Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, Т.10, №1, 39-58

УДК 517.5

В. А. Войтович, А. П. Мусієнко (Ін–т математики НАН України, Київ)

НЕРІВНОСТІ ТИПУ ЛЕБЕГА ДЛЯ СУМ ВАЛЛЕ ПУССЕНА ТА ЇХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ АНАЛОГІВ НА КЛАСАХ $(\psi, \bar{\beta})$-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

We obtain the estimates of norm of deviations of the de Vallée Poussin sums and interpolation analogues of sums of Vallée Poussin from the functions that belong to the space $C^{\psi}_{\bar{\beta}} L_s$, $1 \leq s \leq \infty$ and are represented by the best approximations of $(\psi, \bar{\beta})$-differentiable functions of this sort by trigonometric polynomials in the metric L_s.

Одержано оцінки норм відхилень сум Валле Пуссена та їх інтерполяційних аналогів від функцій з множин $C^{\psi}_{\bar{\beta}} L_s$, $1 \leq s \leq \infty$, які виражаються через найкращі наближення $(\psi, \bar{\beta})$-похідних таких функцій тригонометричними поліномами в метриці простору L_s.

Робота є продовженням досліджень [1 – 9] по вивченню апроксимативних властивостей сум Валле Пуссена або їх інтерполяційних аналогів [10 – 13] на класах $(\psi, \bar{\beta})$-диференційовних функцій.

Нехай L_s, $1 \leq s < \infty$, — простір 2π-періодичних сумовних в s–му степені на $(0, 2\pi)$ функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_s = \Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^s \, dt \Big)^{1/s}$. L_∞ — простір вимірних і істотно обмежених 2π-періодичних функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_t |f(t)|$. C — простір неперервних 2π-періодичних функцій $f(t)$, в якому норма задається рівністю $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$.

Нехай f — 2π-періодична, сумовна функція ($f \in L_1$) і

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— її ряд Фур'є. Нехай, далі $\psi = \psi(k)$ і $\bar{\beta} = \beta_k$, $k \in \mathbb{N}$, — довільні послідовності дійсних чисел. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \Big(a_k \cos\big(kx + \frac{\beta_k \pi}{2}\big) + b_k \sin\big(kx + \frac{\beta_k \pi}{2}\big) \Big)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то цю функцію називають $(\psi, \bar{\beta})$-похідною функції f і позначають через $f_{\bar{\beta}}^{\psi}$ [14, с. 33]. Множину всіх функцій f, які мають $(\psi, \bar{\beta})$–похідну, позначають через $L_{\bar{\beta}}^{\psi}$. Якщо $f \in L_{\bar{\beta}}^{\psi}$ і в той же час $f_{\bar{\beta}}^{\psi} \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з $L_1^0 = \{\varphi \in L_1 : \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)dt = 0\}$, то записують $f \in L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$. Якщо $F_{\bar{\beta}}^{\psi} = f$, то функцію F називають $(\psi, \bar{\beta})$-інтегралом функції f, при цьому записують $F(x) = \mathcal{J}_{\bar{\beta}}^{\psi}(f; x)$. Покладемо $C_{\bar{\beta}}^{\psi} = L_{\bar{\beta}}^{\psi} \bigcap C$, $C_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N} = L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N} \bigcap C$. Означення $(\psi, \bar{\beta})$–похідних та $(\psi, \bar{\beta})$–інтегралів та класів $L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$ та $C_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$ належать О.І. Степанцю [15, с. 112].

Надалі будемо вважати, що послідовність $\psi(k)$, яка породжує класи $L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$ і $C_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$, задовольняє умову $\mathcal{D}_0$ $(\psi \in \mathcal{D}_0)$, тобто $\psi(k)$ додатна і така, що

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0. \tag{1}$$

У випадку, коли $\psi \in \mathcal{D}_0$, множини $C_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$ складаються з функцій, регулярних в усій комплексній площині, тобто з цілих функцій.

Відомо [15, с. 144], що класи $L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$ складаються з функцій, які майже при всіх $x \in \mathbb{R}$ можна зобразити у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \Psi_{\bar{\beta}}(t) dt, \ \varphi \in \mathfrak{N}, \ \varphi \perp 1, \tag{2}$$

з сумовним ядром $\Psi_{\bar{\beta}}(t)$, ряд Фур'є якого має вигляд

$$\Psi_{\bar{\beta}}(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\big(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\big), \ \psi(k) > 0, \ \beta_k \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Якщо ж $f \in C_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$, то рівність (2) виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Одиничну кулю простору L_s^0, $1 \leq s \leq \infty$, позначимо через U_s^0 і покладемо $C_{\bar{\beta}}^{\psi} U_s^0 = C_{\bar{\beta},s}^{\psi}$, $L_{\bar{\beta}}^{\psi} U_s^0 = L_{\bar{\beta},s}^{\psi}$.

