УДК 658.5:004.94

Ю.А. Романенков, к.т.н., доцент

Т.Г. Зейниев, аспирант

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина

МЕТОД ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА МОДЕЛИ БРАУНА НА ОСНОВЕ РЕТРОСПЕКТИВНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Предложен метод параметрического синтеза модели Брауна в расширенной области внутреннего параметра, основанный на оптимизации показателей чувствительности и робастности ретроспективных прогнозных оценок. Предложенный подход проиллюстрирован примером.

***Ключевые слова**: модель Брауна, чувствительность и робастность прогнозных оценок.*

Введение. Модель Брауна [1], или модель экспоненциального сглаживания, приобрела значительную популярность среди практиков прогнозирования в силу своей наглядности и алгоритмической простоты, а также свойства адаптивности, присущего ей [2]. В качестве прогнозной оценки, генерируемой этой моделью, выступает экспоненциальное среднее значение стационарного временного ряда:

$$F_t = \alpha A_{t-1} + \alpha(1-\alpha)A_{t-2} + \ldots + \alpha(1-\alpha)^{n-1} A_{t-n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha(1-\alpha)^{i-1} A_{t-i}\,, \tag{1}$$

где F_t – прогноз наблюдаемого показателя на момент времени t, A_{t-1}, A_{t-2}, ..., A_{t-n} – значения ряда в соответствующие моменты времени, n – длина выборки, α – параметр (константа) сглаживания.

Выбор параметра сглаживания α – основная задача параметрического синтеза модели Брауна, – не имеет однозначного решения в силу перспективной неопределенности.

Обзор последних источников исследований и публикаций. Различные подходы к решению задачи параметрического синтеза прогнозной модели Брауна изложены в работах многих авторов, например, [3-9].

Одной из центральных идей параметрического синтеза прогнозных моделей является парадигма ретроспективного анализа, основанная на гипотезе о сохранении в будущем качества ретроспективных прогнозных оценок, полученных для значений временного ряда в прошлые относительно t моменты времени.

Аналитически решить задачу параметрического синтеза возможно лишь «задним числом», т.е. для моментов времени $(t-1)$, $(t-2)$ и более ранних [8]. Для этого необходимо решать ретроспективные уравнения вида

$$\Delta_{t-1}(\alpha) = 0 \text{ или } \varepsilon_{t-1}(\alpha) = 0\,, \tag{2}$$

где $\Delta_{t-1}(\alpha)$ и $\varepsilon_{t-1}(\alpha)$ – аналитические зависимости соответственно абсолютной и относительной ретроспективных ошибок прогноза на момент времени $(t-1)$ от внутреннего параметра модели Брауна – параметра сглаживания α.

Уравнения (2) – алгебраические, т.к. зависимости $\Delta_{t-1}(\alpha)$ и $\varepsilon_{t-1}(\alpha)$ полиноминальны:

$$\Delta_{t-1}(\alpha)=F_{t-1}(\alpha)-A_{t-1}=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha(1-\alpha)^{i-1}A_{t-i-1}-A_{t-1}=0, \qquad (3)$$

$$\varepsilon_{t-1}(\alpha)=100\cdot\frac{F_{t-1}(\alpha)-A_{t-1}}{A_{t-1}}=\frac{100}{A_{t-1}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha(1-\alpha)^{i-1}A_{t-i-1}-A_{t-1}\right)=0. \qquad (4)$$

Очевидно, что корни уравнений (3) и (4) совпадают, поэтому будем рассматривать только ретроспективное уравнение (4) для относительной ошибки ε_{t-1}.

Параметр сглаживания α в модели Брауна – вещественный, причем в качестве области его допустимых значений используют как классическое множество значений α [3]

$$K_c=\{\alpha:\ 0\le\alpha\le 1\}, \qquad (5)$$

так и расширенное множество [4]

$$K_{\text{ex}\,t}=\{\alpha:\ 0\le\alpha\le 2\}. \qquad (6)$$

В рамках настоящей публикации будем рассматривать решение задачи параметрического синтеза на расширенном множестве допустимых значений $K_{\text{ex}\,t}$. Учитывая тот факт, что $K_c\subset K_{\text{ex}\,t}$, все выводы и рекомендации будут справедливы и для классического множества допустимых значений K_c.

Постановка задачи. Будем считать выбор значения параметра сглаживания α обоснованным для прогноза на момент времени t, если оно обеспечивает абсолютную точность ретро-прогноза на момент времени $(t-1)$. Исходя из этого, будем искать вещественные корни уравнения (4), принадлежащие множеству $K_{\text{ex}\,t}$. В случае, когда таких корней отыщется не меньше двух, *возникает задача множественного выбора* значения параметра сглаживания α из группы значений, состоящих из вещественных корней уравнения (4).

