обратными знаками при  $y$ , отвечающее полосе, простирающейся от  $y=0$  до  $y \rightarrow -\infty$ , получим решение для полосы бесконечной протяженности  $-\infty \leq y \leq \infty$  (плоская задача) в виде

$$\tau_{zx\Delta, strG} = -\frac{p_0}{\pi} \left\{ \frac{z^2}{(x-b)^2 + z^2} + \frac{z}{b} \left[ \operatorname{arctg} \frac{x-b}{z} - \operatorname{arctg} \frac{x}{z} \right] \right\}, \quad (4)$$

что по абсолютной величине соответствует решению Н.М. Герсеванова [4]. Знак «-» обусловлен наличием опечаток в работе [9]. При изменении знаков на обратные в третьем и четвертом членах исходных формул (27) и (16) в формуле (4) получаем знак «+».

Как видим, в плоской задаче напряжения  $\tau_{zx\Delta, strG}$  не зависят от координаты  $y$ , постоянны в каждом сечении на всем протяжении бесконечной полосы.

**Касательные напряжения  $\tau_{xy\Delta, str}$ .** Касательные напряжения  $\tau_{xy\Delta, str}$  находим на основании формул (28) и (17) из работы [9].

Формула, определяющая напряжения  $\tau_{xy\Delta, str}$ , автором найдена после устранения явной опечатки в работе [9, формула (28)] путем изменения знака «-» на «+» перед слагаемым  $(y-l/2)^2$  в подкоренном выражении шестого члена.

Для сокращения записи формул, определяющих касательные напряжения  $\tau_{xy\Delta, str}$  и нормальные напряжения  $\sigma_{x\Delta, str}$  и  $\sigma_{y\Delta, str}$ , введем следующие обозначения:

$$m_1 = x - b, \quad m_2 = x, \quad R_1 = \sqrt{m_1^2 + y^2 + z^2}, \quad R_2 = \sqrt{m_2^2 + y^2 + z^2}.$$

С учетом принятых обозначений касательные напряжения  $\tau_{xy\Delta, str}$  определяются выражением

$$\tau_{xy, str} = \frac{p_0}{2\pi b} \left\{ \frac{bz}{R_1} + z \ln \frac{R_2 - m_2}{R_1 - m_1} - (1 - 2\nu) \left[ z \ln \frac{R_1 - m_1}{R_2 - m_2} - m_2 \ln \frac{R_1 + z}{R_2 + z} - b + y \left( -\operatorname{arctg} \frac{m_i}{y} + \operatorname{arctg} \frac{m_i z}{y R_i} \right) \right] \right\}. \quad (5)$$

Для раскрытия выражения, содержащегося в угловых скобках, используется формула

$$F_i(m_i) = F_1(m_1) - F_2(m_2). \quad (6)$$

Принятые здесь обозначения  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $R_1$  и  $R_2$ , а также выражение (6) используются во всех последующих формулах.

Как следует из статьи [12], в формулах для равномерно загруженной полосы полубесконечной протяженности, как полученных в работе [7], так и основанных на решении, изложенном в статье [9], члены, зависящие от коэффициента  $(1 - 2\nu)$ , идентичны. Здесь эти члены приняты на основе работы [9], а при решении численных примеров использовались оба решения.

#### Исследование касательных напряжений:

**а) численный анализ.** Задавшись условными безразмерными значениями ширины полосы и координат на вертикалях, проведенных через точки, лежащие на геометрической оси полосы, получаем значения напряжений  $\tau_{yz\Delta, str}$ ,  $\tau_{zx\Delta, str}$  и  $\tau_{xy\Delta, str}$ , приведенные в табл. 1 и на графиках (рис. 2, а и б).

**Таблица 1. Значения напряжений  $\tau_{yz\Delta, str}$ ,  $\tau_{zx\Delta, str}$  и  $\tau_{xy\Delta, str}$**

Координаты	$x = z = 1$				
	$Y$	$b/2 = 1$	$b = 2$	$1,5b = 3$	$2,5b = 5$
Напряжения в долях от $p_0$					
$\tau_{yz\Delta, str}$	-0,1126	-0,0460	-	-0,0048	-0,0012
$\tau_{zx\Delta, str}$	0,0454	0,0828	-	0,0906	0,0908
$\tau_{xy\Delta, str}$	-0,0202	-0,0078	-0,0014	0,0000	-

**Примечание.** Точность вычислений до 4-х знаков после запятой, за исключением значения  $\tau_{xy\Delta, str}$  при  $(y = 3)$ . В этом случае точность вычислений увеличена до 10 знаков (округление до первого значащего знака дает  $-0,000007$ ), чтобы показать, что, убывая, напряжения  $\tau_{xy\Delta, str}$  остаются отрицательными.

