УДК 517.968+517.956

ГРАНИЧНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ ТОНКИХ ПРУЖНИХ ПЛАСТИН, ЩО ПОСЛАБЛЕНІ ТРІЩИНАМИ

К-т фіз.-мат. наук Ю.С. Шувалова

ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТОНКИХ УПРУГИХ ПЛАСТИН, ОСЛАБЛЕННЫХ ТРЕЩИНАМИ

К-т физ.-мат. наук Ю.С. Шувалова

BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS IN DYNAMIC PROBLEMS FOR THIN ELASTIC PLATES WITH CRACKS

Candidate of Physico-mathematical Sciences Yu.S. Shuvalova

В роботі розглянуто задачі динаміки тонких пружних пластин, що послаблені тріщинами, в рамках моделі Кірхгофа. За допомогою теорії потенціалів ці задачі зводяться до систем граничних рівнянь. Одержані граничні рівняння дозволяють визначати зсув будь-якої точки пластини, в довільний момент часу без використання методів типу скінченних різниць або скінченних елементів.

***Ключові слова**: тонкі пружні пластини, нестаціонарні граничні рівняння, тріщина*

В работе рассмотрены задачи динамики тонких упругих пластин, ослабленных трещинами, в рамках модели Кирхгофа. С помощью теории потенциалов эти задачи сводятся к системам граничных уравнений. Полученные граничные уравнения позволяют определять смещение любой точки пластины в произвольный момент времени без использования методов типа конечных разностей или конечных элементов.

***Ключевые слова**: тонкие упругие пластины, нестационарные граничные уравнения, трещина.*

A problem of the dynamics for thin elastic plates weakened by cracks in the framework of Kirchhoff model is under consideration. With the help of the potential theory this problem is reduced to a system of boundary equations. The solutions of these problems are represented by sums of single and double layer potentials. The boundary equation systems are obtained in these problems accounting jump formulas. The unique solvability of these problems is proved in an one-parameter scale of the Sobolev spaces. Obtained in the dissertation results create the sound base for constructing corresponding convergent numerical methods. The resulting boundary equations allow to determine the displacement any point of the plate at any given time without the use of methods such as finite differences and finite elements.

***Key words**: thin elastic plate, non-stationary system of boundary equation, crack.*

Вступ. Проблеми динаміки тонких пружних пластин присутні в багатьох конструкціях, що використовуються у різних галузях фізики і механіки. Тому дуже актуальною є задача розрахунку напруг та зсувів, що виникають у процесі їх коливань. У роботі запропонований варіант методу теорії потенціалів, що дозволяє звести поставлену задачу до розв'язання систем нестаціонарних граничних рівнянь. Метод дослідження базується на схемі, яка наведена в [1–2] для задач динамічної теорії пружності.

Позначення та постановка задачі. Нехай Γ_0 – зв'язна частина замкненої кривої Γ класу C^2. Розглянемо тонку пружну пластину товщини h, яка займає область $\Omega\times\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right]$, де $\Omega=\mathbf{R}^2\setminus\overline{\Gamma}_0$, Γ_0 – тріщина у пластині. Будемо розрізняти боки Γ_0 називаючи їх берегами розрізу. Вектор зсуву точки (x,x_3) пластини, $x=(x_1,x_2)$, має вигляд $\left(-x_3\partial_1 u(x,t),-x_3\partial_2 u(x,t),u(x,t)\right)$, де $u(x,t)$ – зсув точки x серединної площини пластини в напрямку, перпендикулярному цій площині в недеформованому стані, $\partial_i=\partial/\partial x_i, i=1,2$. Функція $u(x,t)$ є розв'язком змішаної задачі, яку можна записати так

$$
\mathrm{I}_0:\quad
\begin{array}{lll}
\partial_t^2 u(x,t)+D\Delta^2 u(x,t)=0, & & (x,t)\in\Omega\times\mathrm{R}_+,\\
u(x,0)=\partial_t u(x,0)=0, & & x\in\Omega,\\
\begin{cases} u^+(x,t)=f_1^+(x,t), \\ \partial_n u^+(x,t)=f_2^+(x,t), \end{cases} & \begin{array}{l} u^-(x,t)=f_1^-(x,t),\\ \partial_n u^-(x,t)=f_2^-(x,t), \end{array} & (x,t)\in\Gamma_0\times\mathrm{R}_+,
\end{array}
\tag{1}
$$