Основная часть. На рис. 1 схематично представим графическое решение алгебраического уравнения вида (4) для относительной ошибки ε_{t-1}.

Пусть на расширенном множестве допустимых значений $K_{\text{ex}\,t}$ уравнение (4) имеет m вещественных корней $\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_m$, $m\le n-1$.

При $m\ge 2$ из значений $\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_m$ необходимо выбрать то, которое обеспечивает максимальное качество ретро-прогноза на момент времени $(t-1)$.

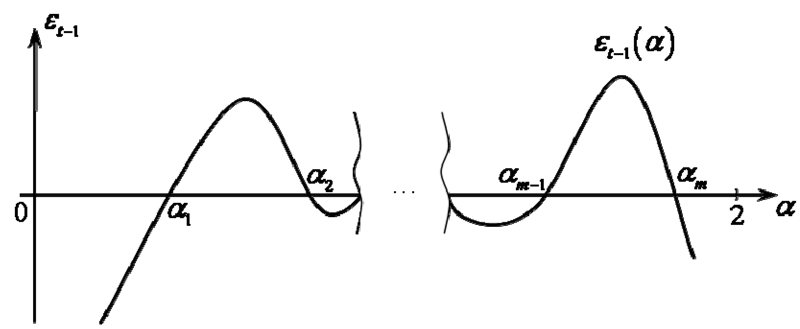

Рис. 1. Графическое решение ретроспективного уравнения (4) на расширенном множестве допустимых значений $K_{\text{ex}\,t}$ параметра сглаживания α

Для сравнительного анализа всего набора прогнозных оценок, полученных при значениях параметра сглаживания $\alpha=\alpha_1,\ \alpha=\alpha_2,\ ...,\ \alpha=\alpha_m$, предлагается использовать преобразование, нормирующее значение параметра сглаживания α относительно каждого из вещественных корней:

$$\alpha = \alpha_j + \Delta\alpha_j = \alpha_j + 0{,}01\alpha_j\varepsilon_\alpha,\ j = 1,\ 2,\ ...,\ m, \tag{7}$$

где α_j – вещественные корни уравнения (4), $\Delta\alpha_j$ – абсолютное, а ε_α – относительное отклонение относительно вещественного корня α_j.

Учитывая симметрию свойств коэффициентов модели Брауна на классическом K_c и запредельном допустимом множестве K_{out} [10], выражение (7) будем использовать при $\alpha_j \in [0,\ 1]$, а при $\alpha_j \in (1,\ 2]$ выражение для $\Delta\alpha_j$ примет вид:

$$\Delta\alpha_j = 0{,}01\left(2 - \alpha_j\right)\varepsilon_\alpha. \tag{8}$$

После преобразований уравнение (4) примет следующий вид:

$$\varepsilon_{t-1}^{(j)}\left(\varepsilon_\alpha\right) = \frac{100}{A_{t-1}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\alpha_j + 0{,}01\alpha_j\varepsilon_\alpha\right)\left(1 - \alpha_j - 0{,}01\alpha_j\varepsilon_\alpha\right)^{i-1} A_{t-i-1} - A_{t-1} \right) = 0,$$
$$\alpha_i \in [0,\ 1],\ \mathrm{j} = 1,\ 2,\ ...,\ \mathrm{k}, \tag{9}$$

и

$$\varepsilon_{t-1}^{(j)}\left(\varepsilon_\alpha\right) =$$
$$= \frac{100}{A_{t-1}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\alpha_j + 0{,}01\left(2 - \alpha_j\right)\varepsilon_\alpha\right)\left(1 - 0{,}01\left(2 - \alpha_j\right)\varepsilon_\alpha\right)^{i-1} A_{t-i-1} - A_{t-1} \right) = 0, \tag{10}$$
$$\alpha_i \in (1,\ 2],\ \mathrm{j} = k+1,\ k+2,\ ...,\ m,$$

где k – количество вещественных корней на классическом допустимом множестве K_c, $0 \le k \le m$.

Если зависимости вида (9) и (10) для всех вещественных корней ретроспективного уравнения (4) общим количеством m изобразить в единой плоскости параметров $\left(\varepsilon_{t-1},\ \varepsilon_\alpha\right)$ как показано на рис. 2, то можно легко провести их сравнительный анализ.

