

УДК 624.042.1

*О.І. Валовой, к.т.н., професор  
О.Ю. Єрьоменко, к.т.н., доцент  
М.О. Валовой, к.т.н, ст. викладач  
ДВНЗ «Криворізький національний університет»*

## **КРИТЕРІЇ МІЦНОСТІ БЕТОНУ ДЛЯ ЗАГАЛЬНОГО ВИПАДКУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ**

*Наведено існуючі теорії щодо визначення критерію міцності бетону. Розглянуто експериментальний спосіб визначення критерію міцності бетону для будь-якого випадку напруженого стану. Порівняно теоретичні та експериментальні дані.*

**Ключеві слова:** *міцність, напружений стан, теорія.*

УДК 624.042.1

*А.І. Валовой, к.т.н., професор  
А.Ю. Ерёмєнко, к.т.н., доцент  
М.А. Валовой, к.т.н, ст. преподаватель  
ГВУЗ «Криворожский национальный университет*

## **КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ БЕТОНА ДЛЯ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ**

*Приведены существующие теории по определению критерия прочности бетона. Рассмотрен экспериментальный способ определения критерия прочности бетона для любого случая напряжённого состояния. Сравнены теоретические и экспериментальные данные.*

**Ключевые слова:** *прочность, напряженное состояние, теория.*

UDC 624.042.1

*A.I. Valovoj, PhD, Professor  
A.U. Eremenko, PhD, Associate Professor  
M.A. Valovoj, PhD, senior lecturer  
Kryvyi Rih National University*

## **THE CRITERIA FOR THE OVERALL STRENGTH OF THE CONCRETE CASE OF THE STRESS STATE**

*Given the existing theory, by definition, the criterion of concrete strength. An experimental method for determining the strength of the concrete criterion for any occasion stressed state. Made a comparison of theoretical and experimental data.*

**Keywords:** *strength, stress state, the theory.*

**Вступ.** При зростанні навантаження на конструкцію збільшуються напруження за обсягом її матеріалу. При певних значеннях цих напружень можливий перехід матеріалу (бетону) в стан крихкого руйнування з розподілом на окремі частини або перехід на спадну гілку деформування з поступовим руйнуванням після певного критичного накопичення ушкоджень. Останній випадок руйнування передбачає можливість перерозподілу зусиль з ослабленої ділянки на її оточення.

Критерії, які дозволяють визначити виникнення згадуваних критичних випадків при плоскому та об'ємному напруженому станах, називають критеріями міцності. Порушення умов міцності навколо довільної точки може не призводити до руйнування конструкції в цілому. Сучасні методи дозволяють відстежувати виключення матеріалу навколо точок або їх перехід на спадну гілку деформування – і так до певного максимального значення навантаження, що прикладається, при якому цей прогресуючий процес накопичення ушкоджень призводить до повного руйнування конструкції. У таких розрахунках критерії міцності виступають як складова частина розрахункового алгоритму, вказуючи на перехід матеріалу окремих елементів у стан руйнування чи пластичної чи псевдопластичної течії.

**Огляд останніх джерел досліджень і публікацій.** Розвиток критеріїв міцності стосовно бетону як конструкційного матеріалу має досить багату історію. Її налічують, по-перше, так звані «класичні теорії міцності». Аналіз останніх цікавий з точки зору розкриття механізмів руйнування бетону, які було з'ясовано в результаті такого аналізу. Надалі механізм руйнування приділялося мало уваги.

Докладний аналіз придатності різноманітних класичних теорій міцності до бетону на основі експериментальних даних різних дослідників висвітлені в роботах [1, 2]. При цьому, якщо відносно неможливості застосування до бетону перших чотирьох теорій було сформовано сталу думку, то стосовно теорії Мора єдності не існує. Так, А.А. Гвоздев у роботі [1] довів, що теорію Мора в модифікованому вигляді можна вдало використовувати.

Намагання доопрацювати теорію Мора призвели до виникнення критеріїв міцності, представлених у вигляді поверхонь обертання. Еліпсоїди обертання Шлейхера, Бужинського, параболоїд П.П. Баландіна, круговий конус І.Н. Миролубова встановлювалися, виходячи з певних енергетичних підходів. У цих апроксимаціях ураховується вплив проміжного напруження  $\sigma_2$  на міцність і тим ліквідується один із недоліків критерію Мора. Надалі фізична трактовка явищ стала відступати на другий план [2].

