УДК 621.396.967

к.т.н. **Лоза В.Н.** (ВИКНУ)

ПОВЫШЕНИЕ ИНФОРМАТИВНЫХ СВОЙСТВ СПЕКТРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ С ПОМОЩЬЮ КРАТКОВРЕМЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАБОРА

Рассматривается сущность кратковременного Фурье-преобразования, называемого преобразованием Габора, приводятся результаты анализа его информативных свойств на примере обработки нестационарного сигнала и выводы об особенностях практического использования. Сделан вывод о том, что в связи с использованием фиксированной ширины окна оконное преобразование Фурье не подходит для анализа сигналов одновременно с очень низкой и очень высокой частотой. Такой анализ становится возможным при использовании гибкого частотно-временного окна, которое является адаптивным и обеспечивает сужение при изучении высокочастотных явлений и расширение при анализе низкочастотных областей сигнала.

Ключевые слова: кратковременное оконное преобразование Фурье (преобразование Габора), спектр сигнала.

Введение. Математическое преобразование применяется к сигналам с целью получения о нём дополнительной информации, недоступной в исходном виде. Преобразование переводит сигнал из одной области представления в другую.

Преобразование использует общий вычислительный принцип обработки: умножение сигнала на некоторую "анализирующую" функцию и интегрирование по всей временной оси, который в общем виде для сигнальной функции $f(x)$ формализуется выражением:

$$\overline{f(v)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g_v(x)}dx = (f(x), g(x)), \quad (1)$$

где $\overline{f(v)}$ – результат преобразования;

черта – символ комплексного сопряжения;

(*, *) – обозначение операцию свёртки функций.

Вид анализирующей функции $g(x)$ определяет тип преобразования.

Центральное место среди средств математического анализа сигналов занимает аппарат преобразований Фурье (ФП), однако его применение ограничено в основном обработкой стационарных сигналов. Основным практическим недостатком ФП является слабая пространственная локализация базисных функций, не позволяющая фиксировать быстрые изменения сигнала. Её улучшение может быть достигнуто за счёт искусственной локализации сигнала с помощью умножения сигнала на подходящую функцию $g(x - x_0)$, которая имеет носитель вблизи точки x_0. В результате получим преобразование:

$$\overline{f_W(w,t)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\overline{g_{(w,t)}(u)}du, \quad (2)$$

$$g_{(w,t)}(u) = e^{jwt} w(u - t), \quad (3)$$

где $w(u - t)$ – "оконная" функция (весовое окно) со сдвигом к заданному моменту времени t.

Выражение (3) представляет собой *анализирующую* функцию. В качестве функции окна используется либо полупериод косинусоиды, либо, чаще, функция Гаусса:

$$w(u) = (1/2\sqrt{\pi a})\exp(-u^2/4a), \quad (4)$$

где $\sqrt{a}$ – определяет ширину окна.

При использовании окна, соответствующего (4), кратковременное оконное преобразование Фурье (ОФП) называют преобразованием Габора, который предложил в 1946 г. определять элементарные частотно-временные "атомы", как волновые образования, имеющие минимальную протяжённость на частотно-временной плоскости [1, 2].

Алгоритм вычисления оконного преобразования Фурье. В вычислительном алгоритме ОФП осуществляется переход от непрерывного аналогового сигнала к дискретному, когда $t = 0, T_s, \dots (N-1)T_s$, T_s – частота дискретизации:

$$f = \{f(kT_s)\}_{k=0}^{N-1}. \tag{5}$$

Частоту дискретизации обозначим $w_s = 2\pi / T_s$.

Поскольку результат вычисления при каждом положении окна определяется свёрткой спектров f и w, то для частоты w_s выполняется условие:

$$w_s > 2(w_{\max}^f + w_{\max}^w), \tag{6}$$

где $w_{\max}^f$ и $w_{\max}^w$ – максимальные значения частот сигнала и оконной функции.

Для сигнала (5) возможен *быстрый* алгоритм ОФП, который состоит из следующих операций вычисления:

1) определяется последовательность частот:
   $w_k = (k/N)w_s$; $(k = 0, \dots m_N)$ $\qquad m_N = N/2$ (чётное N), $N-1/2$ (нечётное).
2) для временных сдвигов $\tau = 0$, $T_s, \dots (N-1)T_s$, определяются последовательности:

$$\left\{f(kT_s)\overline{w(kT_s - \tau)}\right\}_{k=0}^{N-1}. \tag{7}$$

На следующем шаге для каждого значения (7) вычисляется быстрое преобразования Фурье (БПФ), который обозначим $\{G_k\}_{k=0}^{N-1}$.