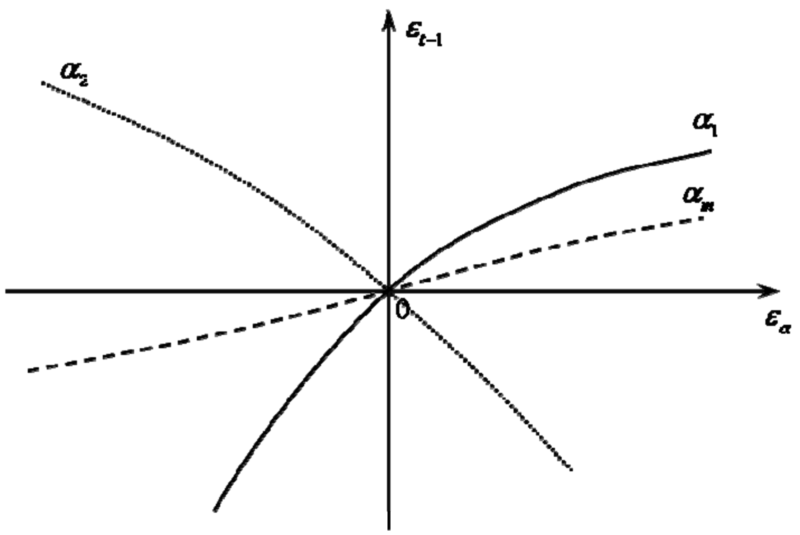

Рис. 2. Зависимость относительной ошибки ретроспективной прогнозной оценки ε_{t-1} от отклонения ε_α параметра сглаживания α относительно корней $\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_m$ ретроспективного уравнения (4)

Все кривые $\varepsilon_{t-1}^{(j)}\left(\varepsilon_\alpha\right)$ на рис. 2, соответствующие вещественным корням ретроспективного уравнения (4), проходят через центр координат, т.к. относительная ошибка прогнозных оценок при $\alpha = \alpha_j$, $j = 1,\ 2,\ ...,\ m$ равна нулю.

Для решения задачи сравнительного анализа необходимо сформулировать критерии, по которым возможно сравнение ретроспективных прогнозных оценок.

Очевидно, что ошибка ретроспективной прогнозной оценки не может быть таким критерием, т.к. все значения $\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_m$, будучи корнями уравнения (4), обеспечивают её нулевое значение.

Предлагается использовать в качестве критериев такие характеристики прогнозных оценок, как чувствительность и робастность.

Обе они характеризуют зависимость качества прогнозной оценки (а именно точности) от изменения внутреннего настроечного параметра модели – параметра сглаживания α.

Дадим определения этим схожим, но, тем не менее, принципиально разным характеристикам.

Чувствительность прогнозной оценки к изменению внутренних параметров прогнозной модели – степень изменения в значении точности прогнозной оценки при небольших изменениях в значениях внутренних независимых переменных (в частности, параметра сглаживания α).

