

Избаиш М.Ю., д.т.н., профессор  
Крутова Н.А., ассистент

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры

## АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ШПАНГОУТАМИ

Для выполнения анализа напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек, подкрепленных шпангоутами, были взяты за основу цилиндрические тонкостенные оболочки, свободные от закрепления. Цилиндрические оболочки смоделированы в программном комплексе SCAD 11.5. Которые находятся под воздействием внутреннего равномерного давления  $q$ . Сравнение проводилось на основании оболочек, построенных по общей теории оболочек и по мембранной теории оболочек. В соответствии с общей теорией оболочек геометрическая неизменяемость расчетной схемы обеспечивалась за счет наложения связей по условиям ее симметрии, а в соответствии с мембранной теорией – с помощью наложения связей на все угловые перемещения во всех узлах расчетной схемы. В результате подкрепления шпангоутами первого и второго вариантов цилиндрических оболочек были получены расчетные схемы с жестко закрепленными шпангоутами.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированного состояния, цилиндрические оболочки, шпангоуты, моделирование оболочек.

Избаиш М.Ю., д.т.н., профессор  
Крутова Н.О., ассистент

Харківський національний університет будівництва та архітектури

## АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, ПІДКРІПЛЕНОЇ ШПАНГОУТАМИ

Для виконання аналізу напружено-деформованого стану циліндричних оболонок, підкріплених шпангоутами, було взято за основу циліндричні тонкостінні оболонки, вільні від закріплення, які знаходяться під впливом внутрішнього рівномірного тиску  $q$ . Циліндричні оболонки змодельовано в програмному комплексі SCAD 11.5. Порівняння проводилося на підставі оболонок, побудованих за загальною теорією оболонок і за мембранною теорією оболонок. Відповідно до загальної теорії оболонок геометричну незмінність розрахункової схеми забезпечено за рахунок накладення зв'язків за умовами симетрії, а відповідно до мембранної теорії – за допомогою накладення зв'язків на всі кутові переміщення в усіх вузлах розрахункової схеми. У результаті підкріплення шпангоутами першого і другого варіантів циліндричних оболонок було отримано розрахункові схеми з жорстко закріпленими шпангоутами.

**Ключові слова:** напружено-деформований стан, циліндричні оболонки, шпангоути, моделювання оболонок.

## THE ANALYSIS OF AN INTENSE DEFORMABLE CONDITION OF THE CYLINDRICAL SHELL SUPPORTED WITH BULKHEADS

*Cylindrical thin-walled shells, free from fixing which are under the influence of the internal uniform pressure of  $q$ , have been taken as a basis for implementation of the analysis of the intense deformed condition of the cylindrical shells supported with bulkheads. Modeling of cylindrical shells was carried out in the program SCAD 11.5. Comparison was carried out on the basis of the shells constructed according to the general theory of shells and according to the membrane theory of shells.*

*The task of the analysis of the intense deformed condition of a cylindrical shell is rather difficult both at calculation by means of theories of covers, and by means of finite-element method (FEM). The main problem of the general theory of shells is approximate data of a three-dimensional regional task to two-dimensional. The biggest difficulty in the momentless theory of shells is drawing up conditions of movements interface. The main difficulties on a solution of problems of thin-walled designs deformation are connected with the need of the fulfilment of conditions in convergence. One of such conditions is the need of observance of a continuity of required functions.*

*For creation of the structural design scheme according to the membrane theory, the system of a general view, shell elements – finite element (FE) of 44 type was used. Geometrical stability of the structural design scheme is provided due to imposing of communications under the terms of its symmetry.*

*For creation of the structural design scheme according to the membrane theory, the system of a general view, shell elements – FE of 44 type was used. Geometrical stability of the structural design scheme is provided due to imposing of communications under the terms of its symmetry, and also for compliance of work of a cylindrical shell, according to the membrane theory, reached by means of imposing of communications on all angular movements in all knots of the structural design scheme.*

*In this work the option with a discrete arrangement of reinforcements (bulkheads) for the first and second option of shells is considered. Creation of models and researches were conducted at the following assumptions: the centers of gravity of cross sections of bulkheads lie in a median surface of a covering; axes of bulkheads are inextensible. For modeling of bulkheads the elements FE of 44 type were used. Frames are placed with an equal step and at distance of one meter from low and top edges of shells, joining of a bulkheads with a shell was carried out rigid (restrictions on all directions of communications were imposed). As a result of reinforcement with bulkheads of the first and second options of cylindrical shells, structural design schemes with rigidly fixed bulkheads have been received.*

