УДК 621.396

к.т.н. Масесов М.О. (ВІТІ)
Руденко Д.М. (ВІТІ)
к.т.н. Чумак В. К. (ВІТІ)

ОЦІНКА ЕРГОДИЧНОЇ ПРОПУСКНОЇ ЗДАТНОСТІ МІМО-СИСТЕМ В КАНАЛАХ З РАЙСОВСЬКИМИ ЗАВМИРАННЯМИ

В роботі розглядається розрахунок ергодичної (середньої) пропускної здатності МІМО-систем в каналах з райсовськими завмираннями. Проведено порівняльний аналіз ергодичної пропускної здатності для каналів з релеєвськими та райсовськими завмираннями в залежності від числа прийомальних та передавальних антен при різних значеннях відношення сигнал-шум .

Масесов М.О., Руденко Д.М., Чумак В.К. Оценка эргодической пропускной способности MIMO-систем в каналах с райсовскими замираниями. *В работе рассматривается расчет эргодической (средней) пропускной способности MIMO-систем в каналах с райсовскими замираниями. Проведен сравнительный анализ эргодической (средней) пропускной способности в каналах с рэлеевскими и райсовскими замираниями в зависимости от числа приемных и передающих антенн при различных значениях отношения сигнал-шум.*

M. Masesov, D. Rudenko, V. Chumak Estimation of ergodic capacity of MIMO channels with Rician fading. *In the article it is considered the calculation of the ergodic (average) capacity of Rician fading MIMO channel. A comparative analysis of the ergodic (average) bandwidth channels with Rayleigh and Rician fading depending on the number of transmit and receive antennas at different values of the signal-to-noise ratio is conducted.*

Ключові слова: *пропускна здатність, МІМО, адаптивна обробка сигналів, розподіл Райса, розподіл Релея, завмирання.*

Вступ. Однією з основних особливостей теперішнього часу є необхідність передачі наростаючого потоку інформації в бездротових мережах, що функціонують в складних умовах поширення сигналів. При цьому пропускну здатність системи відповідно до формули Шеннона можна збільшити або за рахунок розширення смуги, або за рахунок збільшення потужності сигналу. Однак у сучасних системах зв’язку як частотний, так і енергетичний ресурси практично вичерпані. У зв’язку з цим виникає необхідність пошуку нових можливостей підвищення пропускної здатності систем передачі інформації. Одним із шляхів підвищення пропускної здатності є використання технології МІМО (*Multiple Input – Multiple Output*). МІМО-канал можна представити як середовище для передачі, входами в яке є антени передавача, а виходами – антени приймача.

Аналіз останніх публікацій. Дослідження показали, що в некоррельованому релеєвському МІМО-каналі можна збільшити пропускну здатність в n разів (де n – мінімум з числа передавальних і приймальних антен) порівняно з системою з одним входом і одним виходом (SISO : *Single Input – Single Output*) при такому ж відношенні сигнал-шум. Модель релеєвського каналу без урахування просторової кореляції, яка погіршує пропускну здатність, не завжди адекватна реальному каналу. В роботі [1] показано, що антенна (або просторова) кореляція притаманна каналам з розсіюванням і залежить від відстані між передавальними і приймальними антенами, а також від відстані між антенними елементами та їх конфігурації .

З математичної точки зору оцінка пропускної здатності МІМО-систем в каналах із завмираннями зводиться до усереднення наведеної до смуги частот миттєвої Шеннонівської пропускної здатності [2] з розподілу комплексної матриці каналу або сформованої на її основі комплексної матриці Уішарта [3]. Матриця Уішарта в залежності від виду завмирань має центральний (в релеєвському каналі) і нецентральний (в райсовському каналі) розподіл Уішарта [4]. Шляхом нескладних перетворень усереднення по розподілу Уішарта можна звести до усереднення по розподілу власних значень матриці Уішарта [5]. Однак незважаючи на те, що починаючи з робіт Уішарта багато дослідників приділяли велику увагу цьому завданню (отримання розподілу власних значень), воно не знайшло ще свого остаточного рішення в загальному вигляді для нецентрального (в райсовскому каналі) розподілу.

Тому **метою** роботи є оцінка ергодичної пропускної здатності МІМО-систем в каналах з райсовськими завмираннями.