Результат дискретного ОФП соответствует выражению:

$$\overline{f_w(w,\tau)} = T_s G_k (k = 0, \dots m_N). \tag{8}$$

Визуализация результата ОФП представляется на *фазовой* плоскости *t*, *ω* в виде спектрограммы, которая даёт *фазово-пространственное представление*. Вид базисных функций на такой плоскости при прямоугольной форме окна показан на рис. 1.

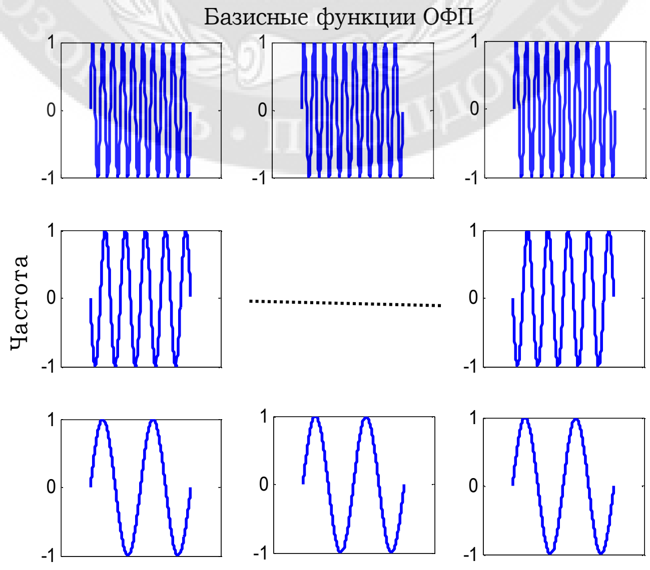

Рис. 1. Вид базисных функций на фазовой плоскости *t*, ω при прямоугольной форме окна

Пример оконного преобразования Фурье сложной функции. Как было указано, применение ОФП имеет целью выявить высокочастотные "делали" сигнала (скачки, разрывы), поэтому понятие "сложный" сигнал соответствует специальному тестовому сигналу, в котором сочетаются гладкие участки и скачки. Сигнал формируется согласно выражению:

$$s = [s1\, s2\, s3]; \quad s1(1:n1) = 0; \quad s3(1:n2) = 0; \tag{9}$$

где $s2 = A\sin(2\pi f1.t) + B\sin(2\pi f2.t)$;

$f1 = 1\text{КГц}$, $f2 = 2f1$;

$n1, n2$ – значения начального и конечного интервалов.

В качестве программной платформы вычисления ОФП используется пакет MATLAB [3], который считается стандартом в инженерной практике расчётов. Алгоритм быстрого вычисления ОФП реализован в программной функции mystft (*), образец ввода которой имеет вид:

$$[t, y, matrix] = mystft(< s >, T_S, < w1 : \Delta w : w2 >), \tag{10}$$

Сигнал (s) и результат ОФП в фазовой плоскости представлены на рис. 2.

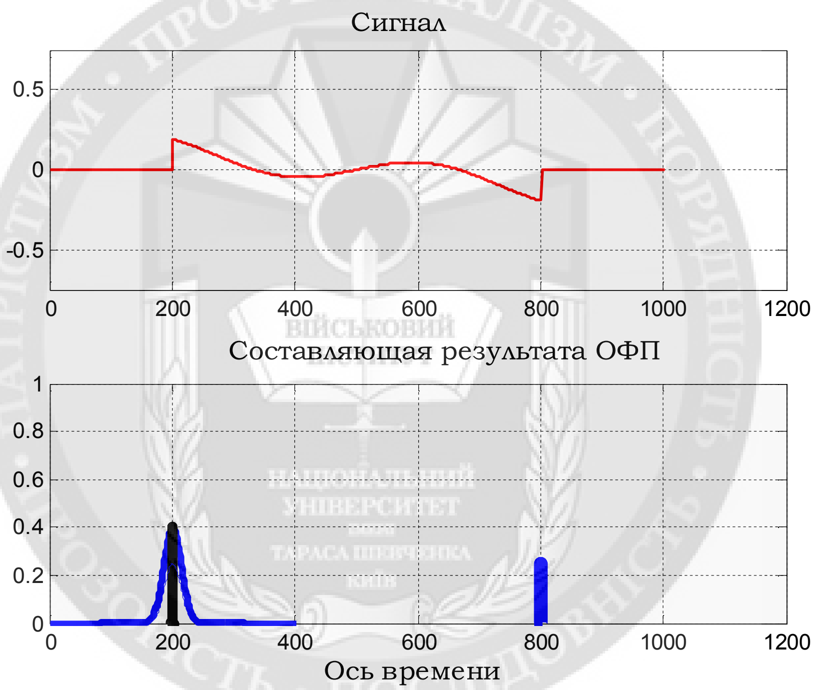

Рис. 2. Сигнал (s) и результат оконного преобразования Фурье в фазовой плоскости

Как следует из анализа рис. 2, для данного примера ОФП позволяет достаточно чётко определить наличие и положение скачков функции. Однако результат рис. 2 (внизу) получен с использованием фазовой составляющей ОФП, что вызывает трудности практического применения в решении задачи выявления всплесков в сигнале.