Нехай $\mathcal{T}_{2m-1}$ підпростір тригонометричних поліномів $t_{m-1}(x) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} (\alpha_k \cos kx + \gamma_k \sin kx)$, $\alpha_k, \ \gamma_k \in \mathbb{R}$, порядок яких не перевищує $m-1$. Величина

$$E_m(f)_X = \inf_{t_{m-1} \in \mathcal{T}_{2m-1}} \|f - t_{m-1}\|_X$$

є найкращим наближенням функції $f \in X \subset L_1$ в метриці простору X тригонометричними поліномами порядку $m-1$. Далі в ролі X виступатимуть простори C або L_s, $1 \leq s \leq \infty$.

Позначимо через $V_{n,p}(f)$ суми Валле Пуссена функції $f \in L_1$, тобто поліноми вигляду

$$V_{n,p}(f) = V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x),$$

де $S_k(f) = S_k(f;x)$ — частинні суми Фур'є порядку k функції f, а $p = p(n)$ — певний натуральний параметр, $p \leqslant n$. При $p = 1$ суми Валле Пуссена $V_{n,p}(f)$ є частинними сумами Фур'є $S_{n-1}(f)$ порядку $n-1$, якщо ж $p = n$, то суми $V_{n,p}(f)$ перетворюються у відомі суми Фейєра $\sigma_{n-1}(f)$ порядку $n-1$:

$$\sigma_{n-1}(f) = \sigma_{n-1}(f;x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x).$$

Крім звичайних сум Валле Пуссена $V_{n,p}(f)$ будемо розглядати їх інтерполяційні аналоги $\widetilde{V}_{n,p}(f)$.

Нехай $f \in C$. Через $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$ будемо позначати тригонометричний поліном порядку $n-1$, що інтерполює $f(x)$ у точках $x_k^{(n-1)} = \frac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто такий, що

$$\widetilde{S}_{n-1}(f; x_k^{(n-1)}) = f(x_k^{(n-1)}), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Інтерполяційний тригонометричний поліном $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$, можна записати в такий спосіб (див., наприклад, [18, с. 13–14]):

$$\widetilde{S}_{n-1}(f;x)=\frac{a_0^{(n-1)}}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k^{(n-1)}\cos kx+b_k^{(n-1)}\sin kx), \qquad (3)$$

де

$$a_k^{(n-1)}=\frac{2}{2n-1}\sum_{j=0}^{2n-2}f(x_j^{(n-1)})\cos kx_j^{(n-1)},\ \ k=0,1,...,n, \qquad (4)$$

$$b_k^{(n-1)}=\frac{2}{2n-1}\sum_{j=0}^{2n-2}f(x_j^{(n-1)})\sin kx_j^{(n-1)},\ \ k=1,2,...,n. \qquad (5)$$

Поліноми

$$\widetilde{V}_{n,p}(f;x)=\frac{a_0^{(n-1)}}{2}\lambda_0^{(n)}+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}(a_k^{(n-1)}\cos kx+b_k^{(n-1)}\sin kx), \qquad (6)$$

де

$$\lambda_k^{(n)}=\begin{cases}1, & 0\leqslant k\leqslant n-p,\\ 1-\frac{k-n+p}{p}, & n-p+1\leqslant k\leqslant n.\end{cases} \qquad (7)$$

$p\in\mathbb{N}$, $1\le p\le n$, а $a_k^{(n-1)}$ і $b_k^{(n-1)}$ означені формулами (4) та (5) відповідно, називають інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена з параметрами n та p. При $p=1$ суми $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ співпадають з інтерполяційними тригонометричними поліномами $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$. У випадку $p=n$ суми $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ перетворюються в інтерполяційні суми Фейєра $\widetilde{\sigma}_{n-1}(f;x)$ порядку $n-1$:

$$\widetilde{\sigma}_{n-1}(f;x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{S}_k^{(n-1)}(f;x),$$

де

$$\widetilde{S}_k^{(n-1)}(f;x)=\frac{a_0^{(n-1)}}{2}+\sum_{j=1}^{k}(a_j^{(n-1)}\cos jx+b_j^{(n-1)}\sin jx).$$