*As a result of the executed calculation, data on deformation and tension have been obtained. Comparisons were carried out on radial, meridional and total movements.*

**Keywords:** *intense deformed state, cylindrical shells, bulkheads, modeling of shells.*

**Ведение.** В данной работе проводится моделирование в программном комплексе SCAD 11.5 цилиндрических тонкостенных оболочек, подкрепленных шпангоутами. На основании полученных результатов расчета проводится анализ напряженно-деформированного состояния оболочек в зависимости от применяемой теории для моделирования оболочек.

**Анализ последних источников исследований и публикаций.** Современная теория оболочек – это обширный раздел механики твердого деформируемого тела, который включает в себя ряд самостоятельных разделов, изучающих различные классы оболочек: однослойных, многослойных, ребристых, сетчатых, мягких и др. В теории оболочек принято выделять два различных типа: теории типа Кирхгофа – Лява и теории типа Тимошенко – Рейсснера[6].

Теории типа Кирхгофа – Лява применимы для исследования напряженно-деформированного состояния тонкостенных однослойных оболочек, в которых жесткость на поперечный сдвиг является бесконечно большой, а вектор деформации поперечного сдвига принимается равным нулю. Это одна из гипотез Кирхгофа – Лява, согласно которой считается, что нормальное к недеформированной срединной поверхности волокно оболочки остается нормальным к ней и после деформации, а также не меняет своей длины [2], но для других типов оболочек этой теории оказывается недостаточно.

Теория оболочек Тимошенко – Рейсснера представляет собой уравнение гиперболического типа десятого порядка. В отличие от теории Кирхгофа – Лява, теория Тимошенко – Рейсснера не является универсальной. В ней не существует однозначного пути для определения жесткости на поперечный сдвиг, и различные задачи требуют различных значений коэффициентов поперечного сдвига [11].

Теории цилиндрических оболочек в разное время разрабатывались В. З. Власовым [3], Л. Доннелом [5], А.А. Уманским [14], С. Н. Каном [7] и др.

В теории цилиндрических оболочек основным вопросом является расчет замкнутых цилиндрических оболочек и незамкнутых цилиндрических оболочек, границы которых – две образующие и две направляющие [10]. Важный вопрос-расчет цилиндрических оболочек, подкрепленных равноотстоящими поперечными ребрами.

Зачастую такие задачи решаются методом двойных или одианарных тригонометрических рядов. Практическую ценность представляет метод одианарных рядов, позволяющий подчинить решение на двух краях оболочки произвольным граничным условиям. Использование этих расчетных методик затрудняли громоздкие дифференциальные уравнения и их высокий порядок. Для их упрощения цилиндрические оболочки стали подразделять: очень длинные, длинные, средней длины, короткие.

Для очень длинных и длинных оболочек В. З. Власов предложил теорию их расчета, которая названа полубезмоментной [9].

Для обеспечения жесткости и местной устойчивости цилиндрических оболочек их зачастую подкрепляют поперечными ребрами. Расчет таких оболочек – задача весьма громоздкая, если к ней подходить с позиции точного удовлетворения условий в местах сопряжения ребер с обшивкой. Разработана упрощенная методика расчета цилиндрических оболочек, подкрепленных равноотстоящими поперечными ребрами [9].

В решении задач строительной механики и механики деформируемого твердого тела большое значение приобрели численные методы, основанные на вариационных постановках. Особое место среди новых методов решения задач занимает метод конечных элементов (МКЭ). В настоящее время этот метод заложен в основу почти всех систем автоматизированного расчета конструкций во многих отраслях техники: промышленном и гражданском строительстве, судостроении, авиастроении и т.д.

[15, 17, 18]. Теории и решению задач деформирования конструкций методом конечных элементов посвящен целый ряд монографий и учебников. Среди них следует отметить работы Н.А. Алфутова [1], А.В. Перельмутера и В.И. Сливкера [12], О. Зенкевича [15], Э. Митчелла [16], Р. Галлагера [4].