Пропускна здатність МІМО-систем в каналах з райсовськими завмираннями. Ергодична (середня) пропускна здатність МІМО-системи отримується в результаті усереднення миттєвої пропускної здатності по власним значенням матриці Уішарта, яка має центральний розподіл Уішарта – для каналу з релеєвськими завмираннями і нецентральний розподіл Уішарта – для каналу з райсовськими завмираннями. Виведення аналітичного виразу для щільності розподілу власних значень нецентральної матриці Уішарта є складною математичною задачею, яка до теперішнього часу не має остаточного рішення. Розглянемо завдання з нецентральним некорельованним розподілом Уішарта.

У МІМО-системах матриця Уішарта $\mathbf{Q}$ формується з канальної матриці передачі $\mathbf{H}$, комплексні елементи якої покладаються незалежними однаково розподіленими гауссовськими величинами:

$$\mathbf{Q} = \begin{cases} \mathbf{H}\mathbf{H}^H, & r < t \\ \mathbf{H}^H\mathbf{H}, & r \ge t \end{cases},$$

де t – число передавальних антен, r – число приймальних.
У цьому випадку дійсні та уявні частини елементів канальної матриці $\mathbf{H}$ мають середнє значення $\mu/\sqrt{2}$ і дисперсію σ_r^2, тобто

$$E\{h_{km}\} = \frac{\mu}{\sqrt{2}}(1+j), \quad D\{h_{km}\} = 2\sigma_r^2,$$

Тоді розподіл модуля $r = |h_{km}|$ кожного елемента матриці $\mathbf{H}$ підпорядковується закону Райса з щільністю розподілу

$$h(u) = 2(1+k)u \exp\{-(1+k)u^2 - k\}\ I_0\left\{2u\sqrt{(1+k)}\right\}.$$

Зауважимо, що при $k = 0$ функція Бесселя дорівнює одиниці: $I_0(0) = 1$, і розподіл Райса перетворюється на розподіл Релея. В іншому граничному випадку, при $k \to \infty$ (що можливо тільки при $\sigma_r \to 0$ і $\mu \to 1$), матриця $\mathbf{H}$ буде складатися тільки з комплексних одиниць (чисел, дійсна і уявна частина яких дорівнює одиниці).

У загальному випадку ергодична пропускна здатність може бути отримана в результаті усереднення по канальній матриці миттєвої нормованої пропускної здатності:

$$\frac{\langle C \rangle_{t,r}}{W} = E_H\left\{\log_2 \det\left(\mathrm{I}_r + \frac{\gamma}{t}\mathbf{H}\mathbf{H}^H\right)\right\}, \qquad (1)$$

У формулі (1) усереднення проводиться з розподілу комплексної матриці $\mathbf{H}$, яке задається щільністю розподілу скалярної функції матричного аргументу:

$$f_{\mathrm{H}}(\mathbf{H}) = \det(2\pi\Sigma)^{-t/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} tr\left[\Sigma^{-1}(\mathbf{H}-\mathbf{M})(\mathbf{H}-\mathbf{M})^H\right]\right\}, \qquad (2)$$

де $\mathbf{\Sigma}$ – матриця стовпців матриці $\mathbf{H}$, $\mathbf{M} = E\{\mathbf{H}\}$ – матриця середніх значень. Для незалежних каналів $\mathbf{\Sigma} = 2\sigma_r^2 \mathrm{I}_r$ і

$$\mathbf{M} = \frac{\mu}{\sqrt{2}}(1+j)\Psi_{t,r}, \qquad (3)$$

де $\Psi_{t,r}$ – матриця розмірності $r \times t$, що складається з дійсних одиниць.

З урахуванням введених позначень вираз для ергодичної пропускної здатності (1) можна представити у вигляді середнього по матриці Уішарта:

$$\frac{\langle C\rangle_{t,r}}{W}=E_{\mathbf{Q}}\left\{\sum_{i=1}^{n}\log_2\det\left(\mathrm{I}_n+\frac{\gamma}{t}\mathbf{Q}\right)\right\},\qquad(4)$$

де $n=\min\{r,t\}$.