В загальному випадку інтерполяційні суми $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ виражаються через суми $\widetilde{S}_k^{(n-1)}$ наступним чином

$$\widetilde{V}_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} \widetilde{S}_k^{(n-1)}(f;x).$$

Позначимо через $\rho_{n,p}(f;x)$ і $\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x)$ величини вигляду

$$\rho_{n,p}(f;x) = f(x) - V_{n,p}(f;x),$$

$$\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x) = f(x) - \widetilde{V}_{n,p}(f;x).$$

В роботі встановлено асимптотично непокращувані аналоги нерівностей типу Лебега для відхилень сум $V_{n,p}(f)$ та $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ на множинах $C_{\bar{\beta}}^{\psi} L_s$ при $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ і $1 \le s \le \infty$.

Теорема 1. *Нехай $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді для довільних $f \in C_{\bar{\beta}}^{\psi} L_s$, $1 \le s < \infty$, $n, p \in \mathbb{N}$, $p \le n$ справедлива нерівність*

$$\|\rho_{n,p}(f;x)\|_C \le$$

$$\le \Big(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi p} \psi(n-p+1) + O(1) \sum_{k=n-p+2}^{\infty} \psi(k) \tau_{n,p}(k) \Big) E_{n-p+1}(f_{\bar{\beta}}^{\psi})_{L_s}. \quad (8)$$

При цьому для будь-якої функції $f \in C_{\bar{\beta}}^{\psi} L_s$, $1 \le s < \infty$ і довільних $n, p \in \mathbb{N}$, $p \le n$ в множині $C_{\bar{\beta}}^{\psi} L_s$, $1 \le s < \infty$, знайдеться функція $F(x) = F(f;n;p;x)$ така, що $E_{n-p+1}(F_{\bar{\beta}}^{\psi})_{L_s} = E_{n-p+1}(f_{\bar{\beta}}^{\psi})_{L_s}$, і для неї при $n - p \to \infty$ виконується рівність

$$\|\rho_{n,p}(F;x)\|_C =$$

$$= \Big(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi p} \psi(n-p+1) + O(1) \sum_{k=n-p+2}^{\infty} \psi(k) \tau_{n,p}(k) \Big) E_{n-p+1}(F_{\bar{\beta}}^{\psi})_{L_s}. \quad (9)$$

У (8) і (9) $s' = \frac{s}{s-1}$, коефіцієнти $\tau_{n,p}(k)$ визначаються рівністю

$$\tau_{n,p}(k) = \begin{cases} 1 - \frac{n-k}{p}, & n-p+1 \le k \le n-1, \\ 1, & k \ge n, \end{cases} \quad (10)$$

а $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.

Доведення теореми 1. Доведення будемо проводити за схемою, яка запропонована в теоремі 1 роботи [9]. Нехай $f \in C^{\psi}_{\bar\beta} L_s$, $1 \leq s \leq \infty$. Тоді в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ (див., наприклад, [19, с. 810]) має місце інтегральне зображення

$$\rho_{n,p}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\bar\beta}(x-t)\Psi_{1,n,p}(t)dt =$$

$$= \frac{\psi(n-p+1)}{\pi p}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\bar\beta}(x-t)\cos\Big((n-p+1)t - \frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\Big)dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\bar\beta}(x-t)\Psi_{2,n,p}(t)dt, \qquad (11)$$

де $\Psi_{j,n,p}(t)$ означається рівністю

$$\Psi_{j,n,p}(t) = \sum_{k=n-p+j}^{\infty} \tau_{n,p}(k)\psi(k)\cos\Big(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\Big),\ j \in \mathbb{N}. \qquad (12)$$

Функції $\cos\big((n-p+1)t - \frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big)$ та $\Psi_{2,n,p}(t)$ ортогональні до будь-якого тригонометричного полінома t_{n-p} порядку не вищого $n-p$, тому в силу (11)

$$\rho_{n,p}(f;x) =$$

$$= \frac{\psi(n-p+1)}{\pi p}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta_{n,p}(x-t)\cos\Big((n-p+1)t - \frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\Big)dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta_{n,p}(x-t)\Psi_{2,n,p}(t)dt, \qquad (13)$$

де

$$\delta_{n,p}(\cdot) = f^{\psi}_{\bar\beta}(\cdot) - t_{n-p}(\cdot). \qquad (14)$$