Механічні теорії отримали розвиток у роботах А.І. Боткіна, А.М. Василькова, А. Фрейденталя, Л.К. Лукши та інших. У міру накопичення експериментальних досліджень почали виявлятися недоліки

двоваріантних критеріїв у тих чи інших областях напруженого стану [2], що зменшило до них цікавість.

Певні сучасні напрями розвитку критеріїв міцності були пов'язані з модифікацією критерію міцності у вигляді поверхні обертання та розвитком інших ідей з удосконалення підходів Мора – Надаї. Узагальнюючи сучасні напрями вдосконалення критеріїв міцності бетону, можна помітити, що вони зводяться до визначення тих чи інших функціональних залежностей між трьома інваріантами: першим інваріантом тензора напружень ( $I_1$ ), і другим ( $D_2$ ) та третім ( $D_3$ ) інваріантами девіатора напружень,  $F(I_1, D_2, D_3) = 0$ .

Такі критерії набагато краще співвідносилися з даними дослідів, ніж двоваріантні. У наслідок цього можна припустити, що трьома інваріантами ( $I_1, D_2, D_3$ ) відображено різні механізми руйнування бетону: від відриву, від зсуву та змішані відривно-зсувні. Можливості двоваріантних критеріїв у цьому сенсі виявилися більш обмеженими.

У феноменологічних теоріях міцності вид руйнування прогнозується шляхом уведення в критерії певних інваріантів. При цьому природним є прагнення дослідників підійти до проблеми міцності з певних фізичних позицій. Цікавість до фізичних побудов виникала періодично на всьому шляху розвитку проблеми міцності бетону і періодично відсувалася на другий план, ураховуючи її складність.

На сьогодні у зв'язку з розвитком обчислювальної техніки та методів розрахунку фізичні підходи можуть набути ваги. До них можна віднести скінченноелементні моделі бетону, об'ємно-структурну модель Ю.В. Зайцева, побудовану з позиції тріщин механіки руйнування, і теорію міцності бетону як певного статичного неоднорідного матеріалу зернистої структури при неодновісних напружених станах [3] та ін. До цікавих результатів може привести розроблення критеріїв міцності на основі теорії накопичення ушкоджень, а зокрема можуть трансформуватись уявлення про значимість тих чи інших критеріїв, які впливають на міцність неушкоджених частин бетону. На це вказують задовільні результати роботи [3], де як критерій руйнування статистично неоднорідної структури було прийнято критерій Надаї.

**Постановка завдання.** Метою дослідження був аналіз існуючих теорій, експериментальних відомостей стосовно критерію міцності бетону та визначення єдиного критерію міцності, який би охоплював усі види напруженого стану.

**Основний матеріал результати.** Можливість застосування тих чи інших з наведених вище критеріїв міцності залежить від умов навантаження зразка, що досліджується. Розрізняють такі умови навантаження: просторове навантаження зразків –  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  змінюються пропорційно одному параметру; активне напруження – жодне з головних напружень  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , за модулем, не зменшується; окремі складні випадки

навантаження. У перших двох випадках означені вище критерії можуть застосовуватися без змін. У певних випадках складного навантаження, яке не супроводжується значним розвантаженням, вони також можуть застосовуватися [4]. В усіх інших випадках питання про застосування критеріїв потребує дослідження.

У роботі [5] показано, що простіше будувати критерій міцності в координатах  $\sigma_1, \sigma_3, \mu_\sigma$ ,

$$f(\sigma_1, \sigma_3, \mu_\sigma, R_t) = 0 . \quad (1)$$

В основу побудови виразу (1) покладено характерну функцію міцності бетону і функцію слідів девіаторної кривої на плоских графіках двоосного стискання та розтягання.