Информационные ограничения оконного преобразования Фурье. Недостатком информационных свойств ОФП является использование окон одинакового размера, что не позволяет в связи с принципом неопределённости Гейзенберга получить высокое разрешение по времени и частоте. Принципиальный недостаток объясняется тем, что в качестве базиса используется, как и в ФП, одна функция – синусоида.

Оптимальной функцией окна с точки зрения принципа неопределённости является гауссова функция (4). Если обозначить ширину функции окна Δw, то локальная информация о функции во временном окне (в среднеквадратическом смысле) соответствует:

$$\left[x^* + b - \Delta w,\ x^* + b + \Delta\right], \tag{11}$$

где $x^* + b$ определяет среднее положение окна на оси времени (b – смещение).

Используя Фурье-образ ОФП с обозначением частотного диапазона $\Delta\omega$, позволяет фиксировать максимальный двухмерный размер окна:

$$\Delta w * \Delta w \geq 1/2. \tag{12}$$

Знак равенства соответствует только преобразованию Габора.

Выводы. Таким образом, в связи с использованием фиксированной ширины окна ОФП не подходит для анализа сигналов одновременно с очень низкой и очень высокой частотой. Такой анализ становится возможным при использовании гибкого частотно-временного окна, которое является адаптивным и обеспечивает сужение при изучении высокочастотных явлений и расширение при анализе низкочастотных областей сигнала.

Эта задача наиболее успешно решается применением в качестве базиса *вэйвлет – функций* [1, 2, 4].

ЛІТЕРАТУРА:

1. Воробьёв В.И., Грибулин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования – СПб.: Изд-во ВУС, 1999. – 204 с.

2. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основы теории всплесков // Успехи математических наук., 1998. – Т.53. – №6. – С. 53-128.

3. Дьяконов В.П. MATLAB и SIMULINK для радиоинженеров. – М.: ДМК Пресс, 2011. – 976 с.

4. Божокин С.В. Непрерывное вейвлет-преобразование и точно решаемая модель нестационарных сигналов / С.В. Божокин // Журнал технической физики. – 2012. – №7. – Т. 82. – С. 8-13.

Рецензент: д.т.н., проф. Лєнков С.В., начальник науково-дослідного центру Військового інституту Київського національного університету імені Тараса Шевченка

к.т.н. Лоза В.М.

ПІДВИЩЕННЯ ІНФОРМАТИВНОСТІ ВЛАСТИВОСТЕЙ СПЕКТРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕННЯ СИГНАЛІВ СКЛАДНОЇ ФОРМИ ЗА ДОПОМОГОЮ КОРОТКОЧАСНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ГАБОРА

Розглядається сутність короткочасного Фур'є-перетворення, що має назву перетворення Габора, наводяться результати аналізу його інформативних властивостей на прикладі обробки нестаціонарного сигналу і висновки про особливості практичного використання. Зроблено висновок про те, що у зв'язку з використанням фіксованої ширини вікна віконне перетворення Фур'є не підходить для аналізу сигналів одночасно з дуже низькою й дуже високою частотою. Такий аналіз стає можливим при використанні гнучкого частотно-тимчасового вікна, що є адаптивним і забезпечує звуження при вивченні високочастотних явищ і розширення при аналізі низькочастотних областей сигналу.

Ключові слова: короткочасне віконне перетворення Фур'є (перетворення Габора), спектр сигналу.

Ph.D. Loza V.M.

MORE INFORMATIVE PROPERTIES OF THE SPECTRAL REPRESENTATION OF SIGNALS COMPLEX SHAPE WITH SHORT-TERM TRANSFORMATION GABOR

The essence of short-term Fourier transform, called Gabor transformation, the results of its analysis of informative features on the example of non-stationary signal processing and conclusions about the features of practical use. It was concluded that due to the use of a fixed window width window Fourier transform is not suitable for the analysis of signals simultaneously with very low and very high frequency. Such an analysis is made possible by using flexible frequency-time window that is adaptive and provides a narrowing in the study of high-frequency phenomena and expand the analysis of low signal areas.

Keywords: short-term windowed Fourier transform (Gabor transform) spectrum of the signal.