де індексами "±" позначені граничні значення відповідних функцій на берегах розрізу Γ_0, $D=\dfrac{\hat{D}}{\rho h}$, ρ – поверхнева щільність пластин, $\hat{D}$ – їх циліндрична жорсткість. $\mathrm{R}_+=(0,\infty)$, $\partial_t=\partial/\partial t$, ∂_n – похідна по зовнішньої нормалі $n(x)=\left(n_1(x),n_2(x)\right)$ до контуру Γ

Динамічні потенціали простого і подвійного шарів. Нехай $\Phi(x,t)$ – фундаментальний розв'язок рівняння коливань пластини, який задовольняє рівняння

$$
\partial_t^2\Phi(x,t)+D\Delta^2\Phi(x,t)=\delta(x,t),
$$
$$
\Phi(x,t)=0,\qquad t<0,
$$

$\delta(x,t)$ — функція Дірака. Нескладні обчислення дають явний вигляд фундаментального розв'язку:

$$
\Phi(x,t)=\frac{\theta(t)}{4\pi\sqrt{D}}\,\mathrm{si}\left(\frac{|x|^2}{4\sqrt{D}t}\right),
$$

де $\mathrm{si}(z)=-\int\limits_z^\infty\frac{\sin\mu}{\mu}d\mu$ – інтегральний синус, $\theta(t)$ – характеристична функція півосі $(0,\infty)$.

Динамічним потенціалом простого та подвійного шару з визначеною на $\Sigma=\Gamma\times\mathrm{R}$ двохкомпонентною щільністю $\vec{\alpha}(x,t)$ та $\vec{\beta}(x,t)$ назвемо функції

$$
(V\vec{\alpha})(x,t)=\int\limits_\Sigma\left\{\Phi(x-y,t-\tau)\alpha_1(y,\tau)+\partial_{n,y}\Phi(x-y,t-\tau)\alpha_2(y,\tau)\right\}ds_y\,d\tau,
$$
$$
(W\vec{\beta})(x,t)=\int\limits_\Sigma\left\{Q_y\Phi(x-y,t-\tau)\beta_1(y,\tau)-M_y\Phi(x-y,t-\tau)\beta_2(y,\tau)\right\}ds_y\,d\tau,
$$

де $\partial_{n,y}$ – операція нормальною похідної, що діє по змінній *у*. Q_y, M_y – чинні по змінній *у* операції узагальненої сили, що перерізує, і моменту, що згинає.

$$Qu = -D\left(\partial_n \Delta u + (1-\nu)\partial_\tau \left[n_1 n_2 (\partial_2^2 u - \partial_1^2 u) + (n_1^2 - n_2^2)\partial_1 \partial_2 u\right]\right),$$
$$Mu = -D\left(\Delta u + (1-\nu)\left[2n_1 n_2 \partial_1 \partial_2 u - n_2^2 \partial_1^2 u - n_1^2 \partial_2^2 u\right]\right)$$

∂_τ – похідна в напрямку дотичного до Γ орта τ, отриманого з n поворотом на кут $\pi/2$ проти годинникової стрілки.

