УДК 528.29 д.т.н. Боровик О.В.(НАДПСУ ім. Б. Хмельницького)
к.т.н. Рачок Р.В. (НАДПСУ ім. Б. Хмельницького)

ОСОБЛИВОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЙ ГУСТИНИ РОЗПОДІЛУ ВИСОТ МІСЦЕВОСТІ

В окремих ймовірнісних моделях може бути зафіксованим діапазон можливих значень випадкової величини. До задач з використанням таких моделей належать, зокрема, задачі в яких враховується стохастична природа рельєфу місцевості. При їх розв'язанні виникає проблема апроксимації закону розподілу випадкової величини. У роботі показані особливості, які потрібно при цьому врахувати. Визначені способи корегування класичних розподілів.

Боровик О.В., Рачок Р.В. Особенности определения функций плотности распределения высот местности. *В отдельных вероятностных моделях может быть зафиксированным диапазон возможных значений случайной величины. К задач с использованием таких моделей относятся, в частности, задачи в которых учитывается стохастическая природа рельефа местности. При их решении возникает проблема аппроксимации закона распределения случайной величины. В работе показаны особенности, которые нужно при этом учесть. Определены способы корректировки классических распределений.*

O. Borovik, R. Rachok Determination of the probability density function of heights of terrain. *In a separate probabilistic models can be fixed the range of possible values of a random variable. To problems with the use of such models includes, in particular, tasks which take into account the stochastic nature of the terrain. Their solution to the problem of approximation of probability distribution of a random variable. The work shows the features that need to be considered. The adjustments to the classical distributions.*

Ключові слова: *випадкова величина, ймовірність, закон розподілу, функція густини розподілу.*

Постановка проблеми у загальному вигляді. Важливим елементом забезпечення прикордонної безпеки є інформаційна складова, яка реалізується, зокрема, в межах інтегрованої інформаційно-телекомунікаційної системи (ІІТС) Державної прикордонної служби України (ДПСУ) „Гарт". До складу ІІТС „Гарт" на сьогодні входить понад два десятка інформаційно-телекомунікаційних систем (ІТС). Серед цих систем останнім часом зростає роль ІТС геоінформаційного забезпечення „Гарт-17". Перспективним є використання ІТС „Гарт-17"для проведення геообробки в задачах забезпечення прикордонної безпеки. В окремих з них неможливе використання детермінованого підходу і доводиться застосовувати ймовірнісні моделі з статистичним описом рельєфу місцевості [1]. Важливою складовою цих моделей є закон розподілу висот місцевості. Від його коректного вибору суттєво залежить точність опису рельєфу. В окремих задачах статистичної радіофізики, методологію вирішення яких доцільно використовувати при проведенні геообробки в „Гарт-17", для опису рельєфу використовуються класичні закони розподілу (нормальний, рівномірний, експоненціальний). Однак рельєфу місцевості притаманний ряд особливостей. Найсуттєвішими з них при статистичному описі є невід'ємність висот та в окремих випадках суттєва обмеженість множини їх можливих значень. Для невеликих за розміром ділянок місцевості та ділянок рівнинної місцевості діапазон зміни висот звичайно є незначним. Тому функція густини розподілу висот має бути ненульовою лише в діапазоні від мінімальної до максимальної висоти для досліджуваної ділянки. У зв'язку з цим, безпосереднє використання класичних законів розподілу (нормального, показникового, експоненціального) які визначені на нескінченних множинах не є раціональним. Тому в окремих застосуваннях (зокрема при описі висот місцевості) доцільним є пошук підходів до врахування цих особливостей при визначенні законів розподілу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано вирішення даної проблеми та на які опираються автори. Останнім часом багато робіт присвячено дослідженню апроксимації законів розподілу з урахуванням специфіки задач, в яких вони використовуються. Так, у [1] розглядаються особливості законів розподілу при їх використанні в системах масового обслуговування. Для апроксимації розподілів з коефіцієнтами варіації меншими за 1 автор роботи пропонує використання гіпоекспоненціального закону. Корегування розподілу Джонсона з метою опису експериментальних даних, які приймають лише додатні значення, проводиться в [2]. У [3] піднімаються питання підвищення точності і спрощення процедури апроксимації законів розподілу експериментальних даних. У дисертаційному дослідженні [4] розглядається представлення функції розподілу випадкової величини у вигляді апроксимаційної суми Зубова з мінімізацією числа членів. Зокрема, у [4] показано, що в багатьох випадках можливо обмежитись лише двома доданками апроксимаційної суми Зубова. Різні підходи до апроксимації законів розподілу представлені в [5]. Серед них характерне використання ортогональних поліномів і нейронних мереж. Оцінка результатів апроксимації у [5] проводилась за допомогою максимуму і верхньої границі довірчого інтервалу за правилом трьох сігм для середнього квадратичного відхилення, а також з використанням критеріїв Пірсона і Колмогорова.