Обравши в (13) у ролі $t_{n-p}(\cdot)$ поліном $t^*_{n-p}(\cdot)$ найкращого наближення в просторі L_s функції $f^{\psi}_{\bar\beta}(\cdot)$ та використовуючи формулу (10) і нерівність Гельдера

$$\Big\| \int_{-\pi}^{\pi} K(t-u)\varphi(u)du \Big\|_C \leq$$

$$\leq \|K\|_{s'}\|\varphi\|_s, \ \varphi \in L_s, \ K \in L_{s'}, \ 1 \leq s \leq \infty, \ \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1, \qquad (15)$$

(див., наприклад, [20, с. 43]), інтеграли рівності (13) оцінимо наступним чином:

$$\Big\| \int_{-\pi}^{\pi} \delta_{n,p}(x-t)\cos(n-p+1)t\,dt \Big\|_C \leq$$

$$\leq \|\delta_{n,p}\|_s \|\cos t\|_{s'} \leq \|\cos t\|_{s'} E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\bar\beta})_{L_s}, \qquad (16)$$

$$\Big\| \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta_{n,p}(x-t)\Psi_{2,n,p}(t)dt \Big\|_C \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\|\delta_{n,p}\|_s \|\Psi_{2,n,p}\|_{s'} \leq \frac{2^{1/s'}}{\pi^{1/s}} \sum_{k=n-p+2}^{\infty} \psi(k)\tau_{n,p}(k)E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\bar\beta})_{L_s}. \quad (17)$$

Об'єднуючи (16) і (17) отримуємо (8).

Доведемо другу частину теореми. З інтегрального зображення (11) і факту ортогональності функції $\Psi_{2,n,p}(t)$ до будь-якого тригонометричного полінома $t_{n-p} \in \mathcal{T}_{2(n-p)+1}$ випливає, що для довільної функції $f \in C^{\psi}_{\bar\beta}L_s$, $1 \leq s < \infty$, $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ виконується рівність

$$|\rho_{n,p}(f;x)| =$$

$$= \frac{\psi(n-p+1)}{\pi p}\Big| \int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\bar\beta}(x-t)\cos\big((n-p+1)t - \frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big)dt\Big| +$$

$$+O(1)\sum_{k=n-p+2}^{\infty} \psi(k)\tau_{n,p}(k)E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\bar\beta})_{L_s}. \qquad (18)$$

Враховуючи (18), щоб переконатися в справедливості (9) досить показати, що якою б не була функція $\varphi \in L_s$, $1 \le s < \infty$ знайдеться функція $\Phi(\cdot) = \Phi(\varphi; \cdot)$, для якої при всіх $n, p \in \mathbb{N}$, $p \le n$

$$E_{n-p+1}(\Phi)_{L_s} = E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s} \tag{19}$$

і, крім того, має місце рівність

$$\Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi(t) \cos\Big((n-p+1)t + \frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\Big)dt\Big| = \|\cos t\|_{s'} E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}. \tag{20}$$

В якості $\Phi(\cdot)$ розглянемо функцію

$$\Phi(t) = \|\cos t\|_{s'}^{1-s'} \Big|\cos\big((n-p+1)t + \frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big)\Big|^{s'-1} \times$$

$$\times \mathrm{sign} \cos\big((n-p+1)t + \frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big) E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}. \tag{21}$$

Для неї

$$\|\Phi(t)\|_s = \|\cos t\|_{s'}^{1-s'} \Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big|\cos\big((n-p+1)t +$$

$$+ \frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\Big)\Big|^{(s'-1)s} dt\Big)^{\frac{1}{s}} E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s} =$$

$$= \|\cos t\|_{s'}^{1-s'} \Big\|\cos\big((n-p+1)t - \frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big)\Big\|_{s'}^{s'-1} E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s} =$$

$$= E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}. \tag{22}$$

Крім того, оскільки для довільного $t_{n-p} \in \mathcal{T}_{2(n-p)+1}$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} t_{n-p}(\tau) |\Phi(\tau)|^{s-1} \mathrm{sign}\Phi(\tau) d\tau = \Big(\|\cos t\|_{s'}^{1-s'} E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}\Big)^{s-1} \times$$

$$\times \int\limits_{-\pi}^{\pi} t_{n-p}(\tau) \cos\Big((n-p+1)\tau - \frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\Big) d\tau = 0,$$

то на підставі теореми 1.4.5 роботи [20, с. 28] робимо висновок, що поліном $t^*_{n-p}\equiv 0$ є поліномом найкращого наближення функції $\Phi(t)$ в метриці простору $L_s, 1\le s<\infty$. Отже, з урахуванням (22),

$$E_{n-p+1}(\Phi)_{L_s}=\|\Phi\|_s=E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}. \tag{23}$$