В вышеупомянутых работах рассмотрены вопросы расчета конструкций различных типов: стержневых систем, осесимметричных и трехмерных конструкций, а также отдельные вопросы расчета тонкостенных конструкций (оболочек и пластин). Монография Р. Б. Рикардса [13] полностью посвящена применению метода конечных элементов в расчетах тонкостенных конструкций. При этом рассмотрен целый комплекс проблем: построения основных соотношений теории оболочек, вывода вариационных уравнений различных типов, построения конечных элементов, численная реализация метода конечных элементов и решение практических задач.

**Выделение не решенных ранее частей общей проблемы.** Задача анализа напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки является достаточно сложной как при вычислении с помощью теорий оболочек, так и с помощью МКЭ. Основной проблемой моментной теории тонких оболочек является приближенное сведение трехмерной краевой задачи к двумерной. Наиболее сложным в безмоментной теории оболочек является составление условий сопряжения перемещений.

В случае подкрепления поперечными ребрами (шпангоутами) тонкостенных цилиндрических оболочек используют упрощенные методики расчета, считая оболочки ортотропными, распределяют жесткость каждого ребра по всей ширине пролета, поддерживаемого ребром, и суммируют с соответствующими жесткостями оболочки в кольцевом направлении. Подкрепленная оболочка в расчете заменяется эквивалентной, без ребер. При этом эквивалентная оболочка обладает разными упругими свойствами в продольном и кольцевом направлении. Такая методика расчета подкрепленных оболочек приемлема, если ребра поставлены часто и число их достаточно велико. В этом случае погрешность расчетов относительно небольшая. При расчете таких оболочек используют допущение, что ребра обладают жесткостями только в отношении растяжения и изгиба в своей плоскости. Жесткостями ребер при изгибе из плоскости и при кручении пренебрегают.

Основные трудности на пути решения задач деформирования тонкостенных конструкций методом конечных элементов связаны с необходимостью выполнения определенных условий сходимости. Одним из таких условий является необходимость соблюдения непрерывности искомых функций, а иногда и их первых производных на границах смежных элементов.

**Постановка задания.** Задание состоит в анализе изменения напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами, в зависимости от применяемой теории для построения расчетных схем оболочек в программном комплексе SCAD 11.5.

**Основной материал и результаты.** Для выполнения сравнения изменений напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек были взяты за основу цилиндрические тонкостенные оболочки, свободные от закрепления, которые находятся под воздействием внутреннего равномерного давления  $q$ .

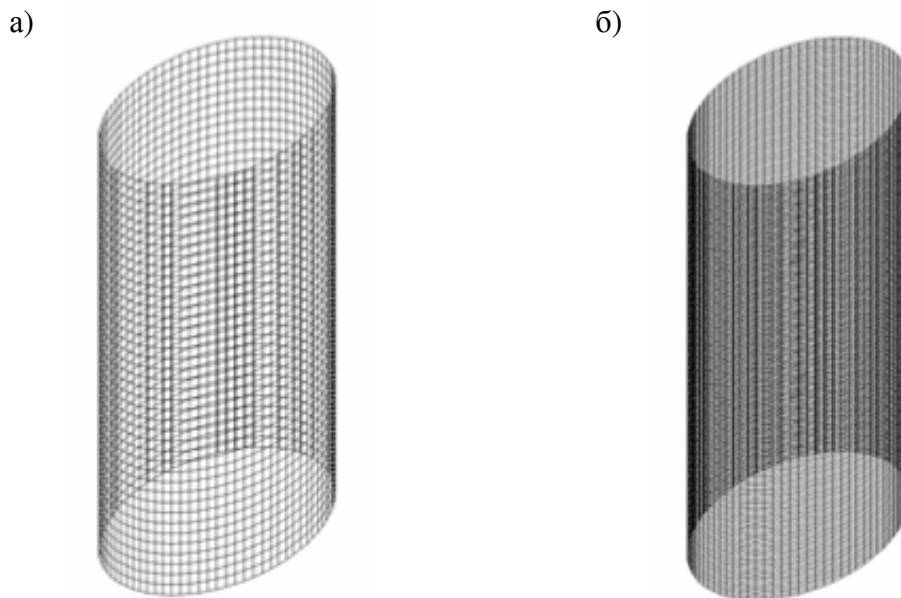
Моделирование цилиндрических оболочек проводилось в программном комплексе SCAD 11.5. Комплекс реализует конечно-элементное моделирование статических и динамических расчетных схем, проверку устойчивости, выбор невыгодных сочетаний усилий, подбор арматуры железобетонных конструкций, проверку несущей способности стальных конструкций.