Матриця $\mathbf{Q}$ має нецентральний розподіл Уішарта [3] - [6] з m ступенями свободи, матрицею нецентральних параметрів $\mathbf{\Omega}=\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{M}^{H}$ і щільністю у вигляді функції матричного аргументу:

$$f(\mathbf{Q})=\exp\left\{-tr\left[\Sigma^{-1}\mathbf{M}\mathbf{M}^{H}\right]\right\}\overline{F}_1\left(m;\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{M}^{H}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{Q}\right)\exp\left\{-tr\left[\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{Q}\right]\right\}\frac{(\det\mathbf{Q})^{m-n}}{\overline{\Gamma}(m)(\det\mathbf{\Sigma})^{m}},\qquad(5)$$

де $\overline{F}_1\left(m;\mathbf{H}\mathbf{H}^{H}\right)$– так звана функція Бесселя матричного аргументу:

$$\overline{F}_1\left(m;\mathbf{H}\mathbf{H}^{H}\right)=\int_{U(m)}^{0}\exp\left\{tr\left(\mathbf{H}\mathbf{U}+\overline{\mathbf{H}\mathbf{U}}\right)\right\}(dU),\qquad(6)$$

$\mathbf{H}-$комплексна матриця $n<m$ при $n\le m$, $\overline{\mathbf{H}}-$ комплексне поєднання матриці $\mathbf{H}$, $\mathbf{U}(m)-$група всіх $m\times m$ унітарних матриць $\mathbf{U}$, для яких виконується умова $\mathbf{U}\mathbf{U}^{H}=\mathrm{I}_m$, $(dU)-$ інваріантна міра на $\mathbf{U}(m)$. Зауважимо, що для скалярного значення $\mathbf{H}\mathbf{H}^{H}=r^2$ [7] маємо:

$$\overline{F}_1=\left(m;r^2\right)=\Gamma(m)r^{m-1}\mathrm{I}_{m-1}(2r),\qquad(7)$$

де $\mathrm{I}_m(\cdot)-$ модифікована функція Бесселя першого роду m-го порядку, $\Gamma(\cdot)-$ гамма-функція. Функція Бесселя двох матричних аргументів $\mathbf{S}$ і $\mathbf{T}$ визначається згідно [3, 6, 8] наступним чином:

$$\overline{F}_1(m;\mathbf{S},\mathbf{T})=\int_{U(m)}^{0}F_1\left(m;\mathbf{S}\mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^{H}\right)(dU),\qquad(8)$$

З подання матриці Уішарта $\mathbf{Q}$ випливає, що вона є ермітової матрицею $n\times n$ з невід'ємними власними значеннями $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ і, крім того, може бути представлена у вигляді $\mathbf{Q}=\mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^{H}$, де $\mathbf{U}-$ унітарна матриця , $\Lambda-$ діагональна матриця з власних значень λ_i. Оскільки

$$\det\left\{\frac{\gamma}{t}\mathbf{Q}+\mathrm{I}_n\right\}=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\gamma}{t}\lambda_i\right),\qquad(9)$$

то вираз для середньої наведеної пропускної здатності прийме наступний вигляд:

$$\frac{\langle C\rangle_{t,r}}{W}=E_{\lambda_1...\lambda_n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\log_2 i\left(1+\frac{\gamma}{t}\lambda_i\right)\right\}=\int_0^{\infty}...\int_0^{\infty}\sum_{t=1}^{n}\log_2\left(1+\frac{\gamma}{t}\lambda_i\right)f(\lambda_1...\lambda_n)d\lambda_1...d\lambda_n,\qquad(10)$$

де $f(\lambda_1...\lambda_n)-$спільна щільність розподілу власних значень нецентральної матриці Уішарта.

У загальному випадку для нецентрального розподілу Уішарта з коваріаційною матрицею векторів-стовпців $\mathbf{У}$ має місце наступне твердження [3, 6, 8]: розподіл власних значень $\overline{\Lambda} = \mathrm{diag}\left(\overline{\lambda}_1,...,\overline{\lambda}_n\right)$, що є коренем характеристичного рівняння $\det\left|W - \lambda\Sigma\right| = 0$, залежить тільки від власних значень $\overline{\Omega} = \mathrm{diag}\left(\overline{\omega}_1,...,\overline{\omega}_n\right)$ матриці $\mathbf{MM}^H$ (які є рішенням характеристичного рівняння $\det\left|\mathbf{MM}^H - \overline{\omega}\mathbf{\Sigma}\right| = 0$ і визначаються виразом

$$f\left(\overline{\Lambda}\right) = \exp\left\{-tr\overline{\Omega}\right\}\overline{F}_1\left(m,\overline{\Omega},\overline{\Lambda}\right)\frac{\pi^{n(n-1)}}{\overline{\Gamma}_n(m)\overline{\Gamma}_n(n)}\exp\left\{-tr\overline{\Lambda}\right\}\det\left|\overline{\Lambda}\right|^{m-n}\prod_{i<1}^{n}\left(\overline{\lambda}_1 - \overline{\lambda}_l\right), \qquad (11)$$