У випадку стискання елемента напруженнями  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$  ( $\sigma_1 = \sigma_2$  – напруження бокового стискання) для визначення  $\sigma_3$ , яке б відповідало вичерпанню міцності зразка, зазвичай використовують умову

$$\sigma_3 = -R_{bc} + \beta_{II} \sigma_1 . \quad (2)$$

Остання умова за своєю суттю є умовою Кулона – Мора. У роботі [6] показано, що величина  $\beta_{II}$  залежить, переважно, від співвідношення  $\sigma_1 / \sigma_3$ . Увівши безрозмірні величини напружень та зробивши ряд перетворень, отримують новий запис умови (2)

$$\check{\sigma}_3 = \frac{1}{1 - \beta_{II} m} , \quad (3)$$

де

$$m = \check{\sigma}_1 / \check{\sigma}_3 , \quad \check{\sigma}_1 = -\sigma_1 / R_{bc} , \quad \check{\sigma}_2 = -\sigma_2 / R_{bc} , \quad \check{\sigma}_3 = -\sigma_3 / R_{bc} .$$

Якщо величина  $\beta_{II}$  стала, наприклад  $\beta_{II} = 4,1$ , тоді з умови (3) слідує, що при порівняно низьких співвідношеннях  $\sigma_1 / \sigma_3$  настає стан, коли матеріал не може бути зруйнованим ( $\sigma_3 \rightarrow \infty$ ). Останнє суперечить умові неперервності (2), а звідси і критерію Кулона–Мора в оцінюванні міцності матеріалу при високих рівнях нерівномірного стиснення. Тут цей критерій може на порядок і більше завищувати міцність. Як напевно, вказана неможливість руйнування може наступати лише в одному окремому випадку (для щільних бетонів) – у випадку тривісного рівномірного стискання (при  $\sigma_1 / \sigma_3 \rightarrow 1$ ). Використання залежності (3) для опису цього випадку можливе за умови, коли параметр  $\beta_{II}$  є змінним і прагне до одиниці при  $\sigma_1 / \sigma_3 \rightarrow 1$ .

Як показали досліди [6], вказаному граничному значенню  $\beta_{II} \rightarrow 1$  відповідає певна функція вигляду

$$\beta_{II} = \frac{1 + a - am}{b + (1 - b)m}, \quad (4)$$

де  $a, b$  – емпіричні коефіцієнти, які залежать від матеріалу.

Попередні дослідження показали, що функція (4) досить універсальна. Вона може бути застосована не тільки до бетону, а й до інших матеріалів, наприклад гірських порід, тому і має назву характерної.

Залежності (3), (4) належать до окремого випадку тривісного стискання  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ . Вираз (3) можна застосовувати до всіх випадків триосного стискання, якщо ввести в нього замість одиниці додаткову функцію  $k_c$ , тоді

$$\check{\sigma}_3 = k_c + \beta_{II} \sigma_1. \quad (5)$$

Функцію  $k_c$  визначають як відносну безрозмірну функцію зміни міцності бетону при двоосному стисканні.

Однак залежності (4), (5) мають певний недолік, оскільки вони не розповсюджуються на змішані напружені стани розтягання – стискання, на випадки чистого розтягання. У роботі [5] показано, що цей недолік можна нівелювати, прийнявши функцію  $\beta_{II}$  та параметр  $m$ , який входить до неї, у вигляді

$$\beta_{II} = \frac{1 + a - am}{b + (f - b)m}, \quad (6)$$

$$m = \frac{\check{\sigma}_1 + \delta_p}{\check{\sigma}_3 + \delta_p}, \quad (7)$$

де  $\delta_p$  – відносна функція зміни міцності бетону при двовісному стисканні.

Параметри  $k_c$  та  $\delta_p$  визначають [...] за формулами

$$k_c = 1 + \varphi_R = 1 + \varphi_{R(e)} \left\{ 1 - \left[ \frac{(1 - c)(1 - \mu_\sigma - 2e)}{2e + c(1 - \mu_\sigma - 2e)} \right]^2 \right\}, \quad (8)$$

де  $\varphi_R$  – приріст відносної міцності бетону при двовісному стисканні по відношенню до одновісного ( $\varphi_{R(e)}$  – максимальний приріст);  $e, c$  – геометричні параметри;

$$\delta_p = \delta_{p2} + (\delta_{p1} - \delta_{p2}) \times \left[ 1 - \frac{(\mu_\sigma^* - \mu_p^*)(\mu_\sigma^* + P)}{(1 - \mu_p^*)(1 + P)} \right], \quad (9)$$

де  $\mu_\sigma^*$  – параметр, який відрізняється від параметра Надаї – Лоде константою  $\Delta$  ( $\Delta \approx 0,25 R_{bt}$ ).