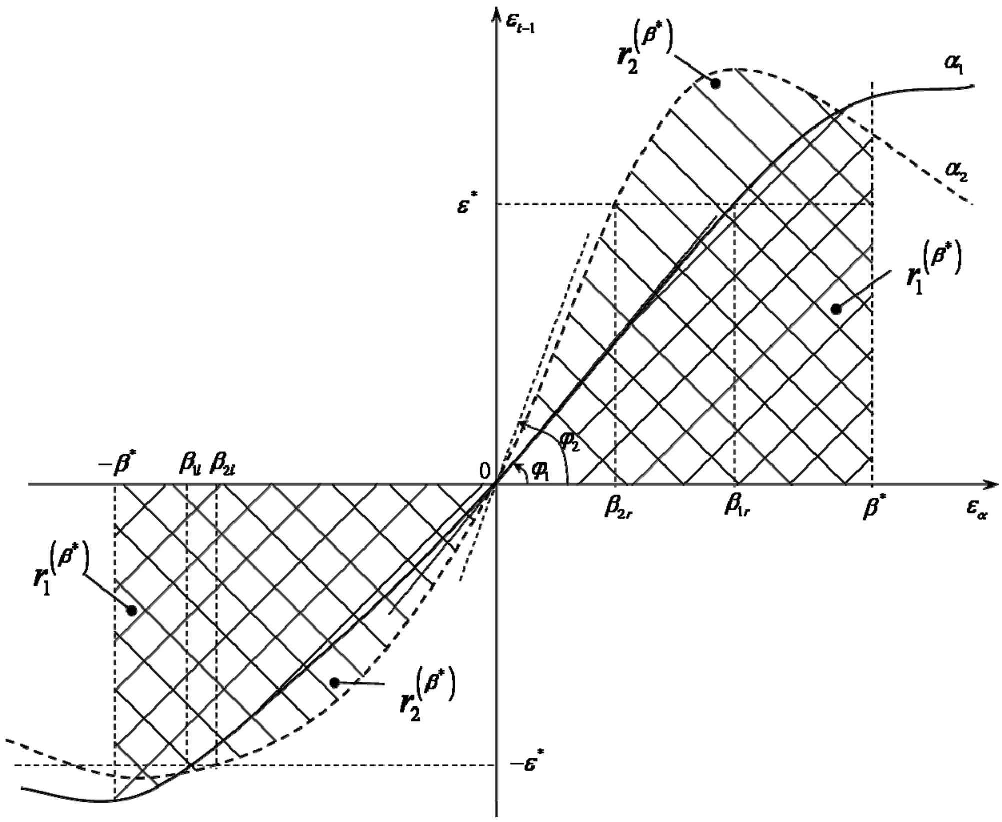

Рис. 3. Графическая интерпретация показателей чувствительности и робастности

В качестве *показателя чувствительности прогнозной оценки* предлагается использовать значение модуля производной функции ошибки $\varepsilon'_{t-1}\left(\varepsilon_\alpha\right)$ в точках $\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_m$:

$$s_j = \left| \left. \frac{d\varepsilon_{t-1}^{(j)}\left(\varepsilon_\alpha\right)}{d\varepsilon_\alpha} \right|_{\varepsilon_\alpha = 0} \right| = \left| tg\varphi_j \right|,\ j = 1,\ 2,\ ...,\ m, \tag{11}$$

где s_j – показатель чувствительности j-й прогнозной оценки, $\left.\frac{d\varepsilon_{t-1}^{(j)}\left(\varepsilon_\alpha\right)}{d\varepsilon_\alpha}\right|_{\varepsilon_\alpha=0}$ – значения производной j-й функции ретроспективной ошибки в точке $\varepsilon_\alpha=0$, φ_j – угол наклона кривой $\varepsilon_{t-1}^{(j)}\left(\varepsilon_\alpha\right)$ в точке $\varepsilon_\alpha=0$ (рис. 3), m – количество вещественных корней ретроспективного уравнения (4) на расширенном множестве допустимых значений $K_{\mathrm{ex}\,t}$.

Робастность прогнозной оценки – способность модели сохранять наперед заданный уровень качества прогноза в максимально широком диапазоне изменений внутренних параметров прогнозной модели (в частности, параметра сглаживания α).

Иногда робастность и грубость (нечувствительность) используют как эквивалентные понятия, однако это справедливо лишь отчасти.

В качестве *показателей робастности* предлагается использовать группу характеристик, геометрический смысл которых показан на рис. 3.

1. β_{jl}, β_{jr} – соответственно *левая и правая границы интервала робастности*, обеспечивающие сохранение точности прогнозной оценки в наперед заданных пределах $\left(-\varepsilon^*;\varepsilon^*\right)$.

2. $\Delta\beta_j=\beta_{jr}-\beta_{jl}$ – *ширина интервала робастности.*

3. $r_j^{\left(\beta^*\right)}=\dfrac{1}{\int\limits_{-\beta^*}^{\beta^*}\left|\varepsilon_{t-1}^{(j)}\left(\varepsilon_\alpha\right)\right|d\varepsilon_\alpha}$ – *степень робастности* в диапазоне $\left(-\beta^*;\beta^*\right)$, степень близости кривой $\varepsilon_{t-1}^{(j)}\left(\varepsilon_\alpha\right)$ к оси абсцисс. Например, если при двух прогнозных оценках с одинаковыми значениями $\beta_{1l}=\beta_{2l}$ и $\beta_{1r}=\beta_{2r}$ выполняется условие $r_1^{\left(\beta^*\right)}>r_2^{\left(\beta^*\right)}$, то более предпочтительной является первая прогнозная оценка.

Очевидно, что $r_j^{\left(\beta^*\right)}\in\left(0,\infty\right)$. Малые значения степени робастности означают значительную чувствительность или неустойчивость прогнозной оценки к изменению параметра сглаживания α. Большие значения показателя робастности свидетельствуют, что на всем интервале $\left(-\beta^*;\beta^*\right)$ кривая чувствительности на рис. 3 «прижата» к оси абсцисс, обеспечивая нечувствительность или устойчивость качества прогнозной оценки к изменению параметра сглаживания α.

Показатели s_j, $\Delta\beta_j$, $r_j^{\left(\beta^*\right)}$ представляют собой группу критериев, по которым и предлагается оптимизировать прогнозные оценки. Возможны различные варианты свертки показателей в один, с учетом смысла каждого из них:

$$s_j\to\min,\ \Delta\beta_j\to\max,\ r_j^{\left(\beta^*\right)}\to\max. \qquad (12)$$

При этом исследователь должен субъективно выбирать значения ε^* и β^*, характеризующие «жесткость» требований к прогнозным оценкам.

