УДК 622.822

ДИФФУЗИОННАЯ МОДЕЛЬ УСТОЙЧИВОСТИ ЗЕМЛЯНОГО ПОЛОТНА

Кандидаты техн. наук С.В. Воронин, А.А. Скорик,
студ. К.П. Лоцман

ДИФУЗІЙНА МОДЕЛЬ СТІЙКОСТІ ЗЕМЛЯНОГО ПОЛОТНА

Кандидати техн. наук С.В. Воронін, О.О. Скорик,
студ. К.П. Лоцман

DIFFUSION MODEL OF SUBGRADE STABILITY

Cand. of techn. sciences S.V. Voronin, Cand. of techn. sciences O.O. Skoryk, Student K.P. Lotsman

В процессе эксплуатации железнодорожного пути, в результате ряда природных факторов и действующих нагрузок земляное полотно теряет устойчивость. Для оценки устойчивости предложена диффузионная модель, при расчете которой решаются задачи выявления главных факторов устойчивости и эволюции устойчивости, как склонов, так и земляного полотна в целом.

Ключевые слова: *диффузия, координаты, ряд Фурье, уравнение баланса, профиль, уклон, балластная призма, склон, устойчивость.*

У процесі експлуатації залізничної колії, в результаті ряду природних факторів і діючих навантажень земляне полотно втрачає стійкість. Для оцінки стійкості запропонована дифузійна модель при розрахунку якої вирішуються завдання виявлення головних факторів стійкості і еволюції стійкості як схилів так і земляного полотна в цілому.

Ключові слова: *дифузія, координати, ряд Фур'є, рівняння балансу, профіль, ухил, баластна призма, схил, стійкість.*

In the operation of the railway line, as a result of a number of natural factors and downloads terzetto roadbed stability. To assess the sustainability of proposed diffusion model in the calculation of which solves the problem to identify the main factors of stability and evolution of the stability of the slopes as well as the subgrade as a whole. These results give a clear mathematical formulation of the specific methods and approaches to the characterization of the stability of the roadbed. A solution to the problem of the roadbed on the basis of the diffusion model. Spatial coordinates of the model coefficients are variable, depending on many factors, chief among them the intensity of the dynamic effects of train loads. The model allows us to construct the concept of evolution of the subgrade, and to calculate the rate of undercutting, highlight the unstable mode of sustainable development.

Keywords: *diffusion, coordinates, Fourier series, the balance equation, profil, slope, ballast prism slope.*

Актуальность проблемы. При изучении состояния земляного полотна так или иначе возникает необходимость выявления причин его деформаций. Особенно велико количество обрушений, сплывов и т.д. на насыпях из глинистых грунтов. Причин нарушения устойчивости много и изучены они достаточно хорошо [4]. Но при этом оценка устойчивости насыпи производится на основе статистических расчетных схем, полученные при этом коэффициенты устойчивости не позволяют прогнозировать возможность возникновения деформаций.

В этом случае построения диффузионных моделей длительно эксплуатируемых насыпей, которые позволят выявить причину и кинетику деформаций.

Цель статьи. Построить систему уравнений диффузионной модели земляного полотна, позволяющих выделить основные факторы устойчивости данного объекта

Основу диффузионной модели составляет уравнение баланса материала [3]

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \qquad (1)$$

где $q(x,t)$ — расход материала в каждой точке склона в произвольный момент времени t;

$y(x,t)$ — координата относительной высоты в точке x на профиле земляного полотна в произвольный момент времени t.

Уравнение выводится на основании вывода баланса материала в элементарном объеме подвижного слоя грунта или потока воды. Принимая условие, что расход материала пропорционален градиенту высот (уклону) имеем

$$q = -K(x,t)\frac{\partial y}{\partial t} \qquad (2)$$

после подстановки выражения (1) в уравнение баланса (2) выводим диффузионную модель развития склона насыпи земляного полотна.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(x,t)\frac{\partial y}{\partial x}\right). \qquad (3)$$

Модель по своей структуре аналогична тем моделям, которые используются в теориях теплопроводности и диффузии, при этом выражение (3) аналогично эмпирическим законам Фурье и Фика, соответственно, в теориях теплопроводности и диффузии. Коэффициент в уравнении постоянен, что соответствует случаю постоянства интенсивности увлажнения грунта. Его структуры и свойств. Как оказалось, [5] эта модель хорошо описывает долговременную эволюцию склонов земляного полотна, выполаживание сплывы или оползание откосов. Диффузионные модели являются наиболее адекватными качественной концепции развития насыпи [4].

Коншиным Г.Г. приведен широкий круг краевых задач для уравнения диффузии с постоянным коэффициентом

$$\frac{\partial y}{\partial t} = K\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \qquad (4)$$

Уравнение соответствует определенным схемам (изменение структуры, свойства и состояния грунта, появление трещин и ослабленных по прочности зон, образование балластных корыт и др). Им также рассмотрен ряд пространственных задач. Математические решения всех задач взяты из фундаментальной работы по теории теплопроводности твердых тел [3].

