

© Р.В. ЧУДНА, О.А. ВЛАДИМИРОВ, 2013  
Р.В. Чудна, О.А. Владимиров

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В МЕДИЧНІЙ РЕАБІЛІТАЦІЇ

Національна медична академія післядипломної освіти  
імені П.Л.Шупика

Вступ. Розкривається проблема недостатності обґрунтування методології прийняття оптимальних рішень в медичній реабілітації.

Мета. Математично обґрунтувати оптимальні рішення при реабілітаційному втручанні.

Методи. Математичні методи теорії прийняття рішень, методи математичного моделювання. Результати. Виявлена зворотна залежність ефективності реабілітаційного втручання від часу його початку, і пряма залежність від кількості його короткострокових завдань, застосування на ранніх етапах лексикографічного методу для вибору засобів реабілітаційного втручання, а на більш пізніх - методу рангових відносин, від дотримання проміжку часу  $e \cdot \Delta t$  для профілактики ослоненій, і використання асимптотично оптимальних програм.

Висновки. Застосування математичних методів теорії прийняття рішень і методів математичного моделювання для медичної реабілітації сприяє оптимізації прийняття рішень при реабілітаційному втручанні.

Ключові слова: математичні моделі, прийняття рішень, медична реабілітація.

### ВСТУП

Актуальним питанням в медичній реабілітації сьогодні є обґрунтування методології прийняття ефективних рішень. На вирішення проблеми прийняття рішення в медицині спрямована місія організацій The Society for Medical Decision Making's, Medical Decisions Foundation, журналу Medical Decision Making (MDM) , окремі публікації: M. G. Myriam Hunink at all (2001), Scott A., Denaro C.P., Bennett C.J. and Mudge A.M. (2004), Kaplan R.M., Frosch D.L. (2005) та ін. Це питання не менш актуальне для фізичної реабілітації, оскільки від ефективності прийняття рішень в фізичній реабілітації залежить інвалідизація хворих, що створює соціальну ситуацію, навантаження на бюджет і впливає на фінансово-економічну ситуацію в країні. Проте, виявляється значна недостатність – практична відсутність системних досліджень з цього питання, що створює протиріччя між соціальним запитом та науковим забезпеченням в медичній реабілітації.

Метою дослідження стало попереднє математичне обґрунтування оптимальних рішень в реабілітації (дослідження операцій) з опорою на показник ефективності.

### МЕТОДИ

Дослідження базувались на обчислювальному апараті Теорії прийняття рішень і, зокрема, на пресупозиціях Теорії дослідження операцій [4; 6], які ми інтерпретували для фізичної реабілітації так:

- реабілітаційна допомога є керованим заходом – залежить від людини, яким способом вибираються параметри, які характеризують організацію процесу;

- рішення: вдале (ефективне), невдале (неефективне), - є певним набором параметрів, які залежать від фахівця;
- оптимальне рішення – таке, яке по вибраним ознакам є більш бажаним, ніж інші.

Дослідження оптимального варіанту реабілітаційної допомоги ми розглядали як дослідження системи дій, спрямованих на досягнення певної мети (відновлення, абілітація, адаптація) – відповідно теорії дослідження операцій [4; 6].

В дослідженні застосовувався метод математичного моделювання, в основу якого, як відомо, покладено ідентичність форми рівнянь і однозначність співвідношень між змінними в рівняннях оригіналу і моделі. Застосування методу математичного моделювання у випадку реабілітаційних програм виправдовується його «тріадною» структурою: «модель-алгоритм-програма».

Відповідно класифікації математичних моделей Пайерлса Р., Горбаня А.М., Хлебопруса Р.Г. [1; 3; 5] були вибрані моделі за принципом аналогії, евристичності та демонстрації можливостей.

Досліджували математичні моделі типових проблемних питань фізичної реабілітації, як еквівалентні, що відображують у математичній формі найважливіші їх якості — закономірності та закони, яким ті підчиняються.

### РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Реабілітаційну допомогу ми розглядали в її організованому варіанті – як розробку реабілітаційної програми – послідовне вирішення низки питань, що відповідає дискретній величині, яку можна описати послідовністю  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , де кожне наступне положення зумовлюється попереднім.