Отметим, что при $\varepsilon^*\to 0$ и $\beta^*\to 0$ ценность предложенных показателей становится близкой и оптимизацию целесообразно проводить по любому из критериев, исключив все остальные.

Блок-схема алгоритма предлагаемого метода параметрического синтеза модели Брауна представлена на рис. 4.

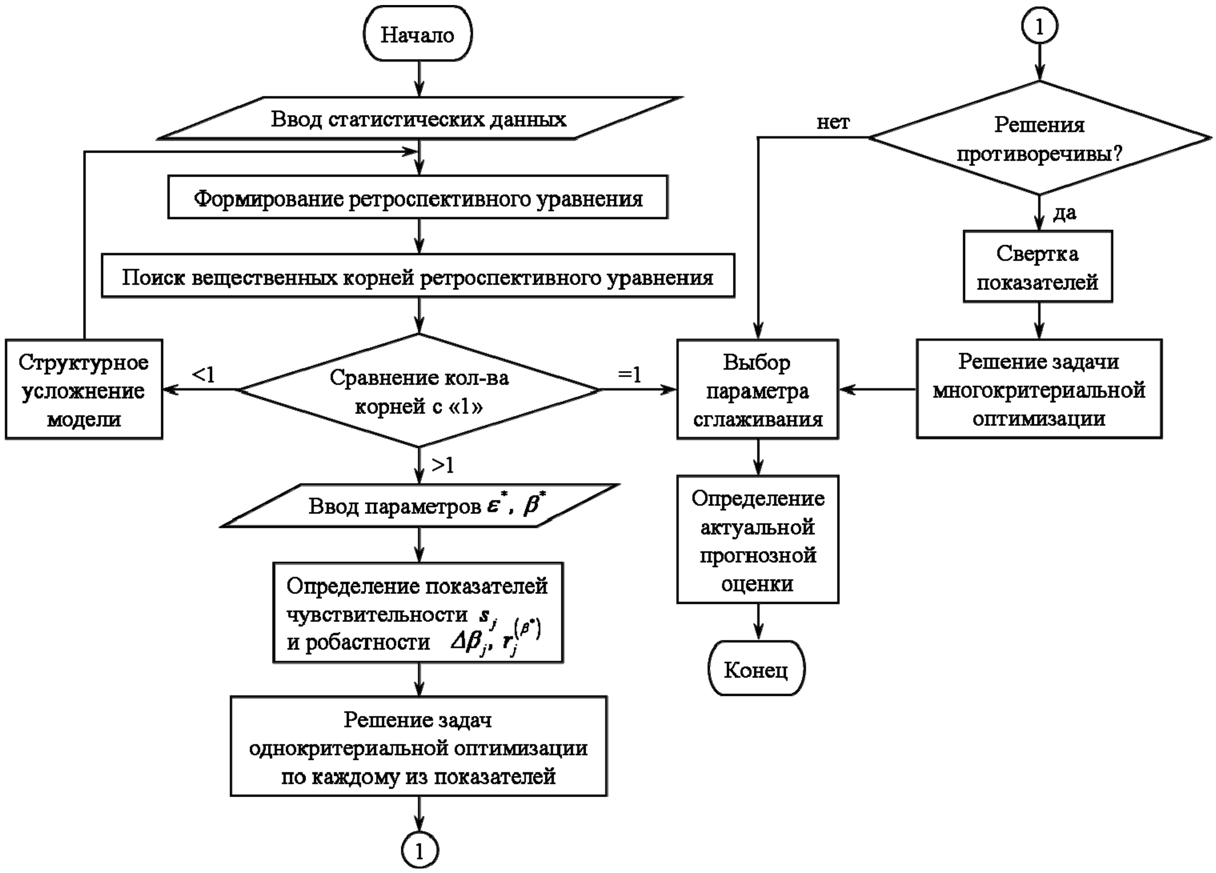

Рис. 4. Блок-схема алгоритма метода параметрического синтеза модели Брауна по критериям чувствительности и робастности ретроспективных прогнозных оценок

Пример. В качестве примера рассмотрим ряд цен Скандинавского рынка электроэнергии [11] в период с 01.01.2000 г. по 03.01.2000 г. с интервалом актуализации один раз в час (рис. 5).

