

УДК 004.891

д.т.н., проф. **Мясіщев О.А.** (ХМНУ)
д.т.н., доц. **Шкуліпа П.А.** (ОДАТРЯ)
Ноянчук В.В. (ХМНУ)

ПРО ДОЦІЛЬНІСТЬ ВИКОРИСТАННЯ GPU NVIDIA CUDA ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАНИХ ЗАДАЧ МСЕ

У статті представлена можливість проведення складних обчислень методом скінченних елементів (МСЕ) при моделюванні фізичних процесів на прикладі задач деформації тіла. Приведено обґрунтування вибору МСЕ та переваги при його використанні. На основі даного підходу розроблені програмні рішення, що використовують графічні процесори компанії NVIDIA з підтримкою технології CUDA для виконання обчислень.

Ключові слова: CUDA, NVIDIA, метод скінченних елементів, задача деформація тіла, обчислення.

Вступ. Рівень розвитку сучасної техніки напряму зв'язаний зі станом досліджень механіки та обчислювальних методів, що дозволяють проводити моделювання різних фізичних процесів. Саме тому кількісні методи дослідження проникають майже в усі галузі людської діяльності, а математичні моделі стають чи не основним способом пізнання дійсності. Багато програмних продуктів що виконують симуляції фізичних процесів впроваджують у виробництво, використовують на етапі проектування та моделювання пристроїв, що будуть виготовлятися підприємством. Більшість з них виконують обчислення паралельно, використовуючи потужність процесора, щоб добитися приросту продуктивності при виконанні розрахунків.

Визначення проблеми. Зазвичай для розпаралелювання задач використовують кількісні методи з використанням математичної моделі. Їх застосування потребує виконання двох основних етапів.

На першому етапі відбувається формування математичної постановки задачі, що вирішується, обмежень, які встановлюються початковими та краєвими умовами, виведення диференціальних рівнянь. Далі вирішується задача для конкретних об'єктів дослідження із заданими конфігурацією та властивостями.

Одним з недоліків аналітичних методів являється те, що рішення на їх основі ми можемо отримати тільки для найпростіших систем рівнянь, обмежених конфігурацій об'єктів. Також їх використання не дає в повній мірі використовувати для обчислень потужності сучасних ПК.

Більш перспективними в даному плані являються методи, що орієнтовані на їх використання на ЕОМ та покращуються разом з розвитком техніки. Впровадження таких методів дозволяє представити рішення задачі в чисто математичній формі, для рішення якої достатньо використовувати тільки основні операції.

Виклад основного матеріалу досліджень. Одним з таких методів є метод скінченних елементів. Для перевірки ефективності використання даного методу було обрано задачу деформації тіла. В теорії пружності тіло розглядається як суцільне середовище, для якого справедливі твердження пружності (тіло може повністю повернутись в свою початкову форму, якщо забрати причину виникнення деформації), однорідності (незалежність властивостей матеріалу в межах об'єму тіла, що розглядається) і лінійною залежністю між навантаженням, що виникає в тілі і деформаціями.

Повна потенціальна енергія пружної системи може бути розділена на дві частини, одна з яких відповідає енергії деформації, а інша потенціальній енергії масових сил та прикладених сил, що викликають деформацію (рівняння 1).

$$\Pi = \Lambda + W_p, \quad (1)$$

де Λ – енергія деформації, W_p – потенціальна енергія прикладених до об'єкта сил. Робота зовнішніх сил протилежна за знаком їх потенціальної енергії:

$$W = -W_p. \quad (2)$$

Розбивши досліджувану область на елементи, рівняння 1 та 2 записуються у вигляді суми:

$$\Pi = \sum_{e=1}^E (\Lambda^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^E \pi^{(e)}. \quad (3)$$

В процесі мінімізації та перетворень отримуються інтеграли, що входять в рівняння для елементів системи. Отримані інтеграли в матричному представленні мають наступний вигляд^[1]:

$$[k^{(e)}] = \int_V [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \{f^e\} = & - \int_V [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} x^{(e)} \\ y^{(e)} \\ z^{(e)} \end{Bmatrix} dV - \int_V [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_0^{(e)}\} dV - \\ & - \int_S [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \\ p_z^{(e)} \end{Bmatrix} dS - \{P\}, \end{aligned} \quad (5)$$