Из табл. 1, полученных формул и графиков следует, что: 1) в основании полосы бесконечной длины (плоская задача) касательные напряжения  $\tau_{yz\Delta, str}$  и  $\tau_{xy\Delta, str}$  отсутствуют; 2) в основании полосы полубесконечной длины (пространственная задача) эти напряжения возникают за счет влияния

свободного торца, причем в торце ( $y=0$ ) они максимальны и практически затухают на расстоянии  $y \leq 2,5b$  от него; 3) напряжения  $\tau_{zx\Delta, str}$ , возникающие под полубесконечной полосой, у ее торца ( $y=0$ ) равны половине напряжений под полосой бесконечной длины и достигают значений этих напряжений примерно на расстоянии  $y \cong 2,5b$ ;

**б) исследование на бесконечности.** При  $x \rightarrow \infty$  или  $y \rightarrow \infty$ , либо  $z \rightarrow \infty$  напряжения  $\tau_{yz\Delta, str}$  и  $\tau_{xy\Delta, str}$  равны нулю. Напряжения  $\tau_{zx\Delta, str}$  при  $x \rightarrow \infty$  или  $z \rightarrow \infty$  равны нулю, а при  $y \rightarrow \infty$  приобретают значение, отвечающее плоской задаче (решению Герсеванова). Это вполне объяснимо, так как полоса полубесконечной протяженности отвечает условию  $0 \leq y \leq \infty$ , а уже на небольшом расстоянии от торца напряжения  $\tau_{zx\Delta, str}$  соответствуют решению плоской задачи. При  $y \rightarrow -\infty$   $\tau_{zx\Delta, str} = 0$ .

**Нормальные напряжения  $\sigma_{x\Delta, str}$ .** Определяя касательные напряжения  $\tau_{zx\Delta, str}$  в основании полосы полубесконечной протяженности, мы убедились в правильности найденного решения, осуществив переход к полосе бесконечной длины и получив при этом решение Герсеванова.

Таким же путем, после исправления опечаток в статье [9, формула (23)], где перед членами 3, 4 знаки меняются на обратные, а в подкоренном выражении члена 7 должно быть  $(y+a)^2$ , находим нормальные напряжения  $\sigma_{x\Delta, str}$ . Они представляются формулой

$$\sigma_{x\Delta, str} = \frac{p_0}{2\pi b} \left[ 2z \ln \frac{R_1 + y}{R_2 + y} + \frac{m_1 bz}{m_1^2 + z^2} \left( 1 + \frac{y}{R_1} \right) - (1 - 2\nu) y \ln \frac{R_1 + z}{R_2 + z} - m_2 \left( \arctg \frac{m_i}{z} + \arctg \frac{m_i y}{z R_i} \right)_{m_2}^{m_1} + (1 - 2\nu) m_2 \left( \arctg \frac{m_i}{y} - \arctg \frac{m_i z}{y R_i} \right)_{m_2}^{m_1} \right]. \quad (7)$$

Для перехода от формулы (7) к формуле, выражающей напряжения  $\sigma_x$  в основании полосы бесконечной протяженности, поступаем так же, как и при выводе формулы (4). При этом находим

$$\sigma_{x\Delta, strG} = \frac{p_0}{\pi} \left[ \frac{z}{b} \ln \frac{(x-b)^2 + z^2}{x^2 + z^2} - \frac{x}{b} \left( \arctg \frac{x-b}{z} - \arctg \frac{x}{z} \right) + \frac{(x-b)z}{(x-b)^2 + z^2} \right], \quad (8)$$

что также полностью соответствует решению Н.М. Герсеванова [4].