У дослідженні [6] на основі статистичної обробки даних про висоти місцевості визначаються параметри нормального закону розподілу. З використанням цього закону здійснюється оцінка висот наступних точок по траєкторії руху повітряного судна, які розглядаються як випадкові величини. При цьому забезпечуються задані ймовірнісні показники безпеки польоту.

З іншого боку, в ряді робіт, зокрема, в [7 – 8] опис рельєфу використовуються в задачах статистичної радіофізики. Для проведення такого опису застосовуються різні класичні закони розподілу (рівномірний, нормальний, експоненціальний).

Однак у [6 – 8] не враховуються особливості розподілів висот рельєфу місцевості. А саме те, що функція густини розподілу висот ділянки місцевості є відмінною від нуля лише на відрізку від мінімальної до максимальної висоти для цієї ділянки. Класичні ж закони розподілу визначаються, звичайно, на безмежній множині. З іншого боку, у [5] розглядаються випадки занулення функції густини ймовірності на границях інтервалу, проте для цього використовуються нейромережеві моделі. Однак для вирішення ряду задач, зокрема, статистичної радіофізики, необхідне аналітичне представлення функції густини розподілу. Існує багато методів аналітичного визначення сімейств розподілів, зокрема криві Пірсона або розподіли, побудовані по методу Грама-Шарлье [9]. Проте криві Пірсона мають складне аналітичне представлення, а криві Грама-Шарлье є близькими до нормального та Пуасонівського розподілів. Це обмежує їх безпосереднє використання в описаних вище задачах, де досліджувана величина визначена на вузькому відрізку.

Все це обумовлює ***актуальність*** визначення підходів до побудови функцій густини розподілу величин, які апріорі приймають обмежений діапазон можливих значень, зокрема висот рельєфу місцевості.

Мета статті – врахування особливостей статистичного опису рельєфу місцевості при визначенні закону розподілу висот.

Виклад основного матеріалу дослідження. Для опису різноманітних геофізичних полів можливе використання ймовірнісного підходу (найчастіше він застосовується для слабодиференційованих полів). В окремих задачах геообробки, зокрема прикладних застосуваннях статистичної радіофізики [4], при описі рельєфу місцевості також є доцільним використання цього підходу. При цьому висота місцевості розглядається як випадкова величина H, яка реалізується вибіркою з N значень $\{h_1,...,h_n\}$, що характеризується функцією розподілу ймовірності Φ(h) (ймовірність того, що висота менша за h). На практиці в багатьох прикладних задачах більш зручною є густина розподілу ймовірності p(h). Інтеграл цієї функції в межах $[h_1, h_2]$ дорівнюватиме ймовірності того, що $h_1 \le h \le h_2$.

Основою для побудови функції розподілу випадкової величини p(h) є набір значень $\{h_1,...,h_n\}$. Цей набір значень представляє собою так звану просту вибірку, яка представляє собою реалізацію вектора незалежних однаково розподілених випадкових величин. Якщо ніякої додаткової інформації про характер розподілу H немає, за основу можливо взяти емпіричний розподіл (гістограму). Емпіричний розподіл будується на основі частоти потрапляння значень величини H в підмножини на дійсній осі. При достатньо великому N такий розподіл достатньо точно характеризує густину розподілу ймовірностей. Приклади таких емпіричних розподілів для різних ділянок місцевості наведені на рис.1. Важливою їх особливістю є відмінність від нуля лише на відрізку $\left[h_{\min}, h_{\max}\right]$.