де $[B^{(e)}]$ – матриця градієнтів, що зв'язує деформації і переміщення; $[D^{(e)}]$ – матриця, яка описує механічні властивості; $\{\varepsilon_0^{(e)}\}$ – початкова деформація елемента; $[N^{(e)}]$ – матриця функцій форми; $x^{(e)}, y^{(e)}, z^{(e)}$ – об'ємні сили, $p_x^{(e)}, p_y^{(e)}, p_z^{(e)}$ – поверхневі навантаження елемента і $\{P\}$ – вектор-стовпець вузлових сил.

В одномірній задачі теорії пружності вважають, що тіло розміщується вздовж однієї з координатних осей, тому використовується тільки один тензор навантаження σ_{xx} та

компоненту тензора деформації. Для подальших розрахунків використовують закон Гука, представлений в матричній формі:

$$\{\sigma\} = -[D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}). \quad (6)$$

Для одномірного елемента функція переміщення має наступний вигляд:

$$u = N_i U_i + N_j U_j - [N]\{U\}, \quad (7)$$

де $U_{i,j}$ – переміщення вузлів i, j в напрямку осі x . Зв'язок функції переміщення та деформації ε_{xx} представлений наступним відношенням:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = \left[\frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} \right] \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

В подальших етапах ми визначаємо матрицю градієнтів $[B]$, через зв'язок описаний в функції 8.

Підставивши усі наявні дані в формулу 4 ми отримаємо матрицю жорсткості для одномірного елемента:

$$[k^{(e)}] = \int_V [B]^T [D][B] dV. \quad (9)$$

Виконавши не досить складні розрахунки ми отримуємо інтеграл, що визначає вектор навантаження, який приймає наступний вигляд^[1]:

$$\{f^e\} = - \int_V [N]^T \{x\} dV - \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV - \int_S [N]^T \{p_x\} dS - \{P\}. \quad (10)$$

При визначенні більшості значень нам приходится виконувати розрахунки з використанням матриць, при збільшенні складності задачі, збільшується і об'єм розрахунків, які потрібно виконати.

При використанні метода скінченних елементів отримується система лінійних рівнянь, яка повинна бути вирішена відносно невідомих вузлових параметрів, для визначення глобальної матриці жорсткості. Вона зводиться до обчислень з стрічковою матрицею схожою на ту, що представлена на рисунку^[2,3,4], символом «с» позначено усі елементи відмінні від нуля.

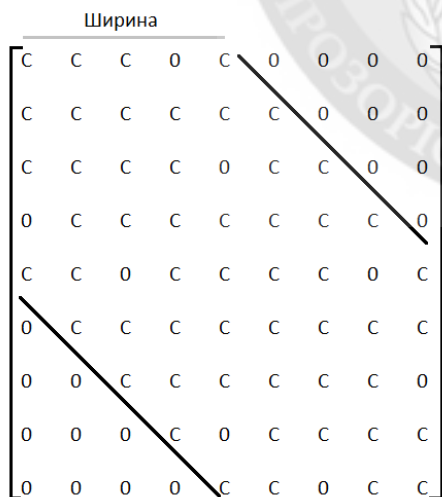


Рис. 1. Розріджена матриця CSC, CSR, COO та інші^[5], які дозволяють значно економити пам'ять ЕОМ при їх зберіганні та використанні.

Для збільшення швидкостей обчислень доцільно використовувати програмно-апаратний комплекс для паралельних обчислень на графічному процесорі CUDA від фірми NVIDIA. Даний комплекс підтримує такі поширені мови програмування як: C, C++, Java, Python та Fortran. Він являється досить поширеним, оскільки даний виробник являється

одним із лідерів в розробці графічних процесорів, більшість з яких підтримують дану технологію.

Для даного комплексу створено ряд бібліотек, які дозволяють виконувати паралельні операції на порядок швидше і скорочують термін розробки програмного забезпечення, оскільки містять уже готові функції для певних операцій, наприклад, задачі лінійної алгебри. До бібліотек, що найчастіше використовуються при вирішенні математичних операцій можна віднести наступні:

- cuBLAS – покращена версія бібліотеки BLAS, що надає набагато більшу продуктивність при обрахунках задач лінійної алгебри на графічних процесорах з підтримкою технології CUDA.