В уравнениях частная производная отметок высот по времени $\frac{\partial y}{\partial t}$ в зависимости от своего знака характеризует скорость деформации (денудации или аккумуляции) на склоне. Так, если расход материала q вниз по склону на некотором его участке нарастает, то правая часть уравнения баланса будет отрицательной ($-\frac{\partial q}{\partial x}<0$) и, следовательно, произойдет денудация участка склона ($\frac{\partial y}{\partial t}<0$). В противоположном случае происходит аккумуляция материала. При этом предполагается, что ось X направлена от балластной призмы (или бровки склона) к основной площадки земляного полотна

Вторая частная производная в уравнении характеризует выпуклость или вогнутость профиля склона в зависимости от своего знака. Характер кривизны профиля связан однозначно со скоростью деформации согласно уравнению (4) следующим образом. Из анализа этого уравнения следует, как известно, что условие $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}<0$ соответствует выпуклому участку профиля склона. Тогда из этого уравнения получаем $\frac{\partial y}{\partial t}<0$, а это, как было показано выше, соответствует наличию на этом участке денудации. Таким образом, на выпуклом участке склона происходит денудация.

При $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}>0$, соответствующей вогнутому участку профиля склона, имеем $\frac{\partial y}{\partial t}>0$ и по данной модели на вогнутом участке склона происходит аккумуляция. Указанное справедливо только в случае постоянного коэффициенте K.

Однако вышеприведённые уравнения учитывают не все факторы. Интенсивность динамического воздействия поездных нагрузок, расползание и др. приводит к необратимым деформациям. Для учета этих фактором мы решали задачу моделирования развития склонов насыпей на ограниченном отрезке с переменным по оси X коэффициентов, при этом было получено два типа рядов Фурье [1].

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_0 X\frac{\partial y}{\partial x}\right),\ y(l,t)=0,\ y(x,0)=f(x), \quad (5)$$

где X — расстояние, отсчитываемое вниз по склону в горизонтальном направлении;

$y(x,t)$ — высота соответствующая точке X и моменту времени t;

l — общая длина моделируемого склона;

$f(x)$ — начальный профиль склона;

K_0 — постоянная величина зависящая от интенсивности нагрузок, интенсивности осадков, физических свойств поверхности склона и транспортируемых потоком частиц.

Решение задачи получим в виде

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\exp\left(\frac{K_0\mu_n^2 t}{4l}\right)\mathrm{I}_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right); \quad (6)$$

$$C_n=\frac{2}{\mathrm{I}_1^2(\mu_n}\int_0^1 zf(lz^2)I_0(\mu_n z)dz,$$

где μ_n - корни уравнения Бесселя $I_0(z)=0$ [2].

Из последнего решения получим решение при большом t когда члены ряда, начиная со второго, пренебрежимо малы из-за экспоненциального характера, важное при анализе долговременной эволюции склонов.

$$y_{per}(x,t) = C_1 \exp(-\frac{K_0 \mu_n^2 t}{4l}) \mathrm{I}_0(\mu_1 \sqrt{\frac{x}{l}}) \,. \tag{7}$$

Такое решение называется регулярным. Оно показывает, что профиль склона со временем, сохраняет выпуклую форму (форму описываемую бесселевой функцией) понижается, выполаживается и все медленнее и медленнее стремится к горизонтальной поверхности, соответствующей предельному выравниванию склона.

Исследуем некоторые варианты формирования предельных профилей, исходя из стационарного уравнения (5), которое получается в случае, если положить $\frac{\partial y}{\partial t}$=0, и их соответствие продольному профилю, полученному выше из анализа нестационарного регулярного решения (7). Рассмотрим два варианта при нулевом и ненулевом расходе воды в начальной (верхней) точке земляного полотна.

Первый интеграл стационарного уравнения при нулевом расходе воды в верхней точке склона равен $K_0 X \frac{\partial y}{\partial x} = C_1$ и так как при $X=0$ уклон ограничен, то $C_1=0$, а значит при $X>0$ уклон склона должен быть везде нулевым $\frac{\partial y}{\partial x}$=0, чтобы соблюдалось условие $C_1=0$. Таким образом, продольный профиль полностью должен выравниваться $y(x)=C_2=0$ при дополнительном условии наличия постоянного нулевого базиса денудации $y(l)=0$. Решение нестационарного уравнения (7) показывает, что уже в стадии регулярного режима уклон в начальной водораздельной точке становится равным нулю, что следует из анализа регулярного решения (5). Понижение отметок $y(X=0)$ при нулевом уклоне и при постоянном базисе денудации приведет к более быстрому понижению верхних частей земполотна. Это в свою очередь приведет к формированию выпуклой формы склона и дальнейшему полному выравниванию.