де $\quad \overline{\Gamma}_m(a) = \pi^{m(m-1)/2}\prod_{k=1}^{m}\Gamma\left(a - (k-1)\right).$

У даному випадку (некорельованний розподіл Уішарта) маємо $\Sigma = 2\sigma_r^2\mathrm{I}_n$. Тоді, якщо ввести позначення $\sigma_r^2\overline{\lambda}_i = \lambda_i$, $\sigma_r^2\overline{\omega}_i = \omega_i$, $\sigma_r^2\overline{\Lambda}_i = \Lambda_i$, з виразу (11) можна отримати щільність розподілу матриці Λ, елементи якої використовуються при обчисленні ергодичної пропускної здатності некорельованого райсовського каналу.

Для знаходження власних значень матриці $\mathbf{\Omega} = \mathbf{MM}^H$ використовуємо представлення (3) матриці $\mathbf{M}$. Тоді

$$\Omega = \frac{\mu^2}{2}(1+j)(1-j)\Psi_{r,t}\Psi_{r,t}^T = m\mu^2\Psi_{n,n}, \qquad (12)$$

де $\quad m = \max\{r,t\}, \quad n = \min\{r,t\}, \quad \Psi_{n,n} -$ квадратна матриця розмірності $n \times n$, елементами якої є дійсні одиниці. Власними значеннями матриці Ω є корені рівняння

$$\det\left(m\mu^2\Psi_{n,n} - \omega\mathrm{I}_n\right) = 0.$$

(13)

Якщо матрицю $\Psi_{n,n}$ можна представити у вигляді добутку векторів

$$\Psi_{n,n} = aa^T, \qquad (14)$$

де $\overline{a} = (1,...,1)^T$, $n -$ мірний вектор з *n* одиниць, то з урахування властивості визначника отримаємо

$$\begin{aligned}\det\left(m\mu^2\Psi_{n,n} - \omega\mathrm{I}_n\right) &= (-\omega)^n\det\left[\mathrm{I}_n - \frac{m\mu^2}{\omega}aa^T\right] = \\ &= (-\omega)^n\det\left[\mathrm{I}_l - \frac{m\mu^2}{\omega}a^Ta\right] = (-1)^{n-1}\omega^{n-1}\left(mn\mu^2 - \omega\right) = 0,\end{aligned} \qquad (15)$$

звідки випливає, що $\omega_1 = mn\mu^2$, $\omega_i = 0 \quad (i = 2,...,n)$, Повернемося до формули (11), в якій виразимо параметри розподілу через k - фактор Райса:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tr}\Omega = \omega_1 = \frac{\omega_1}{2\sigma_r^2} = \frac{mn\mu^2}{2\sigma_r^2} = mnk, \\ \mathrm{tr}\overline{\Lambda} = \sum_{i=1}^{n}\overline{\lambda}_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{2\sigma_r^2} = (k+1)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i, \\ \left(\prod_{i=1}^{n}\overline{\lambda}_i\right)^{m-n} = (k+1)^{n(m-n)}\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{m-n}, \\ \prod_{i<<j}^{n}\left(\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_j\right) = (k+1)^{n^2}\prod_{i<j}^{n}\left(\lambda_i - \lambda_j\right)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

З урахуванням формули (16) з (11) отримуємо щільність розподілу власних значень нецентральной матриціУішарта [3]:

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 ... \lambda_n) = (1+k)^{mn} e^{-mnk} F_1(m;(1+k)\Omega,(1+k)\Lambda)\frac{\pi^{n(n-1)}}{\overline{\Gamma}_n(m)\overline{\Gamma}_n(n)} \times \\ \times \exp\left\{-(1+k)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right\}\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{m-n}\prod_{i<j}^{n}\left(\lambda_1 - \lambda_j\right)^2 \end{aligned} . \qquad (17)$$

Підставляючи вираз (17) в (10), можна отримати вираз для ергодичної пропускної здатності. Проте вираз (17) містить узагальнену гіпергеометричну функцію двох матричних аргументів, а це означає, що скрутно отримати її подання у прийнятному для обчислення вигляді. Тому розглянемо кілька окремих випадків.