Від параметра  $f$ , який входить до виразу (6), залежить властивість критерію, а саме: чи буде поверхня замкнутою ( $f > 1$ ) чи з розривом ( $f < 1$ ) на ділянці всебічного рівномірного стискання. Функція (5) разом з (6) має назву характерної функції міцності бетону при об'ємному напруженому стані [4].

Загальну умову міцності можна отримати шляхом сумісного розгляду рівнянь (5–7), а саме [4]:

$$a_1 \bar{\sigma}_1^{1/2} + b \bar{\sigma}_3^{1/2} - \bar{\sigma}_1 [k_c (f - b) + \delta_p] - \bar{\sigma}_3 (k_c b - f \delta_p) - \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 (a + b + 1 - f) - k_c f \delta_p = 0, \quad (10)$$

В останньому виразі параметри  $b = \delta_p / [k_c - n \delta_p]$ ;  $a = nb$  ( $n$  – визначається за таблицею (2.1) [4]).

Параметр  $f$  для випадку тривісного рівномірного стискання можна знайти [4] за формулою

$$f = \frac{R_{bc3}}{R_{bc3} - k_c R_{bc}}, \quad (11)$$

де  $R_{bc3}$  – межа міцності бетону при тривісному рівномірному стисканні.

Умову (10) записана у відносних напруженнях. Цю ж умову можна записати у звичайному вигляді [4]

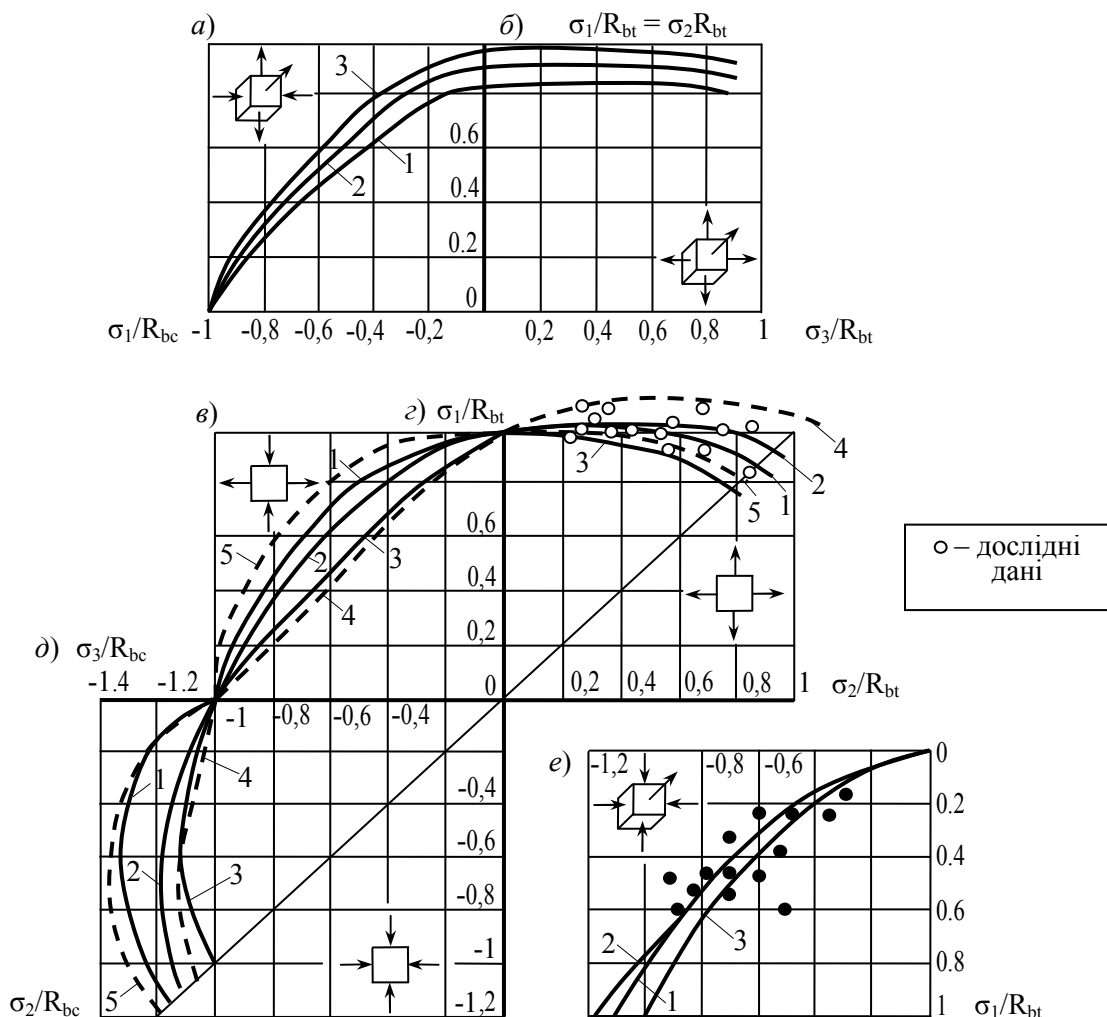
$$a \sigma_1^2 + b \sigma_3^2 + \sigma_1 [R_{bc} k_c (f - b) + \delta_p^* R_{bt}] + \sigma_3 (k_c b R_{bc} - f \delta_p^* R_{bt}) - \sigma_1 \sigma_3 (a + b + 1 - f) - k_c f \delta_p^* R_{bt} R_{bc} = 0. \quad (12)$$