Очевидно, принаймні, для гладких на Σ фінітних щільностей обидва потенціали задовольняють у $R^2 \setminus \Gamma$ однорідному рівнянню коливань пластини. Якщо ж щільності рівні нулю при $t < 0$, тоді обидва потенціали задовольняють нульові початкові умови. Потенціал простого шару і його перші похідні неперервні при переході точки через граничну поверхню. Формули стрибків для потенціалів простого і подвійного шарів мають вид

$$\begin{gathered}
\left(W\vec{\beta}\right)^{\pm}(x,t) = \mp\beta_1(x,t) + \left(W\vec{\beta}\right)^{0}(x,t),\\
\left(\partial_n W\vec{\beta}\right)^{\pm}(x,t) = \mp\beta_2(x,t) + \left(\partial_n W\vec{\beta}\right)^{0}(x,t),\\
\left(QV\vec{\alpha}\right)^{\pm}(x,t) = \pm\alpha_1(x,t) + \left(QV\vec{\alpha}\right)^{0}(x,t),\\
\left(-MV\vec{\alpha}\right)^{\pm}(x,t) = \pm\alpha_2(x,t) + \left(-MV\vec{\alpha}\right)^{0}(x,t),
\end{gathered} \qquad (x,t) \in \Sigma_+, \qquad (2)$$

де верхні індекси "$\pm$" позначають граничні значення функцій при переході точки (x,t) на Σ_+ з $G^{\pm}$ відповідно, верхній індекс "0" позначає пряме значення відповідного інтеграла.

Подання розв'язків задачі (1) сумою потенціалів простого та подвійного шару, приводить до системи граничних рівнянь:

$$\begin{gathered}
\left(W\vec{\beta}\right)^{\pm}(x,t) + \left(V\vec{\alpha}\right)^{\pm}(x,t) = f_1^{\pm}(x,t),\\
\left(\partial_n W\vec{\beta}\right)^{\pm}(x,t) + \left(\partial_n V\vec{\alpha}\right)^{\pm}(x,t) = f_2^{\pm}(x,t)
\end{gathered} \qquad (x,t) \in \Gamma_0 \times (0;\infty) \qquad (3)$$

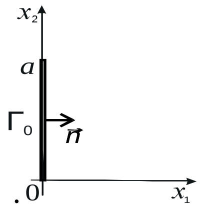

Рис.1 Нескінченна пластина з тріщиною

Однозначну розв'язність задачі (3) булу доведено у [3] в однопараметричній шкалі просторів соболевського типу.

Застосування методу потенціалів до тонкої пружної пластини. Розглянемо тонку пружну пластину прямокутної форми з тріщиною.

Враховуючи формули стрибків (2), з системи (3) маємо явний вид інтегральних граничних рівнянь.

$$\begin{gathered}
\mp\beta_1 + \int_{\Gamma_0} W(x-y,t)\beta_2(y,t) + V(x-y,t)\alpha_1(y,t)ds_y + \\
\int_0^\infty \int_{\Gamma_0} \tilde{W}(x-y,t)(\beta_2(y,\tau) - \beta_2(y,t)) + \tilde{V}(x-y,t)(\alpha_1(y,\tau) - \alpha_1(y,t))dyd\tau = f_1^{\pm}(x,t),
\end{gathered} \qquad (4)$$

$$\begin{gathered}
\mp\beta_2 + \int_{\Gamma_0} \partial_n W(x-y,t)\beta_1(y,t) + \partial_n V(x-y,t)\alpha_2(y,t)ds_y + \\
\int_0^\infty \int_{\Gamma_0} \partial_n \tilde{W}(x-y,t)(\beta_1(y,\tau) - \beta_1(y,t)) + \partial_n \tilde{V}(x-y,t)(\alpha_2(y,\tau) - \alpha_2(y,t))dyd\tau = f_2^{\pm}(x,t).
\end{gathered} \qquad (5)$$