Випадок 1: $\min\{r,t\} = n = 1$. Матриця $\Sigma = 2\sigma_r^2 \mathrm{I}_r$ перетворюється на скаляр ($\Sigma = 2\sigma_r^2$), матриця $\mathbf{\Omega}$ (12) також є скаляром $\mathbf{\Omega} = m\mu^2 = \frac{mk}{(k+1)}$, $\Lambda = \lambda$.

Гіпергеометрична функція матричного аргументу з правої частини виразу (17) перетворюється на функцію скалярного аргументу і згідно (7), (8), приймає вигляд

$$\begin{aligned} \overline{F}_1(m;(1+k)\Omega,(1+k)\Lambda) = \overline{F}_1(m; mk(1+k)\lambda) = \\ = \Gamma(m)\left[mk(1+k)\lambda\right]^{-(m-1)/2} \mathrm{I}_{m-1}\left(2\sqrt{mk(1+k)\lambda}\right), \end{aligned} \qquad (18)$$

де згідно (11) $\overline{\Gamma}_1(m) = \Gamma(m)$, $\overline{\Gamma}_1(1) = 1$. Тоді вираз для щільності ймовірностей можна записати в наступному вигляді:

$$f(\lambda) = (1+k)^m e^{-\lfloor km+(k+1)\lambda \rfloor}\left[km(k+1)\lambda\right]^{-(m-1)/2}\lambda^{m-1}\mathrm{I}_{m-1}\left(2\sqrt{km(k+1)\lambda}\right), \qquad (19)$$

що відповідає нецентральному розподілу $\chi^2/2$ з m ступенями свободи. Ергодична пропускна здатність для райсовского каналу MISO або SIMO системи дорівнює

$$\frac{\langle C\rangle_{t,r}}{W} = \int_0^\infty \log_2\left(1+\frac{\gamma}{t}\lambda\right) f(\lambda)\, d\lambda, \qquad (20)$$

де $f(\lambda)$ визначається за формулою (19).

Зауважимо, що для малих значень аргументу (z <<1) справедливо [9]

$$\mathrm{I}_\nu(z) \approx \left(\frac{z}{2}\right)^\nu / \Gamma(\nu+1)$$
,

Використовуючи дану апроксимацію для функції Бесселя, в (19) можна перейти до границі при $k \to 0$, що відповідає релеєвському каналу. Спрямовуючи k до нуля, після розкриття невизначеності в (20) отримаємо

$$f^0(\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{m-1}}{\Gamma(m)}, \tag{21}$$

що відповідає центральному розподілу $\chi^2/2$ з m ступенями свободи. Для релєєвського каналу при $\min\{r, t\} = n = 1$, ергодична пропускна здатність матиме вигляд

$$\frac{\langle C\rangle_{t.r}^0}{W} = \int_0^\infty \log_2\left(1 + \frac{\rho}{t}\lambda\right)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{m-1}}{\Gamma(m)}d\lambda, \tag{22}$$

Далі розглянемо варіанти SIMO і MISO.

Випадок 1.1: $r \ge t = 1$. Для райсовського каналу справедлива формула

$$\frac{\langle C\rangle_{1,r}}{W} = \int_0^\infty \log_2(1+\gamma\lambda)(1+k)^r e^{-[kr+(k+1)\lambda]}[kr(k+1)\lambda]^{-(r-1)/2}\lambda^{r-1}\mathrm{I}_{r-1}\left(2\sqrt{kr(1+k)\lambda}\right)d\lambda. \tag{23}$$

Для релеєвського каналу при t =1, довільному r і k = 0 з (23) отримуємо

$$\frac{\langle C\rangle_{1,r}^0}{W} = \int_0^\infty \log_2(1+\gamma\lambda)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{r-1}}{\Gamma(r)}d\lambda, \tag{24}$$

Випадок 1.2: $t \ge r = 1$.