Предположим, что расход воды в верхней (начальной) точке не равен нулю $q(x)=\alpha X+q_0$. При этом формируется постоянный расход воды q_0. В этом случае решение будет в корне отличаться от предыдущего и будет формироваться вогнутый устойчивый профиль с предельной формой

$$y(x) = \frac{q_0}{\alpha\kappa} \ln(\frac{q_0 + \alpha l}{q_0 + \alpha X}) \,, \tag{8}$$

где q_0 — значение расхода материала в точке $X=0$.

Здесь первая константа интегрирования связана с уклоном выражением $\frac{\partial y}{\partial x} = C_1 / \kappa(\alpha x + Q_0)$, то есть уклон вниз по склону убывает $(C_1 \neq 0)$**,** что аналогично формированию вогнутого профиля. Но, чтобы C_1 была константой, необходимо предположить постоянный расход материала в точке, $X=0$ или задать постоянную высоту профиля в этой точке. И то и другое в процессе долговременной эволюции реальных склонов не соблюдается. Ясно, что поступление материала в точку $X=0$ (в процессе саморазвития) может только уменьшаться из-за выколачивания, что будет соответствовать стремлению к нулю расхода материала в точке, $X=0$ и мы снова придем к первому варианту модели $q = -\alpha\kappa x \frac{\partial y}{\partial x}$ Допустим, что все-таки расход материала, поступающий на склон с основной площадки, постоянен. Тогда следует предположить прогрессивное понижение этой области, а вместе с ней и высоты начальной точки склона, то есть опять, в итоге, приходим к полному выравниванию склона $y(x)=0$. Таким образом, отсюда следует, что выработанный (устойчивый) вогнутый профиль сам эволюционирует в сторону выпрямления и выколачивания.

Отметим, что согласно модели с линейно возрастающим расходом воды, вогнутые склоны будут размываться до тех пор, пока они не достигнут устойчивого (динамически-равновесного) состояния, которое соответствует предельному решению нестационарного уравнения или решению стационарного уравнения, которые совпадают. В то же время, если предположить, что исходный профиль лежит ниже устойчивого при заданном на него поступлении материала с постоянным расходом q_0 с основной площадки земляного полотна, то на нем будет происходить аккумуляция этого материала до тех пор, пока он не достигнет равновесного состояния.

Выводы:

1. Полученные результаты дают четкую математическую постановку, конкретные методы и подходы к определению параметров устойчивости земляного полотна.

2. Получено решение задачи развития деформаций земляного полотна, исходя из диффузионной модели. Пространственные координаты коэффициента модели переменны, зависят от многих факторов, главные из которых интенсивность динамического воздействия поездных нагрузок.

3. Модель позволяет построить концепцию эволюции земляного полотна, а также рассчитать скорость подрезания, выделить неустойчивый режим развития от устойчивого, а также сформировать подходы к управлению устойчивостью земляного полотна при эксплуатации железных дорог.

Список использованы источников

1. Зельдович, Я.Б. Элементы математической физики [Текст] / Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкинс. – М.: Наука, 1973. – 325 с.

2. Камке, Э. Спрвочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка [Текст] / Э. Камке. – М.: Наука, 1966. – 260 с.

3. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел [Текст] / Г. Карслоу, Д. Егер. – М.: Наука, 1964. – 487 с.

4. Коншин, Г.Г. Прогнозирование внезапных деформаций насыпей под поездами [Текст] / Г.Г. Коншин // Путь и путевое хозяйство. – 2009. – №12. – С. 28-31.

5. Пикалов, А.С. Координатные методы контроля геометрии земляного полотна [Текст] / А.С. Пикалов, В.В. Щербаков, В.М. Круглов // Весник ПГУПС. – Санкт-Петербург: ПГУПС, 2010. – С. 121-124.

Рецензент д-р техн. наук, профессор Н.П. Ремарчук

Воронін Сергій Володимирович, канд. техн. наук, доцент, завідувач кафедри будівельних, колійних та вантажно-розвантажувальних машин Української державної академії залізничного транспорту. Тел. (057) 730-10-66. E-mail: voronin.sergey@ukr.net.
Скорик Олексій Олексійович, канд. техн. наук, декан будівельного факультету, доцент кафедри колії та колійного господарства Української державної академії залізничного транспорту.
Лоцман К.П., студентка Української державної академії залізничного транспорту.

Voronin Sergey, kand. tekhn. sciences, associate professor, manager of department of build, travel and fraight-unloading machines. Ukrainian state academy of railway transport. E-mail: voronin.sergey@ukr.net.
Skoryk Alexei, dean building department, kand. tekhn. sciences, associate professor of Department “Road and Track acilities”. Ukrainian state academy of railway transport.
Lotsman K., student of Ukrainian state academy of railway transport.