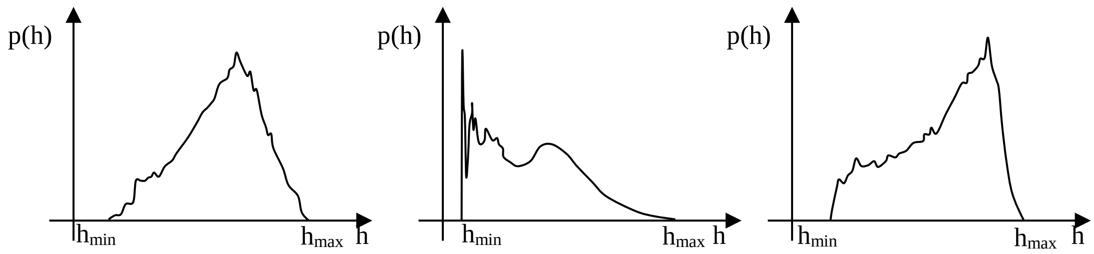

Рис. 1 – Емпіричні розподіли висот різних ділянок місцевості

Однак в багатьох прикладних задачах, зокрема, статистичної радіофізики, потрібне аналітичне представлення p(h). В окремих випадках відповідно до характеру досліджуваної випадкової величини можливо визначити аналітичні представлення функцій густини розподілу. Зазвичай такі сімейства розподілів є параметричними. Тоді задача відшукання p(h) зводиться до оцінювання невідомих параметрів. Існує багато способів побудови сімейств розподілів. Наприклад, це криві Пірсона, криві Грама-Шарлье. Однак громіздкість аналітичного представлення перших обмежує їх використання в складних застосуваннях. Криві Грама-Шарлье є близькими до більш простих класичних розподілів: нормального і пуасонівського. Апроксимація законів розподілу висот методом моментів або параметричними методами не завжди є можливою, оскільки не завжди можливо визначити, якому закону підпорядкована вибірка висот (рис. 1). Окрім цього досліджуваний закон розподілу може суттєво відрізнятись від набору стандартних законів. Підсумовуючи, можливо сформулювати ряд вимог до законів розподілу висот місцевості з урахуванням їх подальшого використання в задачах статистичної радіофізики:

1) зручне аналітичне представлення функції густини розподілу висот;
2) виконання вимог, які висуваються до функції густини розподілу висот;
3) врахування особливостей емпіричних розподілів висот.

З метою спрощення аналітичного опису густини розподілу висот доцільно використовувати відомі класичні закони розподілів (нормальний, експоненціальний, Пуасона, рівномірний). З аналізу емпіричного розподілу на основі критерію мінімальності середнього квадратичного відхилення можливо визначити найбільш близький закон розподілу. Однак, як буде показано далі, окрім рівномірного, ці закони не враховують особливості розподілів висот. У зв’язку з цим, виникає потреба корегування цих законів. Тому інший раціональний підхід полягає в проведенні апроксимації емпіричного розподілу поліномом на $\left[h_{\min}, h_{\max}\right]$ з урахуванням вимог до функції густини розподілу.

Розглянемо виконання вимог, які висуваються до функції густини розподілу висот.

Важливою загальною властивістю функції p(h) є умова нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(h)dh = 1. \tag{1}$$

Ця умова відповідає тому, що числове значення величини h знаходиться в межах від -∞ до ∞. Однак для невід’ємних висот місцевості нижню межу інтегрування в (1) доцільно змінити на 0. Для певної ділянки місцевості можливо визначити мінімальну h_{min} і максимальну h_{max} висоту. Оскільки для цієї ділянки апріорі висота не може бути меншою за h_{min} і більшою за h_{max}

$$p(h)=\begin{cases}0, h<h_{\min}\\ p_1(h), h_{\min}\le h\le h_{\max}\\ 0, h>h_{\max}\end{cases}, \qquad (2)$$

а умова (1) трансформується в

$$\int_{h_{\min}}^{h_{\max}} p_1(h)dh=1 \ . \qquad (3)$$

Слід відмітити, що для рівномірного закону розподілу функція густини розподілу

$$p_r(h)=\begin{cases}0, h<h_{\min}\\ \dfrac{1}{h_{\max}-h_{\min}}, h_{\min}\le h\le h_{\max}\\ 0, h>h_{\max}\end{cases} \qquad (4)$$

має вигляд рис.2 і „автоматично” відповідає вимогам (2) – (3).