де

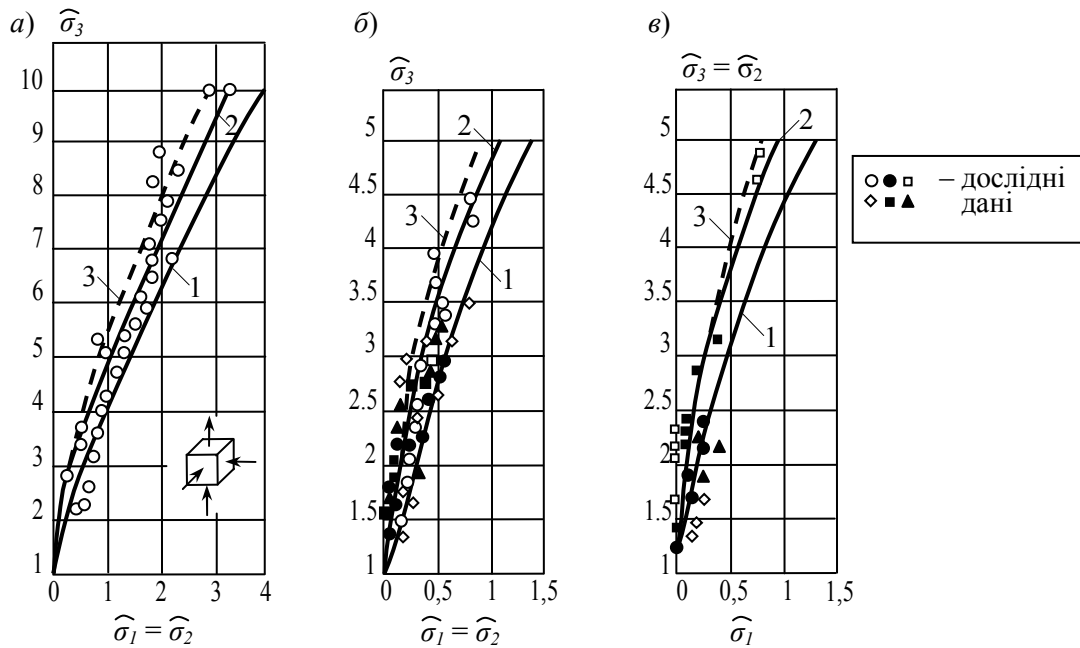
$$\delta_p^* = \delta_p / \delta_{p1} = \delta_p R_{bc} / R_{bt}.$$

**Висновки та напрям подальших досліджень.** Наведений критерій міцності добре співвідноситься з даними досліджень при різних напружених станах [4] (рис. 1 – 2).

На рис.1 зображено: *a* – двовісне однорідне розтягання ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ) зі стисканням по третьому напрямку; *б* – триосне розтягання ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ); *в* – розтягання зі стисканням ( $\sigma_2 = 0$ ); *г* – двовісне розтягання ( $\sigma_3 = 0$ ); *д* – двоосне стискання ( $\sigma_1 = 0$ ); *е* – двоосне однорідне стискання ( $\sigma_3 = \sigma_2$ ) з розтяганням за третім напрямком ( $\sigma_1 > 0$ ); 1 – графік побудований за теоретичною залежністю при  $R_{bc} = 10$  МПа ( $\delta_{p1} = 0.12$ ); 2 – те ж саме, при  $R_{bc} = 50$  МПа ( $\delta_{p1} = 0,06$ ); 3 – нижня межа ліній міцності при заданих нижніх величинах  $k_c$  та  $b_c$ ; 4, 5 – верхня та нижня межа дослідних величин за роботою А.І. Ноткуса та А.П. Кудзиса [7];  $\circ$  – дослідні дані (А.В. Яшина, Д.Я. Хананта [8, 9]).