Реабілітаційне втручання математично представляється як деяка множина  $K : (X_j, X_{j+1}) \in K, j=1, 2, \dots, m-1$ . Тоді результат реабілітаційного втручання за  $j$ -й період описується величиною:  $f_j(X_j, X_{j+1})$ . Таким чином, ця математична модель демонструє залежність результату реабілітаційного втручання від начального і кінцевого положень та номера періода – часового проміжка, що закликає при розробці реабілітаційних програм акцентувати увагу фахівців на їх початку (рання реабілітація), закінченні (досягнення мети реабілітаційної програми) та кількості короткотермінових задач, які підводять до виконання мети.

Через численність факторів різної значимості, що їх необхідно враховувати в реабілітаційній програмі, процес її розробки ми прирівняли до методу рішення багатокритеріальної задачі, яка спирається на рангову інформацію про важливість критеріїв, де одна група критеріїв більш значима, ніж інша група критеріїв ( $T > S$ ), або обидві групи критеріїв рівнозначні ( $T \sim S$ ).

Існує декілька методів вирішення таких задач, з яких найбільш ефективними сьгодні вважаються лексикографічний метод та метод рангових рішень.

За лексикографічним методом збирається інформація про важливість окремих критеріїв (функцій) і визначаються мінімальні значення (функціональні показники), бажані по кожному з критеріїв. Формується множина допустимих альтернатив.

$$D = \{X_i : F_j(X) \geq F_j \min\}$$

У випадку розробки реабілітаційної програми, йдеться про визначення реабілітаційних задач по всіх показниках, що відхиляються від норми. На нашу думку, це актуально в ранній реабілітації, при субкомпенсованому стані хворих.

За методом рангових рішень, відповідно отриманій інформації критерії ранжируються за важливістю. Визначається найбільш значимий критерій  $j^*$ . Потім вирішується однокритеріальна задача:  $\max F_{j^*}(X)$ .

Якщо рішення виявляється єдиним, процес пошуку оптимального рішення закінчений. У випадку не єдиного рішення (декількох) формується множина допустимих рішень:  $D(2) = \{X \in D(1) : F_{j^*}(X) = F_{j^*}^{\max}\}$ , де  $F_{j^*}^{\max}$  – значення критерія  $j^*$ , яке досягається при рішенні задачі. Далі визначається наступний за значимістю критерій і вирішується задача для нього. Процес продовжується, доки не буде вичерпаний перелік критеріїв.

У випадку розробки реабілітаційних моделей, це значить, що при визначенні реабілітаційних задач керуються певними пріоритетами, наприклад, послідовним відновленням фізіологічних функцій при медичній моделі реабілітації, або покроковим формуванням певних рухових вмій при медико-соціальної абілітації та адаптивному фізичному вихованні. Таким чином, реабілітаційні задачі різного змісту вирішуються відокремлено у часі.

Таким чином, ми прийшли до висновку, що реабілітаційні задачі ранньої реабілітації фізіологічного спрямування слід вирішувати аналогічно лексикографічному методу, а задачі соціальної спрямованості – аналогічно методу рангових рішень.

Далі розглядали математичну модель прийняття рішення щодо характеру реабілітаційного втручання – вибір із різних методик. За Теорією прийняття рішень порівняння проводиться з допомогою функцій, що описують результати реабілітаційного втручання.

Будемо вважати, що план  $X_1$  краще плану  $X_2$  при реалізації з моменту  $i$ , якщо  $f_i(x_{11}, x_{21}) + f_{i+1}(x_{12}, x_{22}) + \dots + f_{i+k-1}(x_{(k-1)1}, x_{(k-1)2}) > f_i(x_{12}, x_{22}) + f_{i+1}(x_{22}, x_{32}) + \dots + f_{i+k-1}(x_{(k-1)2}, x_{k2})$

Позначимо  $X_1 R(i) X_2$ , якщо виконана ця нерівність, де  $R(i)$  – бінарне відношення на множині планів, які задають упорядкування планів відношенням "краще".

Ясно, що упорядкованість програми на  $k$  кроків, яка визначається з допомогою бінарного відношення  $R(i)$  може залежати від  $i$ . Тобто, математична модель доводить, що ефективність реабілітаційної програми залежить від того, з якого моменту  $i$  її починають здійснювати.

Розглянемо закономірності впорядкування плану (горизонту) програми докладніше.