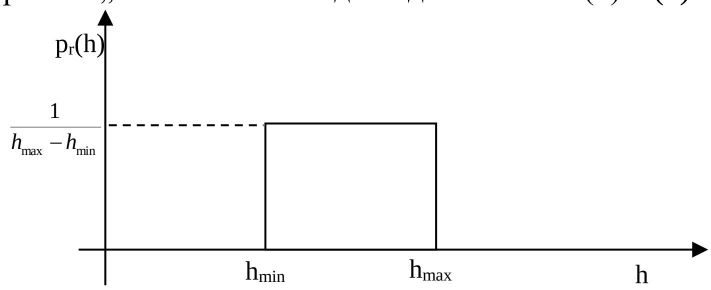

Рис. 2 – Функція густини рівномірного розподілу висот

Рівномірний розподіл висот використовувався в задачах статистичної радіофізики у [7 – 8]. Простота аналітичного представлення (4) спрощувала визначення ймовірності наявності радіозв’язку. Однак при використанні рівномірного закону втрачається інформація про характер нерівномірності розподілу висот в межах $[h_{\min}, h_{\max}]$. Це може привести до суттєвого спотворення результатів, отриманих з використанням такого закону.

Для експоненціального (показникового) та нормального розподілів вимоги (2) – (3) не виконуються.

Експоненціальний закон розподілу $p_e(h)=\alpha\cdot\exp(-\alpha\cdot h)$ визначений на $[0,\infty)$. Тому, якщо безпосередньо використовувати цей закон, ми припускаємо, що висоти ділянки місцевості змінюються від 0 до ∞. При цьому зі зростанням висоти зменшується частота її появи. Звичайно, в багатьох випадках це не виконується і тоді використовувати цей закон не раціонально.

Для експоненціального розподілу нормуюча умова виконується на $[0,\infty)$ (рис. 3). Тому на рис. 3 площа фігури обмеженої осями координат та графіком функції дорівнюватиме 1. Проте величина інтегралу $p_e(h)$ на інтервалі $[h_{\min}, h_{\max}]$ (площа заштрихованої на рис. 3 фігури) буде менша за 1. З рис. 3 зрозуміло, що невідповідність площ буде тим більшою, чим меншою є величина $h_{\max}-h_{\min}$ (та для експоненціального розподілу чим більшою є $h_{\min}$). Тому у випадках невеликих інтервалів $[h_{\min}, h_{\max}]$ корегування розподілів є особливо важливим.

Якщо розглянути більш складну функцію $\alpha\cdot e^{\beta\cdot h}$ і застосувати до неї умову нормування на $[0,\infty)$ отримаємо β = -α, що відповідає класичному експоненціальному закону $p_e(h)=\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot h}$. Для отримання скорегованого експоненціального закону, який відповідатиме (2) та (3), використаємо аналогічний підхід.

$$\int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \beta \cdot e^{-\alpha \cdot h} dh = 1,$$

$$\beta = \frac{\alpha}{e^{-\alpha \cdot h_{\min}} - e^{-\alpha \cdot h_{\max}}},$$

$$p_{em}(h) = \begin{cases} 0, h < h_{\min} \\ \dfrac{\alpha}{e^{-\alpha \cdot h_{\min}} - e^{-\alpha \cdot h_{\max}}} \cdot e^{-\alpha \cdot h}, h_{\min} \le h \le h_{\max} \\ 0, h > h_{\max} \end{cases} \tag{5}$$

Для отримання (5) можливо застосувати і інший підхід – провести інтегрування $p_e(h)$ на $\left[h_{\min}, h_{\max}\right]$ і обернену до результату величину $(e^{-\alpha \cdot h_{\min}} - e^{-\alpha \cdot h_{\max}})^{-1}$ використати як корегуючий множник.