Для райсовського каналу з t передавальними і однією прийомальної антенами середня пропускна здатність має вигляд

$$\frac{\langle C\rangle_{t,1}}{W} = \int_0^\infty \log_2\left(1+\frac{\gamma}{t}\lambda\right)(1+k)^t e^{-[kt+(k+1)\lambda]}[kt(k+1)\lambda]^{-(t-1)/2}\lambda^{t-1}\mathrm{I}_{t-1}\left(2\sqrt{kt(1+k)\lambda}\right)d\lambda, \tag{25}$$

а для релеєвського каналу

$$\frac{\langle C\rangle_{t,1}^0}{W} = \frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^\infty \log_2\left(1+\frac{\gamma}{t}\lambda\right)e^{-\lambda}\lambda^{t-1}d\lambda, \tag{26}$$

На рис. 1 представлені графіки залежності середньої пропускної здатності SIMO-систем від числа r приймальних (рис. 1а) або MISO-систем від t передавальних (рис. 1б) антен при різних значеннях відношення сигнал-шум: γ = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30 і 35 дБ. Суцільними лініями позначені криві для релеєвського (k = 0), пунктирними – для райсовського каналу (k = 10).

З аналізу кривих випливає, що пропускна здатність райсовського каналу більш, ніж релеєвського.

Різниця зникає з ростом числа антен, як передавальних, так і приймальних. Причому для райсовського каналу ергодична пропускна здатність практично не змінюється зі збільшенням числа передавальних антен при одній приймальній.

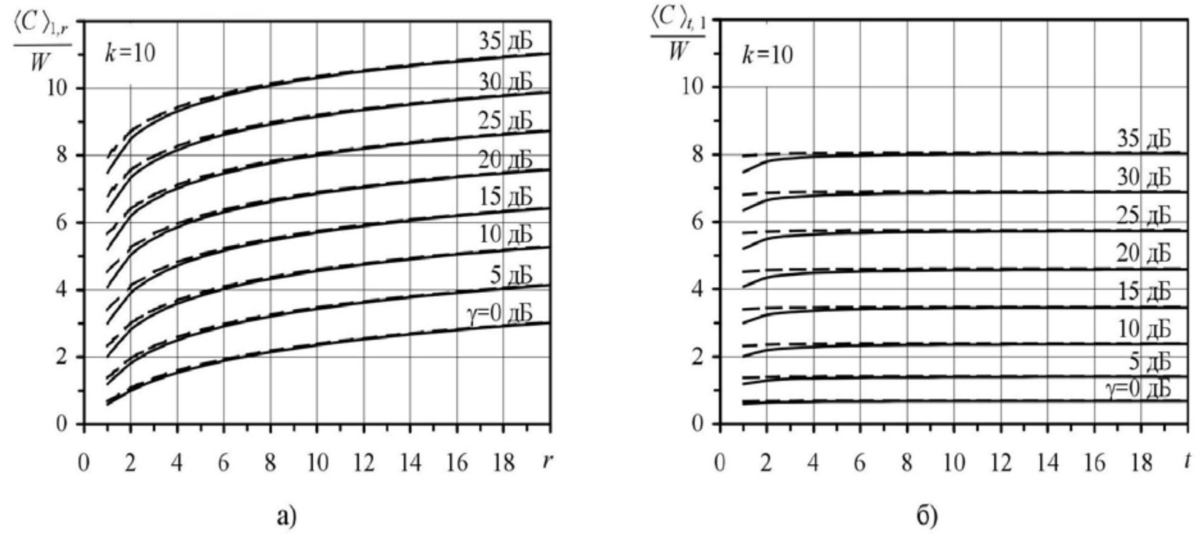

Рис. 1. Залежність ергодичної пропускної здатності від числа приймальних (а) і передавальних (б) антен

Випадок 2: $\min\{r,t\}=n=2, m\geq 2$. Отримаємо вираз для щільності розподілу $f(\lambda_1,\lambda_2)$ Для цього скористаємося спеціальним поданням гіпергеометричної функції матричних аргументів у вигляді [3, 10]

$$F_1\left(m;\begin{bmatrix}s_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}r_1 & 0\\ 0 & r_2\end{bmatrix}\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left[s_1\sqrt{r_1r_2}\right]}{(m)_l\,k!}P_l\left(\frac{r_1+r_2}{2\sqrt{r_1r_2}}\right), \qquad (27)$$

де $P_l(x)-$ многочлени Лежарана. Враховуючи, що в даному випадку

$$s_1=\frac{mn\mu^2}{2\sigma^2}=mnk=2mk$$

$$r_1=(1+k)\lambda_1, \quad r_2=(1+k)\lambda_2,$$

отримаємо вираз для щільності розподілу власних значень нецентральної матриці Уішарта:

$$f(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\pi^2}{\overline{\Gamma}_2(m)\overline{\Gamma}_2(2)}e^{-2mk-(1+k)(\lambda_1-\lambda_2)}(\lambda_1-\lambda_2)^2\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left[2mk(1+k)\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\right]^l}{(m)_l(l)!}P\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)_l, \qquad (28)$$