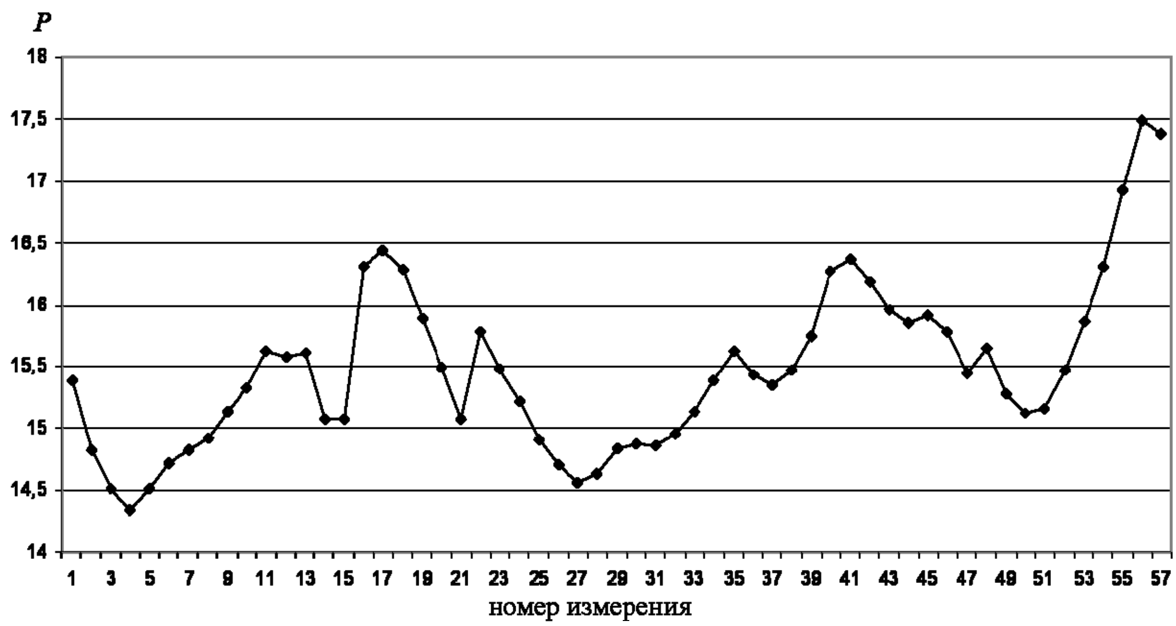

Рис. 5. Ряд данных о цене энергоносителей в Скандинавии

Применим предложенный метод выбора α для выборки с 15-го по 25-й элемент ряда.

Сформируем ретроспективное уравнение вида (4):

$$\begin{gathered}\varepsilon_{t-1}(\alpha)=101.3596193\alpha^{11}-1117.063222\alpha^{10}+\\+5597.620666\alpha^{9}-16837.11761\alpha^{8}+33776.75051\alpha^{7}-\\-47445.75119\alpha^{6}+47615.63562\alpha^{5}-34148.1985\alpha^{4}+\\+17167.98097\alpha^{3}-5777.702243\alpha^{2}+1169.00068\alpha-100=0.\end{gathered} \tag{13}$$

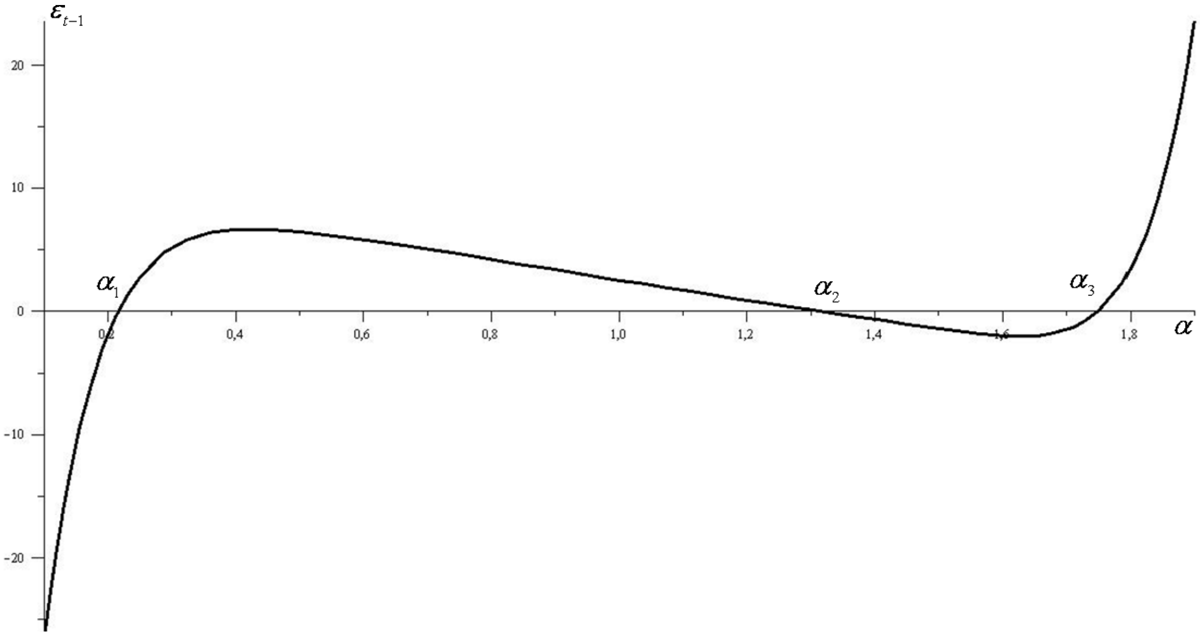

Рис. 6. Вещественные корни ретроспективного уравнения (13)