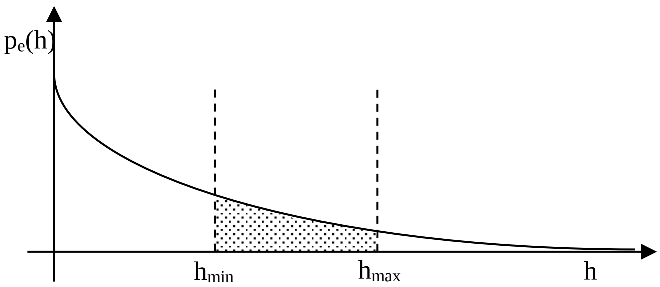

Рис. 3 – Функція густини експоненціального розподілу висот

Для багатьох випадкових величин одні значення звичайно більш ймовірні ніж інші і найбільш ймовірне значення є єдиним.

Цьому значенню відповідає максимум густини розподілу. При відхиленні від цього максимуму ймовірність зменшується. В таких випадках доцільне використання нормального закону розподілу (6), який визначений на $\left(-\infty, +\infty\right)$.

$$p_n(h) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(h-\bar{h})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \tag{6}$$

Однак така широка область визначення не повною мірою відповідає опису висот місцевості. Використовуючи класичний нормальний розподіл, ми припускаємо, що наявні висоти менші за $h_{\min}$ і більші за $h_{\max}$ (рис. 4).

І хоча імовірність цього є порівняно невеликою, проте при використанні цього розподілу необхідно проводити інтегрування від -∞ до ∞.

Однак це не повною мірою відповідає фізичному змісту при описі висот, оскільки висоти є додатними і для визначеної ділянки знаходяться в межах $\left[h_{\min}, h_{\max}\right]$.

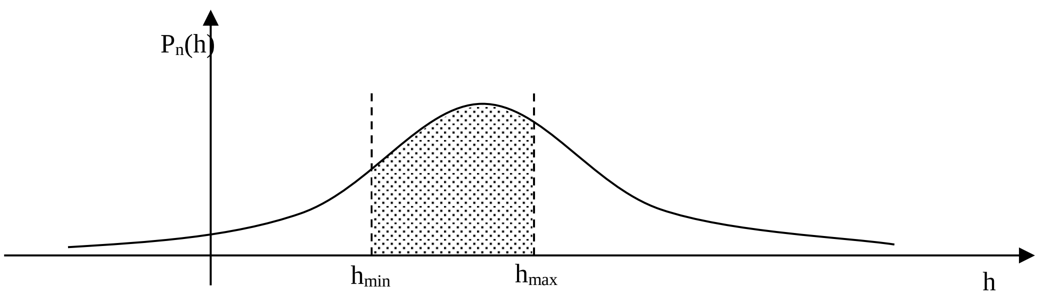

Рис. 3 – Функція густини нормального розподілу висот

У зв’язку з цим, пропонується провести корегування нормального закону відповідно до (2). Однак при цьому за рахунок „відсікання” частин залежності перестане виконуватись умова нормування.

Для її виконання необхідне корегування нормального закону.

Отримання коригуючого множника у випадку використання нормального закону розподілу пропонується з використанням чисельних методів (трапецій, метода Сімпсона) наступним чином:

$$k_n = \frac{1}{\int\limits_{h_{\min}}^{h_{\max}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(h-\bar{h})^2}{2\cdot\sigma^2}} dh}.$$

Тоді остаточний вигляд відкоригованої функції густини нормального закону розподілу буде наступним

$$p_{nm}(h) = \begin{cases} 0, h < h_{\min} \\ \frac{k_n}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(h-\bar{h})^2}{2\cdot\sigma^2}}, h_{\min} \le h \le h_{\max} \\ 0, h > h_{\max} \end{cases}. \quad (7)$$

Окрім умови нормування функція густини розподілу має забезпечувати відповідність вибірці по моментам випадкової величини. Зупинимось на двох перших моментах.