**Рис. 1. Графіки та дослідні дані міцності бетонів при різних рівнях напружень.**



**Рис. 2. Міцність бетону при тривісному стисканні  $\sigma_3 > \sigma_1 = \sigma_2$  (а, б) та  $\sigma_3 = \sigma_2 > \sigma_1$  (в).**

Результати аналізу міцності бетону при тривісному стисканні наведено на рис. 2, де: а, б – при  $\bar{\sigma}_3 > \bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2$  (або  $\sigma_3 < \sigma_1 = \sigma_2$ ); в – при  $\bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_2 > \bar{\sigma}_1$  (або  $\sigma_3 = \sigma_2 < \sigma_1$ ); 1 – теоретичні дані ( $R_{bc} = 10$  МПа,  $n = 1$ ); 2 – те ж саме при  $R_{bc} = 50$  МПа,  $n = 3$ ; 3 – те ж саме при  $R_{bc} = 50$  МПа,  $n = 1$ ; умовні позначки – дані дослідів [8, 10, 11] з важким бетоном  $R_{bc} = 7 - 68$  МПа різних дослідників.

Використані дані дослідів іноземних дослідників, які були взяті з узагальнюючого аналізу Д.Я. Хананта [9], а також радянських дослідників Л.К. Лукші, А.В. Яшина, Ю.Н. Малашкіна та ін. Отримано добру збіжність теорії з даними дослідів над бетонами різних видів. Межі теоретичних ліній при зміні параметрів критерію істотно різняться та охоплюють практично всю ділянку дослідних точок. На сьогодні фактори, які впливають на ці параметри, досліджено недостатньо повно.

#### Література

1. Гвоздев, А.А. Расчёт несущей способности конструкции по методу предельного равновесия / А.А. Гвоздев – М.: Госстройиздат, 1949. – 280 с.
2. Гениев, Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона / Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. – М.: Стройиздат, 1974, – 316 с.
3. Холмянский, М.М. К прочностим трещиноватых пород бетона при трёхосном равномерном напряжении / Шифрин Е.И // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 1981. – № 3. – С. 52 – 61.



4. Карпенко, Н.И. *Общие модели механики железобетона* / Н.И. Карпенко – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
5. Карпенко, Н.И. *К построению условия прочности бетонов при не одноосных напряжённых состояниях* / Н.И. Карпенко // *Бетон и железобетон.* – №12. – 1984. – С. 42 – 44.
6. Карпенко, Н.И. *Об одной характерной функции прочности бетонов при трехосном сжатии* // *Строительная механика и расчёт сооружений.* – 1982. - №2. – С. 33 – 36.
7. *Сопротивление трёхосному сжатию железобетона и тяжёлого бетона при простом и сложном нагружении* / Поляков А.В., Деллос К.П., Яшин А.В., Султанов М.А. // *Совершенствование методов расчёта строительных конструкций.* – М.: МАДИ, 1987. – С. 67 – 72.
8. Яшин, А.В. *Рекомендации по определению прочностных и деформационных характеристик бетона при одноосных напряжённых состояниях* / А.В. Яшин. – М.: 1985. – 72 с.
9. Hannant O.J. *Nomograms for the failure of plain concrete subjected to short-term multiaxial stresses* // *Struct. Eng.* 1974; № 2; № 5. – P. 151 – 165.
10. Малашкин, Ю.Н. *Деформирование и разрушение бетона в условиях сложных напряжённых состояний* : автореф. дис. д-ра техн. наук. – М.; 1984. – 38 с.
11. Лукаша, Л.К. *Прочность трубобетона* / Л.К. Лукаша – Минск: В. шк., 1977. – 96 с.

*Надійшла до редакції 18.10.2013*  
© О.І. Валовой, О.Ю. Єрьоменко, М.О. Валовой