**Нормальные напряжения  $\sigma_{y\Delta, str}$ .** Здесь так же, как и в предыдущих случаях, находим нормальные напряжения  $\sigma_{y\Delta, str}$  после исправления опечаток в работе [9, формула (24)], где перед членами 7, 8 и перед первым коэффициентом  $(1-2\nu)$  знаки меняются на обратные. Эти напряжения определяются формулой

$$\sigma_{y\Delta, str} = \frac{p_0}{2\pi b} \left\{ z \ln \frac{y+R_1}{y+R_2} - (1-2\nu) \left[ y \ln \frac{z+R_1}{z+R_2} + z \ln \frac{y+R_1}{y+R_2} \right] + m_2 \left[ \frac{yz}{m_2 R_i} + \frac{m_i yz}{(y^2+z^2)R_i} - \right. \right. \\ \left. \left. - \arctg \frac{m_i}{z} - \arctg \frac{m_i y}{z R_i} + (1-2\nu) \left( -\arctg \frac{m_i}{y} + \arctg \frac{m_i}{z} + \frac{m_i R_i}{yz} \right) \right]^{m_1} \right\}. \quad (9)$$

Переходя к полосе бесконечной протяженности, получаем

$$\sigma_{y\Delta, strK} = \frac{p_0}{\pi b} \nu \left[ z \ln \frac{(x-b)^2 + z^2}{x^2 + z^2} + 2x \left( -\arctg \frac{x-b}{z} + \arctg \frac{x}{z} \right) \right]. \quad (10)$$

В формуле (10) выражение в круглых скобках, следующее за коэффициентом  $2x$ , с учетом коэффициента перед квадратной скобкой полностью соответствует решению, полученному в работе [7] для равномерно нагруженной полосы бесконечной протяженности, но при расположении начала координат не на центральной оси полосы, а в угловой точке  $O$  (рис. 1, а). Заметим, что в условиях плоской деформации  $\varepsilon_y = 0$ , напряжения  $\sigma_{y\Delta, strK}$  остаются постоянными при движении вдоль оси  $y$  и в расчетах не учитываются.

Выражение (10) можно получить также из обобщенного закона Гука. При  $\varepsilon_y = 0$  получаем

$$\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z). \quad (11)$$

Подставляя в формулу (11) значения напряжений для плоской деформации  $\sigma_x$  из формулы (8) и  $\sigma_z$  из работы [8, формула Герсеванова – (3.39)], получаем результат, в точности совпадающий с формулой (10).

#### **Исследование нормальных напряжений:**

**а) численный анализ.** Как и в предыдущем случае, задавшись условными безразмерными значениями ширины полосы и координат, на вертикалях, проведенных через точки, лежащие на геометрической оси полосы, получаем значения  $\sigma_{x\Delta, str}$  и  $\sigma_{y\Delta, str}$ , приведенные в табл. 2 и на графике (рис. 2, в).

**Таблица 2. Значения  $\sigma_{x\Delta, str}$  и  $\sigma_{y\Delta, str}$**

Координаты $x = z = 1$	Бесконечная полоса	Полубесконечная полоса, $b = 2, \nu = 0,3$ $0 \leq y \leq \infty$				
		0	1	5	10	15/20
$y$	$-\infty \leq y \leq \infty$					
Напряжения в долях от $p_0$						
$\sigma_{x\Delta, strG}$	0,0908= =const	-	-	-	-	-
$\sigma_{x\Delta, str}$	-	0,0454	0,0662	0,0807	0,0852	0,0874/-
$\sigma_{y\Delta, strK}$	0,1500= =const	-	-	-	-	-
$\sigma_{y\Delta, str}$	-	0,0750	0,0957	$\frac{0,1500}{0,1524}$	$\frac{0,1500}{0,1535}$	$-\frac{0,1500}{0,1525}$



Как видим, значения всех компонентов напряжений в торце полубесконечной полосы равны половине значений тех же напряжений под бесконечной полосой. Далее они быстро ( $\sigma_{y\Delta, str}$ ) или медленно ( $\sigma_{x\Delta, str}$ ) возрастают, асимптотически приближаясь к напряжениям под бесконечной полосой. Погрешность вычислений значений  $\sigma_{y\Delta, str}$  с точностью до девяти знаков после запятой (см. результаты в табл. 2 под горизонтальной чертой, приведенные с округлением до 4-х знаков) составила от 1,6 до 2,3%. Такая же погрешность имеет место и при вычислении напряжений  $\sigma_{y\Delta, str}$  в основании полубесконечной полосы, загруженной равномерно;