Перший момент відповідає математичному очікуванню. При використанні нормального розподілу проведення його корегування (7) може привести до спотворення цієї характеристики.

Відкидання лівої і правої частин (занулення) функції поза межами $[h_{\min}, h_{\max}]$ може призвести до зміщення математичного очікування.

Для кращого розуміння характеру цього зміщення можна використати аналогію між математичним очікуванням і центром ваги стержня. Аналогом функції густини розподілу виступає функція густини матеріалу стержня. Я

кщо математичне очікування знаходитиметься посередині $[h_{\min}, h_{\max}]$, тобто буде рівне $\frac{h_{\min} + h_{\max}}{2}$ корегування (7) його не змістить.

Симетричне відкидання однакових за площею частин функції не змістить положення центру ваги і відповідно математичного очікування.

З використанням цієї аналогії зрозуміло, що максимальне спотворення першого моменту відбуватиметься, коли він наближатиметься до границь інтервалу $[h_{\min}, h_{\max}]$. При цьому теоретично максимально можливе відхилення не перевищуватиме $\frac{h_{\max} - h_{\min}}{2}$.

При використанні експоненціального розподілу проведення його корегування (5) може привести до суттєвих спотворень математичного очікування. Зі збільшенням $h_{\min}$ величина спотворення зростатиме.

У зв’язку з цим, можна зробити висновок, що експоненціальний розподіл доцільно використовувати лише в окремих випадках, коли: $h_{\min}=0$, $h_{\max} >> 0$, частота появи висот з їх збільшенням різко спадає (бажано за експоненціальним законом).

Результати дослідження математичного очікування при інтегруванні в межах $[h_{\min}, h_{\max}]$ при використанні нормального і експоненціального законів без і з коригуванням наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Математичне очікування висоти для різних ділянок місцевості Одеської області

№ ділянки	$\overline{H}$, м	Нормальний закон		Нормальний закон з корегуванням		Експоненціальний закон		Експоненціальний закон з корегуванням	
		$\overline{H}$, м	$\delta\overline{H}$, %	$\overline{H}$, м	$\delta\overline{H}$, %	$\overline{H}$, м	$\delta\overline{H}$, %	$\overline{H}$, м	$\delta\overline{H}$, %
1	185	170	8	181	2	52	72	153	17
2	161	147	21	158	15	53	71	131	29
3	142	129	30	138	25	51	72	111	40
4	173	163	12	170	8	55	70	141	24

У другому стовпці таблиці наведене математичне очікування висоти для вхідної вибірки висот. Звичайно з використанням класичних законів розподілу при інтегруванні на безмежному інтервалі (від 0 до ∞ для експоненціального і від – ∞ до ∞ для нормального) математичні очікування повністю відповідатимуть вхідній вибірці. Однак в нашій задачі апріорі відомо, що висоти знаходяться в межах $\left[h_{\min}, h_{\max}\right]$. Тому за рахунок скорочення меж інтегрування до $\left[h_{\min}, h_{\max}\right]$ отримана значна розбіжність до 30 % для нормального і до 72 % для експоненціального законів розподілу. Зрозуміло, що для опису висот обраної місцевості використання експоненціального закону недоцільне.

Однак при використанні корегування (5) та (7) ситуація дещо виправляється.

Для нормального закону розподілу з корегуванням максимальне відхилення математичного очікування висоти не перевищує 25 %, а для експоненціального закону з корегуванням не перевищує 40 %.

Аналогічно було досліджено другий момент випадкової величини. Центрований другий момент відповідає дисперсії величини. Його аналітичне дослідження при обмеженні меж інтегрування та проведенні корегування є достатньо складним. Тому аналіз цієї характеристики було проведене з використанням чисельних методів. Результати обчислень наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Дисперсія висоти для різних ділянок місцевості Одеської області

№ ділянки	D, м^2	Нормальний закон		Нормальний закон з корегуванням		Експоненціальний закон		Експоненціальний закон з корегуванням	
		D, м^2	δD, %	D, м^2	δD, %	D, м^2	δD, %	D, м^2	δD, %
1	1103	914	17	846	23	4074	269	1745	58
2	1354	1044	5	1007	9	3216	192	1820	65
3	1336	1006	9	993	10	2466	124	1752	59
4	1174	965	13	954	14	3674	233	2020	83

З наведених у таблиці 2 результатів випливає, що проведення корегування незначно погіршує ситуацію для нормального закону розподілу і суттєво покращує для експоненціального закону. Однак результати для експоненціального закону без корегування свідчать про недоречність його використання для даних ділянок.