Вещественные корни уравнения сосредоточены на расширенном допустимом множестве параметра сглаживания α (рис. 6):

$$\alpha_1=0,2174\,;\ \alpha_2=1,3126\,;\ \alpha_3=1,7507\,. \tag{14}$$

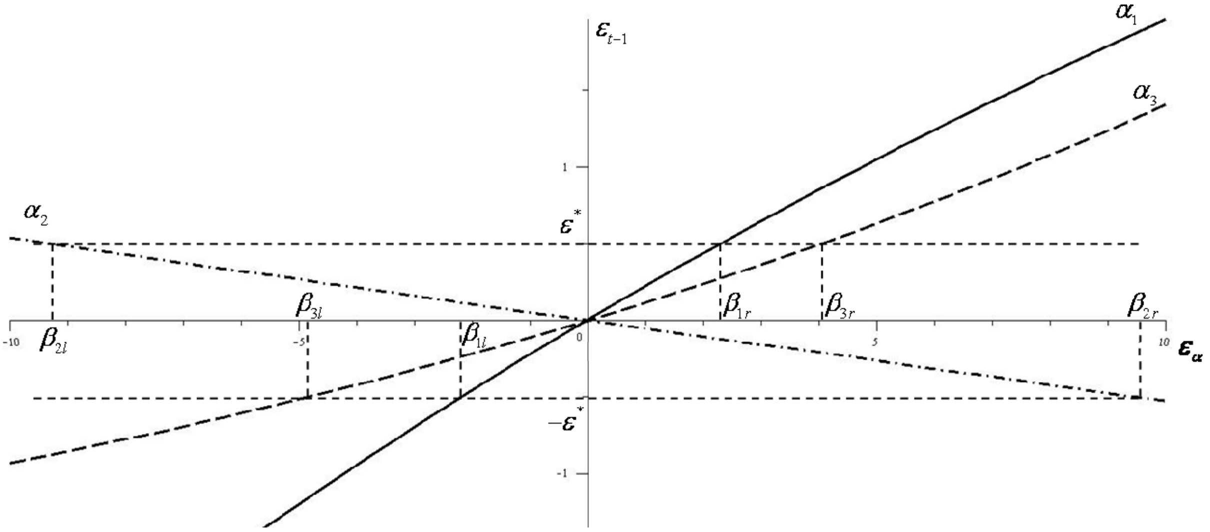

Рис. 7. Графическая оценка чувствительности и робастности прогнозных оценок

Зададим значения $\varepsilon^*=0,5\%$, $\beta^*=10\%$.

Определим показатели чувствительности прогнозных оценок в соответствии с (11):

$$s_1 = \left| \frac{d\varepsilon_{t-1}^{(2)}(\varepsilon_\alpha)}{d\varepsilon_\alpha} \Bigg|_{\varepsilon_\alpha = 0} \right| = \left| tg\varphi_1 \right| = 0,2245,\ s_2 = -0,0533,\ s_3 = 0,1144. \qquad (15)$$

Графическая оценка чувствительности и робастности прогнозных оценок представлена на рис. 7.

Весь комплекс показателей, рассчитанных по предложенной методике, приведен в табл. 1.

Таблица 1. Результаты ретроспективного анализа временного ряда и оценки чувствительности и робастности прогнозных оценок

Элементы ряда	15-26	15-26	15-26
j	1	2	3
α_j	0,2174	1,3126	1,7507
s_j	0,2245	**-0,0533**	0,1144
ε^*, %	0,5		
β_{jl}, %	-2,1704	-9,3212	-4,7925
β_{jr}, %	2,2886	9,4134	4,0485
$\Delta\beta_j$, %	4,459	**18,7346**	8,841
β^*, %	10		
$r^{(\beta^*)}$	0,0443	**0,1874**	0,0865
$\varepsilon_j^{(11)}$, %	-2,3664	**0,7907**	7,2943
$\varepsilon_j^{(12)}$, %	−0,8478	**0,7903**	−0,4435

В табл. 1 представлены также относительные ошибки текущих прогнозных оценок на 27-й момент времени при $\alpha = \alpha_j$ для скользящей выборки в 11 элементов ($\varepsilon_j^{(11)}$) и для накопительной выборки в 12 элементов ($\varepsilon_j^{(12)}$).