(I). Припустимо, що  $(x, y) \in K$ ,  $(x', y') \in K$

Вірно одне з двох: або

$$f_i(x, y) > f_i(x', y')$$

для всіх  $i = 1, 2, \dots, m-1$ ;

або

$$f_i(x, y) \leq f_i(x', y')$$

для всіх  $i = 1, 2, \dots, m-1$ ;

(II). Припустимо  $(x, y) \in K$ ,  $(y, z) \in K$ ,  $(x', y') \in K$ ,  $(y', z') \in K$

Вірно одне з двох:

або

$$f_i(x, y) + f_{i+1}(y, z) > f_i(x', y') + f_{i+1}(y', z')$$

для всіх  $i = 1, 2, \dots, m-2$ ;

або

$$f_i(x, y) + f_{i+1}(y, z) \leq f_i(x', y') + f_{i+1}(y', z')$$

для всіх  $i = 1, 2, \dots, m-2$ .

Як відомо [1], при деяких внутрішньоматематичних умовах регулярності з умов стійкості впорядкованості програм (I) і (II) витікає існування констант  $\alpha > 0$  та  $d_j, j=2, \dots, m-1$ , таких, що

$$f_i(x, y) = \alpha^{i-1} f_1(x, y) + d_i,$$

де  $j=2, \dots, m-1$

Оскільки додавання константи не змінює точки, в якій функція досягає максимуму, останнє співвідношення означає, що умови стійкості впорядкованості програм (I) і (II) характеризують моделі з дисконтуванням серед всіх моделей динамічного програмування. Це положення не потребує коментарів.

У випадку моделі без дисконтування з  $\alpha = 1$

$$F_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{K: j \leq m-1} f(x_j, x_{j+1}) \rightarrow \max$$

$(x_j, x_{j+1}) \in K, j=1, 2, m-1$ .

При кожному  $m$  (в реабілітації – це період часу) існує оптимальна програма  $(x_1(m), x_2(m), \dots, x_m(m))$ , при якій досягає максимуму функція, яка оптимізується. Цей висновок спрямовує фахівців реабілітації на необхідність цілеполагання (визначення термінової задачі та її досягненні) для кожного проміжку часу відновного періоду, при кожному реабілітаційному втручанні.

Оптимальне програмування, математично, прирівнюється до побудови нескінченної послідовності  $(y_1, y_2, \dots)$ , в якій початковий відрізок довжини (в реабілітації – це період часу)  $m$   $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  дає приблизно таке ж значення функціонала, який оптимізується як значення для оптимальної програми  $(x_1(m), x_2(m), \dots, x_m(m))$ . Цей математичний висновок підкреслює значущість ранньої реабілітації для кінцевого результату реабілітаційної допомоги в цілому.

Відновлення порушеної фізіологічної функції ми прирівняли до асимптотичної функції – такої, що не досягає свого 0. В такому разі, математично доводиться реальність асимптотичних оптимальних програм через нескінченні послідовності  $(y_1, y_2, \dots)$ :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F_m(x_1(m), x_2(m), \dots, x_m(m))}{F_m(y_1, y_2, \dots, y_m)} = 1.$$

Звідси, отримуємо відповідь на питання про горизонт програмування (тривалість реабілітаційної програми). Математична модель доводить, що необхідно використовувати асимптотично оптимальні програми, які не залежать від горизонту програмування. Тобто, реабілітаційні програми повинні переходити в тренувальні – тезис, добре відомий з імперичних спостережень.

Для уточнення закономірностей максимізації сумарних результатів реабілітаційного втручання застосували стандартну задачу динамічного програмування:

$$F_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{k_j \leq m-1} f_j(x_j, x_{j+1}) \rightarrow \max,$$

$$(x_j, x_{j+1}) \in K, j = 1, 2, \dots, m-1.$$

Реабілітаційна програма  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  повинна задовольняти обмеженням, за яким досягає максимуму функціонал  $F_m$ . Передбачається, що множина можливих переходів  $K$  (зміна реабілітаційних задач і, відповідно їм, програм) є такою, що область визначення функціонала  $F_m$  не пуста. При звичних математичних припущеннях максимум досягається.

Для прогнозування кількості небажаних подій в процесі систематичних реабілітаційних занять, на нашу думку, можна застосовувати розподіл Пуассона, який виникає в теорії потоків подій. Як відомо, для найпростішого потоку подій із постійною інтенсивністю  $\lambda$ , кількість подій за час  $t$  має розподіл Пуассона з параметром  $\lambda = \lambda t$ . Таким чином, вірогідність того, що за час реалізації реабілітаційної програми ( $t$ ) не виникне небажаних подій, дорівнює  $e^{-\lambda t}$ . Функція розподілу довжини проміжка часу між небажаними подіями є експоненціальною.