Исходные данные для моделирования цилиндрических тонкостенных оболочек: модуль упругости –  $3,001 \cdot 10^8$  кПа; коэффициент Пуассона – 0,2; толщина оболочки – 0,16 м; радиус срединной поверхности оболочки – 1,0 м; длина оболочки – 4,0 м; внутреннее давление – 10,0 кПа.

Сравнение проводилось на основании оболочек, построенных по общей теории оболочек (мелкая сетка) и по мембранной теории оболочек (крупная сетка) (рис. 1).

Для построения расчетной схемы по первому варианту (рис. 1 а) использовалась система 5 (система общего вида), элементы оболочки – конечные элементы (КЭ) типа 44, геометрическая неизменяемость расчетной схемы обеспечивалась за счет наложения связей по условиям ее симметрии.

Для построения расчетной схемы по второму варианту (рис. 1 б) использовалась система общего вида, элементы оболочки – КЭ типа 44, геометрическая неизменяемость расчетной схемы обеспечивалась за счет наложения связей по условиям ее симметрии, а соответствие работы цилиндрической оболочки согласно мембранной теории достиглось с помощью наложения связей на все угловые перемещения во всех узлах расчетной схемы.



**Рисунок 1 – Расчетные схемы:**

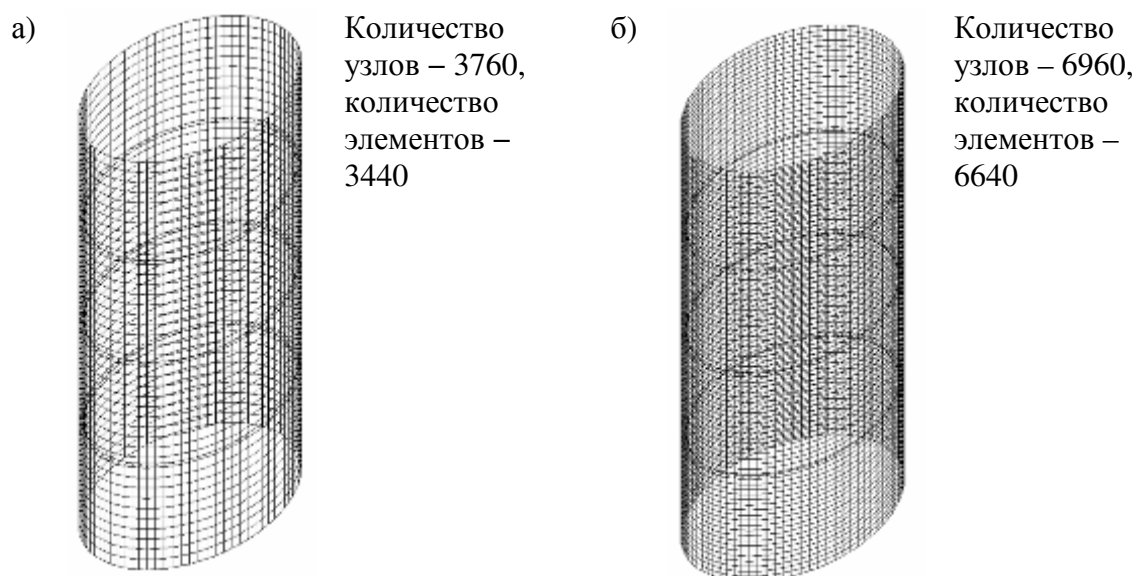
- а – оболочка, построенная по мембранной теории оболочек;
- б – оболочка, построенная по общей теории оболочек

Задачу по определению напряженно-деформированного состояния оболочки, подкрепленной шпангоутами, решают в двух основных вариантах: с помощью замены подкрепленной оболочки однородной ортотропной оболочкой (путем «размазывания» жесткостей шпангоутов) или с учетом дискретного расположения подкреплений путем интегрирования уравнений устойчивости гладкой оболочки и выполнения условий стыковки ее со шпангоутами.