**б) исследование на бесконечности.** Анализ показывает, что при  $x \rightarrow \infty$  и  $z \rightarrow \infty$  напряжения  $\sigma_{x\Delta, str} = 0$  и  $\sigma_{y\Delta, str} = 0$ . Как видно из табл. 2 и из графика, при  $y \rightarrow \infty$ , т. е. при удалении от торца полосы, напряжения  $\sigma_{x\Delta, str}$  и  $\sigma_{y\Delta, str}$  постепенно принимают постоянные значения, равные напряжениям под полосой бесконечной длины.

Значения вертикальных нормальных напряжений  $\sigma_{z\Delta, str}$  опубликованы в работах [7, 8, 10] и здесь не приводятся.

**Выводы.** Полученные в данной статье результаты, отвечающие треугольной нагрузке, а также значения, приведенные в работах [6, 7, 8], позволяют: 1) решать при известных значениях всех компонентов напряжений упруго-пластические задачи; 2) находить решения, определяющие напряжения в основании полосы полубесконечной протяженности, по известным решениям для любых видов нагрузки, действующих на прямоугольный гибкий фундамент, и, наоборот, решать задачи для прямоугольных фундаментов по известным решениям для полосы; 3) определять компоненты напряжений в основаниях насыпей трапецеидальной формы; 4) точнее учитывать воздействие компонентов напряжений от примыкающих насыпей на основания устоев мостов, путепроводов, начальных участков плотин и других сооружений; 5) в некоторых случаях использовать найденные решения для определения горизонтального давления на подпорные сооружения на основе теории упругости; 6) устранить опечатки в работе [9].

#### Литература

1. Flamant. *Comptes rendus*. – Т. 114. – Paris, 1892. – 52 p.
2. Michell, J.H. *Proc. London Math. Soc.* – V. 34, 1902. – 70 p.
3. Колосов, Г.В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче теории упругости / Г.В. Колосов. – М.: ГТТИ, 1935. – 50 с.
4. Герсеванов, Н.М. Обиций метод теории упругости. Определение напряжений в грунте при заданной нагрузке на поверхности / Н.М. Герсеванов // Тр. ВИОС. Основания и фундаменты. Сборник № 1. – М. – Л.: Госстройиздат, 1933. – С. 16 – 38.
5. Boussinesq, J. *Application des Potentiels a l' E'tude de l' Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques* / J. Boussinesq. – Paris: Gauthierviblard, 1885. – 150 p.
6. Кушнер, С.Г. Напряженное состояние оснований фундаментов от воздействия нагрузок на поверхности / С.Г. Кушнер, В.Я. Хаин // ОФимГ. – 1996. – № 1. – С. 5 – 9.

7. Кушнер, С.Г. Компоненты напряжений в основании полосы полубесконечной протяженности, нагруженной вертикальной равномерной нагрузкой / С.Г. Кушнер, В.Я. Хаин // *ОФиМГ.* – 1999. – № 3. – С. 2 – 5.

8. Кушнер, С.Г. Расчет деформаций оснований зданий и сооружений / С.Г. Кушнер. – Запорожье, 2008. – 490 с.

9. Короткин, В.Г. Объемная задача для упруго-изотропного полупространства / В.Г. Короткин // *Сб. Гидропроекта №4.* – Л.-М.: ГОНТИ, 1938. – С. 52–83.

10. Кушнер, С.Г. Совершенствование нормативных документов – гарантия повышения качества проектирования и строительства / С.Г. Кушнер // *Збірник наук. праць (галузеve машинобудування, будівництво).* Вип. 4 (34). – Т. 1. – Полтава: ПолтНТУ, 2012. – С. 154–164.

11. Безухов, Н.И. Теория упругости, пластичности и ползучести / Н.И. Безухов. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.

12. Кушнер, С.Г. Напряженное состояние в основании гибкого прямоугольного фундамента под вертикальной нагрузкой / С.Г. Кушнер // *ОФиМГ.* – 2010. – № 6. – С. 2 – 7.

*Надійшла до редакції 23.09.2013*

*© С.Г. Кушнер*