- MAGMA – набір функцій для роботи із задачами лінійної алгебри.

- cuSPARSE – представляє набір функцій для роботи з розрідженими матрицями.

Використання графічного процесора для розрахунків дає значне підвищення продуктивності в порівнянні з використанням тільки процесора ПК, використання бібліотек також підвищує якість і швидкість обчислень, оскільки містить ряд оптимізацій закладених при їх створенні^{[6][7]}.

Висновок: Використовуючи метод скінченних елементів ми отримуємо ряд переваг таких як: економія місця для збереження вхідних та вихідних даних системи, що досліджується, оскільки матриці, що використовуються в обчисленнях можуть бути представлені у компактному вигляді, використання потужностей сучасних ЕОМ для обчислення математичної моделі. В процесі обчислень використовуються операції з матрицями, що добре розпаралелюються. Використовуючи графічний процесор від фірми NVIDIA та програмно-апаратний комплекс CUDA для паралельних розрахунків на графічних процесорах і набір бібліотек ми підвищуємо продуктивність обчислювальної системи в рази. В свою чергу це дозволяє значно пришвидшити темпи дослідження, та зменшити затрати.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Сегерлинд. Л. Применение метода конечных элементов : пер. с англ. / Под ред. д-ра физ.-мат. наук Б. Е. Победри. – М. : Мир, 1979. – 392 с.

2. Метод конечных элементов: теория, алгоритмы, реализация / В.А.Толок [и др.]. К.: Наук. думка, 2003. 316 с.

3. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. К.: Наук. думка, 2002. 653 с.

4. Капустин С.А. Метод конечных элементов в задачах механики деформируемых тел. Учебное пособие. Н.Новгород, 2002. 180 с.

5. Nathan Bell and Michael Garland Efficient Sparse Matrix-Vector Multiplication on CUDA, NVIDIA Technical Report NVR-2008-004, December 2008, <http://www.nvidia.com/docs/IO/66889/nvr-2008-004.pdf>

6. Мясичев А.А. Сопоставление производительностей GPU Tesla C2075, GeForce 480GTX с 6-и ядерным CPU AMD при решении систем линейных уравнений, 2012г., [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://khnu.km.ua/root/kaf/ksm/web_statyi/myas1.htm

7. Мясичев А.А. Оценка производительности GPU NVIDIA CUDA при решении задач матричного умножения, 2012г., [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://khnu.km.ua/root/kaf/ksm/web_statyi/myas3.htm - Назва з екрану: УДК 519

Рецензент: д.т.н., проф. Ленков С.В., начальник науково-дослідного центру Військового інституту Київського національного університету імені Тараса Шевченка

д.т.н., проф. Мясищев А.А., д.т.н., доц. Шкулипа П.А., Ноянчук В.В.
**О ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ GPU NVIDIA CUDA ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧ МКЭ**

В статье показана возможность проведения сложных вычислений методом конечных элементов (МКЭ) при моделировании физических процессов на примере задач деформации тела. Приведены обоснования выбора МКЭ и преимущества при его использовании. На основе данного подхода разработаны программные решения, использующие графические процессоры компании NVIDIA с поддержкой технологии CUDA для выполнения вычислений.

Ключевые слова: CUDA, NVIDIA, метод конечных элементов, задача деформация тела, вычисления.

Prof. Myasishev A.A., Ph.D. Shkulipa P.A., Noyanchuk V.V.
**ABOUT THE FEASIBILITY OF USING GPU NVIDIA CUDA FOR SOLVING PROBLEMS
BY FEM**

This paper introduces a method of carrying out complex calculations in modeling of physical processes such as problems of the body deformation by usage of finite element method (FEM). It gives rationale for the choice of FEM and its advantages in use. Based on this approach were developed software solutions that use NVIDIA GPUs with support for CUDA technology to perform calculations.

Keywords: CUDA, NVIDIA, finite element method, calculation of the body deformation.