В данной работе рассматривается вариант с дискретным расположением подкреплений (шпангоутов) для первого и второго варианта оболочек. Построение моделей и исследования проводились при следующих допущениях: центры тяжести поперечных сечений шпангоутов лежат в срединной поверхности обшивки; оси шпангоутов нерастяжимы.

Для моделирования шпангоутов использовались КЭ типа 44, была задана жесткость пластины со следующими параметрами: модуль упругости  $3,00 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2$ , коэффициент Пуассона 0,2 м, толщина принята 0,2 м. Шпангоуты размещаются с равным шагом и на расстоянии одного метра от нижнего и верхнего краев оболочек, стыковка шпангоута с оболочкой выполнялась жесткой (накладывались ограничения по всем направлениям связей).

В результате стыковки исходных цилиндрических оболочек со шпангоутами были получены новые расчетные схемы (рис. 2).



**Рисунок 2 – Расчетные схемы цилиндрических оболочек, подкрепленных шпангоутами:**

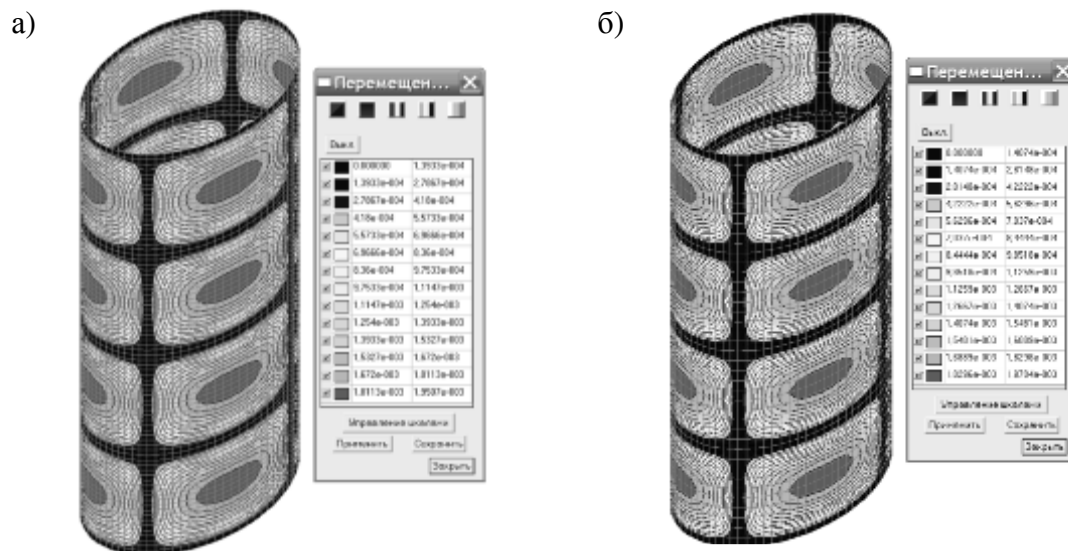
- а – расчетная схема, полученная на основании оболочки, построенной по мембранной теории оболочек;
- б – расчетная схема, полученная на основании оболочки, построенной по общей теории оболочек

Расчет приведенных моделей проводился линейный: режим выполнения расчета – полный расчет; метод решения – мультифронтальный; метод оптимизации матрицы жесткости – автоматический; точность разложения матрицы –  $1e-012$ ; точность решения собственной проблемы –  $1e-010$ .

В основу расчета положен метод конечных элементов с использованием в качестве основных неизвестных перемещений и поворотов узлов расчетной схемы. В связи с этим идеализация конструкции выполнена в форме, приспособленной к использованию этого метода, а именно: система представлена в виде набора тел стандартного типа (оболочка, пластина), называемых конечными элементами и присоединенных к узлам.

В результате выполненных расчетов были получены данные по деформациям и напряжениям для оболочек, смоделированных по общей теории оболочек и мембранной теории, подкрепленных шпангоутами (рис. 3).

Сравнения проводились по радиальным, меридиональным и суммарным перемещениям, а также для напряжений на нижних и на верхних гранях  $S_{x \text{ верх}}$ ,  $S_{x \text{ низ}}$ ,  $S_{y \text{ верх}}$ ,  $S_{y \text{ низ}}$ . Результаты сравнения занесены в таблицу 1.