Враховуючи розташування тріщини (рис1) будемо вважати, що $x=(0,x_2)$, $y=(0,s)$. Тоді маємо такий вид потенціалів та їх нормальних похідних у рівняннях (4)-(5):

$$W(x-y,t)=-D\frac{\theta(t)t}{\pi(x_2-s)^2}\sin\frac{(x_2-s)^2}{4\sqrt{Dt}}\cdot\frac{\nu}{\sqrt{D}}+$$

$$+\int_0^\infty D\frac{\theta(t-\tau)}{\pi\sqrt{D}(x_2-s)^2}\cdot\frac{(1+\nu)}{2}\sin\frac{(x_2-s)^2}{4\sqrt{D}(t-\tau)}d\tau\approx-\frac{\theta(t)t\nu}{\pi(x_2-s)^2}(\frac{(x_2-s)^2}{4t}-\frac{(x_2-s)^6}{64Dt^3})+$$

$$+\int_0^\infty\frac{\theta(t-\tau)}{\pi(x_2-s)^2}\cdot\frac{(1+\nu)}{2}(\frac{(x_2-s)^2}{4(t-\tau)}-\frac{(x_2-s)^6}{64D(t-\tau)^3})d\tau=$$

$$=-\frac{\theta(t)}{\pi}\frac{\nu}{4}+\frac{\theta(t)}{\pi}\cdot\frac{(1+\nu)}{8}\ln t+\frac{\theta(t)}{\pi}\cdot\frac{3+5\nu}{128}\frac{(x_2-s)^4}{Dt^2}$$

$$V\vec{\alpha}(x-y,t)=\int_0^\infty\frac{\theta(t-\tau)}{4\pi\sqrt{D}}(\int_0^{\frac{(x_2-s)^2}{4\sqrt{D}(t-\tau)}}\frac{\sin z}{z}dz-\frac{\pi}{2})d\tau\approx\int_0^\infty\frac{\theta(t-\tau)}{4\pi\sqrt{D}}(\int_0^{\frac{(x_2-s)^2}{4\sqrt{D}(t-\tau)}}(1-\frac{z^2}{6})dz-\frac{\pi}{2})d\tau=$$

$$\approx(\frac{\theta(t)}{4\pi D}(\frac{(x_2-s)^2}{4}\ln t+\frac{(x_2-s)^6}{384Dt^2})$$

$$\partial_n W\vec{\beta}(x,t)==D\frac{\theta(t)t}{\pi}\sin\frac{(x_2-s)^2}{4\sqrt{Dt}}\cdot\frac{-3(\nu-1)}{\sqrt{D}(x_2-s)^4}-\frac{\theta(t)}{\pi}\frac{2-\nu}{2(x_2-s)^2}\cos\frac{(x_2-s)^2}{4\sqrt{Dt}}\approx$$

$$\approx\frac{\theta(t)}{\pi}\cdot\frac{-(\nu+1)}{4(x_2-s)^2}+\frac{\theta(t)}{\pi}\frac{(x_2-s)^2}{64Dt^2}(2\nu-1)$$

$$\partial_n V\vec{\alpha}(x,t)=\int_0^\infty\frac{\theta(t-\tau)}{4\pi\sqrt{D}}\left\{-2\sin\frac{(x_2-s)^2}{4\sqrt{D}(t-\tau)}\frac{1}{(x_2-s)^2}\right\}d\tau\approx\int_0^\infty\frac{\theta(t-\tau)}{2\pi}\left\{-\frac{1}{4D(t-\tau)}+\frac{(x_2-s)^4}{64D^2(t-\tau)^3}\right\}d\tau=$$

$$=\frac{\theta(t)}{2\pi}\left\{-\frac{1}{4D}\ln t-\frac{(x_2-s)^4}{64D^2t^2}\right\}$$