Прогноз результату реабілітаційного втручання – реабілітаційний прогноз – ми розглядали, виходячи з його визначення, як оцінки ймовірності відновлення рівня здоров'я та функціональних можливостей пацієнта, які були у нього до виникнення хвороби. Реабілітаційний прогноз залежить від суб'єктивних психологічних чинників – психологічних позицій пацієнта і реабілітолога. Розрахунок його математичної моделі здійснювали за методологією Теорії перспектив (Теорія суб'єктивної корисності).

Розглянуто співвідношення суб'єктивної корисності для пацієнта його повного відновлення (А) з ймовірнісною комбінацією його часткового відновлення (В) або інвалідизації (С). Суб'єктивна корисність – це фізичне благополуччя (А), психологічне благополуччя від реалізації очікуваного результату відповідно стереотипній самооцінці: "я - здоровий" (А), "я - хворий" (В), соціальне благополуччя (самоактуалізація в професії (А), гарантоване забезпечення по інвалідності (С)).

Співвідношення суб'єктивної корисності для реабілітолога успішного результату його втручання (А) ми розглядали із ймовірнісною комбінацією його низьким рівнем кваліфікації (В) або негативним ставленням до реабілітаційного процесу (С). У цьому випадку суб'єктивна корисність у реалізації самооцінки професіонала: позитивна (А), усвідомлення недостатнього рівня власної кваліфікації (В), негативна (С)).

Для кожного з індивідів (пацієнт, реабілітолог) можливі варіанти результату реабілітаційного процесу:

- якщо індивід надає перевагу результату А перед результатом В та С, то він надасть перевагу результату А перед комбінацією В і С, що сприятиме реабілітаційному процесу і його позитивному результату;
- якщо результати В і С є більш бажаними для індивіда ніж А — то навпаки;

- якщо результат А є більш бажаним ніж результат В, але менш бажаним ніж С, то корисність результатів А, В, С вираховується математично: для індивіда, який оцінює можливий результат  $x_i$  з корисністю  $u(x_i)$  та оцінює ймовірність появи результату  $x_i$  як  $P(x_i)$ , де  $P(x_i)$  – індивідуальна функція розподілу ймовірності. Позитивний результат реабілітаційного втручання (корисність) можна представити у вигляді:

$$U = \sum_{i=1}^n P(x_i)U(x_i)$$

Таким чином, прогноз реабілітаційного процесу є сумою отриманих результатів для кожного з його учасників (пацієнт, реабілітолог), де  $x_i$  - можливий результат,  $u(x_i)$  – його корисність,  $P(x_i)$  - ймовірність появи результату  $x_i$ .

### ВИСНОВКИ

- Математичні моделі Теорії прийняття рішень, застосовані для медичної реабілітації виконують функцію прогнозування в типових ситуаціях реабілітаційної допомоги, що дозволяє розглядати їх як важливе підґрунтя наукового апарату процесу реабілітації.

- Отримані результати дослідження математичних моделей, прийняття рішення в реабілітаційній допомозі висувають такі принципи реабілітаційного втручання:

- ефективність реабілітаційної програми залежить від того, з якого моменту і її починають здійснювати;

- при розробці реабілітаційних програм необхідно акцентувати увагу на їх початку (рання реабілітація), закінченні (досягнення мети реабілітаційної програми) та кількості короткострокових задач, які підводять до виконання мети;

- реабілітаційні задачі ранньої реабілітації фізіологічного спрямування слід вирішувати лексикографічним методом – одночасно відновлювати всі порушені функції, а задачі соціальної спрямованості – методом рангових рішень – відновлювати рухові уміння і навички у послідовності їх соціальної пріоритетності для пацієнта;

- необхідно використовувати асимптотично оптимальні програми, які не залежать від горизонту програмування, тобто, реабілітаційні програми повинні переходити в тренувальні (тезис, добре відомий з імперичних спостережень);

- ймовірність того, що за час реалізації реабілітаційної програми (t) не виникне небажаних подій, дорівнює  $e^{-\lambda t}$ ;

- позитивний результат реабілітаційного втручання визначається за сумою

$$U = \sum_{i=1}^n P(x_i)U(x_i)$$

для кожного з учасників реабілітаційного втручання (пацієнт, реабілітолог), де  $x_i$  - можливий результат,  $u(x_i)$  – його корисність,  $P(x_i)$  - ймовірність появи результату  $x_i$ .