**Рисунок 3 – Суммарные перемещения (мм):**  
 а – оболочка, смоделированная по общей теории;  
 б – оболочка, смоделированная по мембранной теории

**Таблица 1 – Сравнение решений расчетных схем оболочек**

| Параметр  | Оболочка, смоделированная по общей теории | Оболочка, смоделированная по мембранной теории | Отклонения, % |
|---|---|--|---------------|
| Перемещения в радиальном направлении, мм            | 1,4337e-004                               | 1,4193e-004                                    | 1,39          |
| Перемещения в меридиональном направлении, мм        | 1,9704e-003                               | 1,9507e-003                                    | 1,01          |
| Суммарные перемещения, мм                           | 1,9704-003                                | 1,9507e-003                                    | 1,01          |
| Напряжения $S_{x \text{ верх}}$ , кН/м <sup>2</sup> | 51,69                                     | 51,18  | 0,98          |
| Напряжения $S_{x \text{ низ}}$ , кН/м <sup>2</sup>  | 40,96                                     | 40,55  | 1,01          |
| Напряжения $S_{y \text{ верх}}$ , кН/м <sup>2</sup> | 232,86                                    | 230,53   | 1,01          |
| Напряжения $S_{y \text{ низ}}$ , кН/м <sup>2</sup>  | 211,13                                    | 209,02   | 0,99          |

**Выводы.** Для построения расчетных схем оболочек использовалось две теории: общая теория оболочек и мембранная. В соответствии с общей теорией оболочек геометрическая неизменяемость расчетной схемы обеспечивалась за счет наложения связей по условиям ее симметрии, а в соответствии с мембранной теорией – с помощью наложения связей на все угловые перемещения во всех узлах расчетной схемы. В результате подкрепления шпангоутами первого и второго вариантов цилиндрических оболочек были получены расчетные схемы с жестко закрепленными шпангоутами. По итогам расчета можно сказать, что характер деформаций и отображение изополей перемещений (табл. 3) и напряжений имеют одинаковый характер, а отклонения в показаниях перемещений (радиальных, меридиональных и суммарных) и напряжений ( $S_{x \text{ верх}}$ ,  $S_{x \text{ низ}}$ ,  $S_{y \text{ верх}}$ ,  $S_{y \text{ низ}}$ ) колеблются от 0,98% до 1,39%.

## Литература

1. Алфутов Н. А. *Solid Works / Cosmos Works. Инженерный анализ методом конечных элементов / Н. А. Алфутов, А. А. Алямовский.* – М. : ДМК, 2004. – 432 с.
2. Бейлин Е. А. *Элементы теории кручения тонкостенных стержней произвольного профиля / Е. А. Бейлин.* – С.-Пб. : Изд-во СПбГАСУ, 2003. – 113 с.
3. Власов В. З. *Общая теория оболочек и ее приложения в технике / В. З. Власов.* – М., Л.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.
4. Галлагер Р. *Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер.* – М. : Мир, 1984. – 428 с.
5. Доннелл Л. Г. *Балки, пластины, оболочки / Л. Г. Доннелл.* – М. : Наука, 1982. – 568 с.
6. Жилин П. А. *Прикладная механика. Основы теории оболочек / П. А. Жилин.* – С.-Пб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2006. – 167 с.
7. Кан С. Н. *Строительная механика оболочек / С. Н. Кан.* – М. : Машиностроение, 1966. – 508 с.
8. Карпиловский В. С. *SCADOFFICE. Вычислительный комплекс SCAD / В. С. Карпиловский, Э. З. Криксунов.* – М. : Изд-во «SCADSoft», 2012. – 656 с.
9. Карпов В. В. *Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. / В. В. Карпов.* – М. : Физматлит, 2010.4.1 – 288 с.
10. Новожилов В. В. *Линейная теория тонких оболочек / В. В. Новожилов, К. Ф. Черных, Е. И. Михайловский.* – Л. : Изд-во Политехника, 1991. – 656 с.
11. *Общая нелинейная теория упругих оболочек / С. А. Кабриц, Е. И. Михайловский, П. Е. Товстик, К. Ф. Черных, и др.* – С.-Пб. : Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2002. – 388 с.
12. Перельмутер А. В. *Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер.* – М. : ИАСВ, Изд-во «SCADSoft», 2011. – 732 с.
13. Рикадс Р. Б. *Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин / Р. Б. Рикадс.* – Рига: Зннатне. – 1988. – 284 с.
14. Уманский А. А. *Справочник проектировщика расчетно-теоретический / А. А. Уманский.* – М. : Стройиздат, 1973. – 416 с.
15. Zienkiewicz O. C. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, 7th Edition / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, J. Z. Zhu.* – Butterworth-Heinemann, 2013. – 752 p.
16. Mitchell A. R. *The Finite Element Method in Partial Differential Equations / A. R. Mitchell, R. Wait.* – London, 1981. – 216 p.
17. Liu G. R. *The Finite Element Method / G. R. Liu, S. S. Quek.* – Butterworth-Heinemann, 2013. – 464 p.
18. Reddy J. N. *An Introduction to the Finite Element Method / J. N. Reddy.* – McGraw-Hill, 2006. – 761 p.