Для подальшої чисельної реалізації застосуємо метод дискретних особливостей. Розіб'ємо Γ_0 на n частин, на кожній з яких вважаємо щільності $\alpha_k(y,t),\beta_k(y,t)$ сталими $(k=1,2)$. Це дозволить отримати з (4)-(5) систему лінійних рівнянь відносно $\alpha_k(y,t),\beta_k(y,t)$ після застосування наступних перетворень у лівій частині системи (4)-(5):

$$\int_{\Gamma_0}W(x-y,t)\beta_2(y,t)+V(x-y,t)\alpha_1(y,t)ds_y=$$

$$=\sum_i\frac{\theta(t)}{4\pi}\int_{a_{i-1}}^{a_i}(-\nu+\frac{(1+\nu)}{2}\ln t+\frac{3+5\nu}{32}\frac{(x_2-s)^4}{Dt^2})\beta_{2i}(t)+(\frac{(x_2-s)^2}{4D}\ln t+\frac{(x_2-s)^6}{384D^2t^2})\alpha_{1i}(t)ds=$$

$$=\sum_i\frac{\theta(t)}{4\pi}(-\nu s+\frac{(1+\nu)}{2}s\ln t+\frac{3+5\nu}{160}\frac{(s-x_2)^5}{Dt^2})\beta_{2i}(t)+(\frac{(s-x_2)^3}{12}\ln t+\frac{(s-x_2)^7}{2688D^2t^2})\alpha_{1i}(t)\Bigg|_{a_{i-1}}^{a_i}$$

$$\int_{\Gamma_0} W_n(x-y,t)\beta_1(y,t)+V_n(x-y,t)\alpha_2(y,t)ds_y =$$

$$=\sum_i \frac{\theta(t)}{4\pi}\int_{a_{i-1}}^{a_i}\left(\frac{-(\nu+1)}{4(x_2-s)^2}+\frac{(x_2-s)^2}{16Dt^2}\cdot(2\nu-1)\right)\beta_{1i}(t)+\left\{-\frac{1}{2D}\ln t-\frac{(x_2-s)^4}{32D^2t^2}\right\}\alpha_{2i}(t)ds_y =$$

$$=\sum_i \frac{\theta(t)}{4\pi}\left(\frac{(\nu+1)}{4(s-x_2)}+\frac{(s-x_2)^3}{48Dt^2}\cdot(2\nu-1)\right)\beta_{1i}(t)+\left\{-\frac{1}{2D}s\ln t-\frac{(s-x_2)^5}{160D^2t^2}\right\}\alpha_{2i}(t)\Bigg|_{a_{i-1}}^{a_i}$$

Висновки. Побудовано динамічні аналоги потенціалів простого та подвійного шарів для задачі динаміки тонких пружних пластин, які дозволяють визначати зсув будь-якої точки пластини, що послаблена тріщиною, в довільний момент часу без застосування методів типа скінченних різниць або скінченних елементів. Отримано явний вид граничних рівнянь для подальшої чисельної реалізації.

Список використаних джерел

1. Chudinovich I.Yu. The boundary equation method in the third initial boundary value problem of the theory of elasticity. 1. Existence theorems./ Chudinovich I.Yu. // Math. Methods Appl. Sci., -- 1993. -- P. 203--215.

2. Чудинович И.Ю. К решению граничных уравнений в задачах дифракции упругих волн на пространственных трещинах./ Чудинович И.Ю.//Дифференциальные уравнения. 29 (1993), 1648-1651.

3. Гассан Ю.С. Граничні рівняння в задачах динаміки тонких пружних пластин, що послаблені тріщинами/ Гассан Ю.С..// Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки, - 2000. - № 3. - С.105-114 .

Рецензент д-р тех. наук, професор О.О.Стрельнікова

Шувалова Юлія Сергіївна, кандидат фізико-математичних наук, кафедра вищої математики, Українська державна академія залізничного транспорту, (057)-730-10-38, e-mail: gassan@kart.edu.ua

Shuvalova Yuliia Sergiivna, Candidate of Physico-mathematical Sciences, Department of Higher Mathematics, Ukraine State Academy of Railway Transport, (057)-730-10-38, e-mail: gassan@kart.edu.ua