Как видно из табл. 1, выбор параметра сглаживания $\alpha = 1,3126$ обеспечивает не только робастность ретроспективной прогнозной оценки к изменению α, но и робастность текущей прогнозной оценки к изменению длины выборки n. Отметим также, что в приведенном примере все критерии (показатели чувствительности и робастности) непротиворечивы.

Выводы. 1) Разработан метод параметрического синтеза модели Брауна на основе ретроспективной многокритериальной оптимизации, который позволяет определять настроечные параметры модели, обеспечивающие максимальную устойчивость прогнозных оценок к изменению внутренних параметров модели. 2) Предложены показатели чувствительности и робастности ретроспективных прогнозных оценок, по которым может быть осуществлена многокритериальная оптимизация внутреннего параметра модели Брауна. 3) Разработана блок-схема алгоритма метода параметрического синтеза модели Брауна по критериям чувствительности и робастности ретроспективных прогнозных оценок. 4) Предложенный метод проиллюстрирован примером прогнозирования ряда реальных данных.

Литература

1. Brown R.G. Smoothing forecasting and prediction of discrete time series. [Текст] - N.Y., 1963.

2. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов: Учебное пособие. [Текст] – М.: Финансы и статистика, 2003. – 416 с.

3. Рабочая книга по прогнозированию [Текст] / Редкол.: И.В. Бестужев-Лада (отв. ред.). – М.: Мысль, 1982. – 430 с.

4. Светуньков, С.Г. О расширении границ применения метода Брауна [Текст] // Известия Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов. 2002. - №3. - С. 94-107.

5. Методы социально-экономического прогнозирования: учебник для вузов. Том II [Текст] / С.Г. Светуньков, И.С. Светуньков. – СПб. : Изд-во СПбГУЭФ, 2010. – 103 с.

6. Васильев А.А. Методы выбора постоянной сглаживания в модели прогнозирования Брауна [Текст] // Вестник Тверского государственного университета, 2013, №1 (серия «Экономика и управление». 2013, вып. 17). – С. 183-196.

7. Васильев А.А. Исследование модели прогнозирования Брауна при классических и запредельных значениях постоянной сглаживания [Текст] / А.А. Васильев, Е.В. Васильева // Вестник Тверского государственного университета, 2013, №1 (серия «Экономика и управление». 2013, вып. 17). – С. 197-213.

8. Вартанян В.М. Параметрический синтез прогнозной модели экспоненциального сглаживания [Текст] / В.М. Вартанян, Ю.А. Романенков, А.В. Кононенко // Вестник НТУ «ХПИ». Сборник научных трудов. Тематический выпуск «Системный анализ, управление и информационные технологии». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2005. – № 59 – С. 9-16.

9. Вартанян В.М. Анализ адекватности моделей прогнозирования экономических показателей предприятий [Текст] / В.М. Вартанян, Ю.А. Романенков, А.В. Кононенко // Бизнес Информ. – Харьков: Хар. Нац. эконом. ун-т, 2007. - № 3-4. – С. 103-106.

10. Романенков Ю.А. Параметрический анализ области адекватности адаптивной прогнозной модели Брауна [Текст] // Наукові праці Південного філіалу Національного університету біоресурсів і природокористування України «Кримський агротехнологічний університет». – Технічні науки. Випуск 162. – Сімферополь: ВД «АРІАЛ», 2014. – С. 228-236.

11. http://www.mbureau.ru/sites/default/files/timeseriesarchive.rar.

УДК 658.5:004.94

Ю.О. Романенков, Т.Г. Зєйнієв

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна

МЕТОД ПАРАМЕТРИЧНОГО СИНТЕЗУ МОДЕЛІ БРАУНА НА ОСНОВІ РЕТРОСПЕКТИВНОЇ БАГАТОКРИТЕРІЙНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Запропоновано метод параметричного синтезу моделі Брауна в розширеної області внутрішнього параметра, заснований на оптимізації показників чутливості та робастністі ретроспективних прогнозних оцінок. Запропонований підхід проілюстровано прикладом.

***Ключові слова**: модель Брауна, чутливість і робастність прогнозних оцінок.*

UDC 658.5:004.94

Yu.A. Romanenkov, T.G. Zieiniiev

N.Ye. Zhukovsky National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv, Ukraine

METHOD OF PARAMETRIC SYNTHESIS OF BROWN'S MODEL BASED ON RETROSPECTIVE MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION

Method of parametric synthesis of Brown's model in extended domain of internal parameter is suggested. It is based on optimization of sensitivity and robustness of retrospective forecast. The approach suggested is illustrated by an example.

***Keywords:** Brown's model, forecast sensitivity and robustness.*