Висновки. Розподіли висот ділянок місцевості характеризується, зокрема, мінімальними та максимальними висотами. Ймовірність наявності висот менших за мінімальну і більших за максимальну мають дорівнювати нулю. Ця умова виконується для рівномірного закону розподілу.

Однак при його використанні втрачається внутрішня структура розподілу висот в межах $\left[h_{\min}, h_{\max}\right]$.

Тому його застосування може привести до суттєвого спрощення опису і відповідно спотворення результатів. При використанні класичних нормального та експоненціального розподілів вимога знаходження висот в межах $\left[h_{\min}, h_{\max}\right]$ порушується. Використовуючи ці розподіли, ми припускаємо, що на ділянці можуть бути висоти поза межами цього інтервалу.

Якщо в прикладних задачах використовувати ці класичні закони, проведення інтегрування лише в межах $[h_{\min}, h_{\max}]$ не є коректним.

Чим вужчим є інтервал $[h_{\min}, h_{\max}]$, тим більшим є порушення умови нормування при використанні класичних нормального і експоненціального законів розподілу. Для забезпечення виконання умови нормування при описі висот ділянок місцевості у випадку експоненціального і нормального законів розподілу можливим є їх корегування відповідно до (5) та (7).

Апроксимацію густини розподілу висот в задачах дослідження рельєфу невеликих за розміром ділянок доцільно проводити функціями виду (2).

Напрямом подальших досліджень є проведення апроксимації емпіричного закону розподілу висот місцевості функціями різного виду з урахуванням умови (2).

ЛІТЕРАТУРА:

1. Алиев Т.И. Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. –2013. – №. 2 (84). – С. 88 – 93.

2. Карпов И.Г., Зырянов Ю.Т., Грибков А.Н. Модифицированные распределения Джонсона и их применение для аппроксимации законов распределения экспериментальных данных // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 2. – С. 46 – 50.

3. Карпов И.Г., Грибков А.Н. Модернизация распределений Пирсона для аппроксимации двухсторонних законов распределения экспериментальных данных // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т. 324. – № 2. – С. 5 – 10.

4. Тукачев П. А. Построение функций распределения в математических моделях: дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Тукачев Павел Анатольевич; Санкт-Петербургский государственный университет . – Санкт-Петербург, 2002. – 102 с.

5. Лёзина И. В. Аппроксимативный анализ законов распределения ортогональными полиномами и нейросетевыми моделями: дис. … канд. тех. наук: 05.13.18 / Лёзина Ирина Викторовна; Самарский государственный аэрокосмический университет. – Самара, 2007. – 113 с.

6. Ямпольский С.М., Наумов А.И., Кичигин Е.К., Рубинов В.И. Статистическая модель прогнозного профиля рельефа местности в задаче выполнения маловысотного полета воздушного судна по цифровой карте высот // Электронный журнал „Труды Московского авиационного института”. – 2014. – № 76. – С. 14 – 29.

7. Шпорт М.М. Урахування забезпеченості радіозв'язком при побудові раціональних маршрутів в ході вирішення задач оперативно-службової діяльності Державної прикордонної служби України / М.М. Шпорт // Збірник наукових праць Національної академії Державної прикордонної служби України. Серія: Військові та технічні науки – 2013 – № 1(59) – С. 312 – 320.

8. Рачок Р.В. Оцінка завадостійкості системи зв'язку при урахуванні різних законів розподілу висот місцевості і відстані між абонентами // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2002. – № 1. – С.186 – 188.

9. Иголкин В.Н., Ковригин А.Б., Старшинов А.И., Хохлов В.А. Статистическая классификация, основанная на выборочных распределениях.– Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 104 с.