## References

1. Alfutov N. A. *Solid Works / Cosmos Works. Inzhenernyy analiz metodom konechnykh elementov / N. A. Alfutov, A. A. Alyamovskiy.* – M. : DMK, 2004. – 432 s.
2. Beylin E. A. *Elementy teorii krucheniya tonkostennykh sterzhney proizvolnogo profilya / E. A. Beylin.* – S.-Pb. : Izd-vo SPbGASU, 2003. – 113 s.
3. Vlasov V. Z. *Obshchaya teoriya obolochek i ee prilozheniya v tehnikе / V. Z. Vlasov.* – M., L.: Gostehizdat, 1949. – 784 s.
4. Gallager R. *Metod konechnykh elementov. Osnovy / R. Gallager.* – M. : Mir, 1984. – 428 s.
5. Donnell L. G. *Balki, plastiny, obolochki / L. G. Donnell.* – M. : Nauka, 1982. – 568 s.
6. Zhilin P. A. *Prikladnaya mehanika. Osnovy teorii obolochek / P. A. Zhilin.* – S.-Pb. : Izd-vo Politehn. un-ta, 2006. – 167 s.
7. Kan S. N. *Stroitelnaya mehanika obolochek / S. N. Kan.* – M. : Mashinostroenie, 1966. – 508 s.
8. Karpilovskiy V. S. *SCADOFFICE. Vychislitelnyy kompleks SCAD / V. S. Karpilovskiy, E. Z. Kriksunov.* – M. : Izd-vo «SCADSoft», 2012. – 656 s.
9. Karpov V. V. *Prochnost i ustoychivost podkreplennykh obolochek vrashcheniya. / V. V. Karpov.* – M. : Fizmatlit, 2010.4.1 – 288 s.



10. Novozhilov V. V. *Lineynaya teoriya tonkih obolochek* / V. V. Novozhilov, K. F. Chernyh, E. I. Mihaylovskiy. – L. : Izd-vo Politehnika, 1991. – 656 s.
11. *Obshchaya nelineynaya teoriya uprugih obolochek* / S. A. Kabrits, E. I. Mihaylovskiy, P. E. Tovstik, K. F. Chernyh, i dr. – S.-Pb. : Izd-vo S.-Peterb. un-ta, 2002. – 388 s.
12. Perelmuter A. V. *Raschetnye modeli sooruzheniy i vozmozhnost ih analiza* / A. V. Perelmuter, V. I. Slivker. – M. : IASV, Izd-vo «SCADSoft», 2011. – 732 s.
13. Rikads R. B. *Metod konechnyh elementov v teorii obolochek i plastin* / R. B. Rikads. – Riga: Zinatne. – 1988. – 284 s.
14. Umanskiy A. A. *Spravochnik proektirovshchika raschetno-teoreticheskoy* / A. A. Umanskiy. – M. : Stroyizdat, 1973. – 416 s.
15. Zienkiewicz O. C. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, 7th Edition* / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, J. Z. Zhu. – Butterworth-Heinemann, 2013. – 752 p.
16. Mitchell A. R. *The Finite Element Method in Partial Differential Equations* / A. R. Mitchell, R. Wait. – London, 1981. – 216 p.
17. Liu G. R. *The Finite Element Method* / G. R. Liu, S. S. Quek. – Butterworth-Heinemann, 2013. – 464 p.
18. Reddy J. N. *An Introduction to the Finite Element Method* / J. N. Reddy. – McGraw-Hill, 2006. – 761 p.

© Избаш М.Ю., Крутова Н.А.  
Надійшла до редакції 20.04.2016