Зауважимо, що многочлени Лежандра пов'язані з узагальненою гіпергеометричною функцією наступною залежністю

$$P_n(x)=x^n\,{}_2F_1\left(-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2},1,\frac{x^2-1}{x^2}\right), \qquad (29)$$

де узагальнена гіпергеометрична функція може бути представлена у вигляді ряду [7]

$$F_1\left(-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2};1;x\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{n}{2}\right)_i\left(\frac{1-n}{2}\right)_i\frac{x^i}{(i!)^2},$$

Таким чином, після підстановки (28) в (10) отримаємо інтегральне представлення для пропускної здатності [3]:

$$\frac{\langle C\rangle_{t,r}}{W}=\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\log_2\left(1+\frac{\gamma}{t}\lambda_1\right)+\log_2\left(1+\frac{\gamma}{t}\lambda_2\right)\right]\frac{\pi^2}{\overline{\Gamma}_2(m)\overline{\Gamma}_2(2)}\exp\{-2mk-(k+1)(\lambda_1+\lambda_2)\}\times$$
$$\times(\lambda_1\lambda_2)^{m-2}(\lambda_1-\lambda_2)^2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left[2mk(k+1)(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}\right]^l}{(m)_l(l!)^2}P_l\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)d\lambda_1 d\lambda_2. \tag{30}$$

Отримана формула дозволяє обчислити ергодичну пропускну здатність для розглянутого випадку.

Висновки. У реальних умовах системи зв'язку з MIMO об'єднані в мережі і впливають один на одного, що призводить до взаємних перешкод. Взаємні перешкоди викликають зниження ергодичної пропускної здатності MIMO-каналу. Тому аналіз пропускної здатності без урахування даного явища буде неповним.

Аналіз отриманих в статті результатів дозволяє зробити наступні висновки:

1) розрахунок пропускної здатності райсовського каналу є більш складнішим завданням, ніж для релеєвського. Тому аналітичний вираз в замкнутій формі для точного значення пропускної здатності MIMO-систем в каналах з райсовськими завмираннями отримано тільки для $n=\min\{r,t\}\le 2$.

2) аналіз пропускної здатності SIMO- і MISO-систем ($n=\min\{r,t\}=1$) показує, що райсовський канал за пропускною здатністю лише незначно перевершує релеєвський.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ратнараджа Т. Комплексные случайные матрицы и пропускная способность райсовского канала / Т. Ратнараджа, Р. Вальянкур, М. Алво // Проблемы передачи информации. – 2005. – Т.41, вып.1. – С.3 – 27.

2. Ratnarajah T. Quadratic forms on complex random matrices and multi-antenna channel capacity : Re-port / T.Ratnarajah, R. Vaillancourt .– University of Ottawa, 2004. – 13 p.

3. Jayaweera S. On the capacity of multiantenna systems in the presence of Ricianfading / S. Jayaweera, H.Poor // Proc. IEEE Vehicular Technology Conference. Vancouver, Canada, September 2012. – Pp.1963 – 1967.

4. Jayaweera S.K. On the capacity of multiple antenna systems in Ricean fading / S.K. Jayaweera, H. Poor // IEEE Trans. On Wireless Commun.–2005. – Vol.4, №3. – Pp.1102 – 1111.

5. James A.T. Distribution of matrix variates and latent roots derived from normal samples /A.T.James // Annals of Mathematical Statistics.–2006.– Vol.37.– Pp.468 – 479.

6. James A.T .Distributions of matrix variates and latent roots derived from normal samples / A.T.James // Annals of Mathematical Statistics. – 2004. – Vol.35.– Pp.475 – 501.

7. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Дополнительные главы /А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И.Маричев. – М. : Наука, 1986. – 800 с.

8. Constantine A.G. Some noncentral distribution problems in multivariate analysis / A.G. Constantine // Annals of Mathematical Statistics.–December1963. – Vol. 34. – Pp. 1270 – 1285.

9. Справочник по специальным функциям под ред. М. Абрамовица и И.Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

10. Muirhead R.J. Expressions for some hyper-geometric function of matrix argument with applications / R.J.Muirhead // J.Mult.Anal. – 1995. – Vol.5. – Pp. 283 – 293.