### Література

1. Грешилов А. А. Математические методы принятия решений. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2006.

2. Литвак Б. Г. Разработка управленческого решения. М.: Издательство «Дело». 2004.
3. Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей. - 3-е изд., испр. М.: КомКнига. 2007.
4. Орлов А. И. Теория принятия решений: учебник. М.: Экзамен. 2006.
5. Петров А. А. Принципы построения моделей. М.: ФАЗИС; ВЦ РАН. 2000.
6. Хемди А. Таха. Введение в исследование операций. 7-е изд. М.: «Вильямс». 2007: 549-594.
7. Charles C., Gafni A. and Whelan T. Shared decision-making in the medical encounter: What does it mean (or it takes at least two to tango)? *Social Science & Medicine* 44.5. 1997: 681-692.
8. Epstein R.M., Alper B.S. and Quill T.E. Communicating evidence for participatory decision making. *JAMA* 291.19. 2004: 2359-2366.
9. Frosch DL, Каплан RM совместного принятия решений в клинической медицине: прошлых исследований и будущие направления . *Am. J. Med.* Предыдущая.1999; 17 (4): 285-294
10. Myriam-Hanink M.G., Glasziou P. at all. - Decision Making in Health and Medicine: Integrating Evidence and Values. Cambridge University Press. 2001, 1.
11. O'Connor A.M., Tugwell P., Wells G.A., Elmslie T., Jolly E., Hollingworth G., McPherson R., Bunn H., Graham I., and Drake E. A decision aid for women considering hormone therapy after menopause: Decision support framework and evaluation. *Patient Education and Counseling* 33.3. 1998: 267-279.
12. Research Triangle Institute. Consumer health informatics and patient decision-making. (AHCPR Pub. No. 98-N001). Agency for Health Care Policy and Research. Prepared by James Hersey, Jennifer Matheson and Kathleen Lohr at the Research Triangle Institute. 1997.
13. Scott A., Denaro C.P., Bennett C.J. and Mudge A.M. Towards more effective use of decision support in clinical practice: what the guidelines for guidelines don't tell you. *Internal Medicine Journal* 34.8. 2004: 492-500.
14. Stuart B.M., Harry L.G.II Decision Making in Medicine: An Algorithmic Approach. Mosby. 2009.

Р.В. Чудна, А.А. Владимиров

## Математические модели принятия решений в медицинской реабилитации

Национальная медицинская академия последипломного образования  
имени П.Л. Шупика

Введение. Раскрывается проблема недостаточности обоснования методологии принятия оптимальных решений в медицинской реабилитации.

Цель. Математически обосновать оптимальные решения при реабилитационном вмешательстве.

Методы. Математические методы теории принятия решений, методы математического моделирования.

Результаты. Выявлена обратная зависимость эффективности реабилитационного вмешательства от времени его начала, и прямая зависимость от количества его

краткосрочных задач, применения на ранних этапах лексикографического метода для выбора средств реабилитационного вмешательства, а на более поздних - метода ранговых отношений, от соблюдения промежутка времени  $e^{-Lt}$  для профилактики осложнений, и использования асимптотически оптимальных программ.

Выводы. Применение математических методов теории принятия решений и методов математического моделирования для медицинской реабилитации способствует оптимизации принятия решений при реабилитационном вмешательстве.

Ключевые слова: математические модели, принятия решений, медицинская реабилитация.

R.V. Chudna, O.A. Vladymyrov

### Mathematical models of decision-making in medical rehabilitation

Shupyk National Medical Academy of Postgraduate Education

Introduction. The relevance the contradiction between the social need for physical rehabilitation of patients and lack of a systematic approach to decision making in rehabilitation intervention.

Aim. Mathematical study of optimal decision making in physical rehabilitation (Operations Research).

Methods. Computational theories of decision making presupposition theory of operations research, mathematical models of rehabilitation interventions at different stages.

Results. Mathematical models of decision theory prediction function in typical situations rehabilitative care that can be used as a scientific basis for their rehabilitation process.

Key words: mathematical models, decision-making, medical rehabilitation.