В силу (21),

$$\Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi(t)\cos\big((n-p+1)t+\frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big)dt\Big|=$$

$$=\|\cos t\|_{s'}^{1-s'}E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}\Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big|\cos\big((n-p+1)t+\frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big)\big|^{s'-1}\times$$

$$\times\operatorname{sign}\cos\big((n-p+1)t+\frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big)\cos\big((n-p+1)t+\frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big)dt\Big|=$$

$$=\|\cos t\|_{s'}^{1-s'}E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big|\cos\big((n-p+1)t+\frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big)\big|^{s'}dt=$$

$$=\|\cos t\|_{s'}E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}.$$

З останніх співвідношень випливає (20). Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай $\psi\in\mathcal{D}_0$, $\beta_k\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$. Тоді для довільних $f\in C^{\psi}_{\bar\beta}L_\infty$, $n,p\in\mathbb{N}$, $p\le n$ справедлива нерівність*

$$\|\rho_{n,p}(f;x)\|_C\le\frac{1}{p}\bigg(\frac{4}{\pi}\psi(n-p+1)+O(1)\Big(\frac{\psi^2(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}+$$

$$+p\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\psi(k)\tau_{n,p}(k)\Big)\bigg)E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\bar\beta})_{L_\infty}. \tag{24}$$

При цьому для будь-якої функції $f\in C^{\psi}_{\bar\beta}L_\infty$ і довільних $n,p\in\mathbb{N}$, $p\le n$ знайдеться функція $F(x)=F(f;n;p;x)\in C^{\psi}_{\bar\beta}C$ така, що

$E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\bar\beta})_C = E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\bar\beta})_{L_\infty}$ *і для неї при* $n-p\to\infty$ *виконується рівність*

$$\|\rho_{n,p}(F;x)\|_C = \frac{1}{p}\Bigg(\frac{4}{\pi}\psi(n-p+1) + O(1)\Big(\frac{\psi^2(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}+$$

$$+p\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\psi(k)\tau_{n,p}(k)\Big)\Bigg)E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\bar\beta})_C. \qquad (25)$$

У (24) і (25) коефіцієнти $\tau_{n,p}(k)$ *визначаються рівністю* (10), *а* $O(1)$ *— величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Доведення теореми 2 будемо проводити за схемою, яка запропонована в теоремі 2 роботи [9]. Нехай $f\in C^{\psi}_{\bar\beta}L_\infty$, $\psi\in\mathcal{D}_0$. Виходячи з (11), та враховуючи факт ортогональності функції $\Psi_{1,n,p}(t)$ до будь-якого полінома t_{n-p} порядку не вищого за $n-p$, можемо записати

$$\rho_{n,p}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta_{n,p}(x-t)\Psi_{1,n,p}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi p}\int_{-\pi}^{\pi}\delta_{n,p}(x-t)\Big(\psi(n-p+1)\cos\big((n-p+1)t - \frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big)+$$

$$+2\psi(n-p+2)\cos\big((n-p+2)t-\frac{\beta_{n-p+2}\pi}{2}\big)+$$

$$+p\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)\cos\big(kt-\frac{\beta_k\pi}{2}\big)\Big)dt, \qquad (26)$$

де $\tau_{n,p}(k)$ і $\delta_{n,p}(\cdot)$ визначаються рівностями (10) і (14) відповідно.

Обравши в (26) у ролі t_{n-p} поліном t^*_{n-p} найкращого наближення в просторі L_∞ функції $f^{\psi}_{\bar\beta}$ і застосувавши нерівність (15) при $s=\infty$, отримуємо оцінку

$$\|\rho_{n,p}(f;x)\|_C \le \frac{1}{\pi p}\Big(\Big\|\psi(n-p+1)\cos\big((n-p+1)t-\frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big)+$$

$$+2\psi(n-p+2)\cos\big((n-p+2)t-\frac{\beta_{n-p+2}\pi}{2}\big)\big\|_1+$$

$$+p\Big\|\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)\cos\big(kt-\frac{\beta_k\pi}{2}\big)\big\|_1\Big)E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\bar\beta})_{L_\infty}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\pi p}\Big(\big\|\psi(n-p+1)\cos(n-p+1)t+$$

$$+2\psi(n-p+2)\cos\big((n-p+2)t+\alpha_{\bar\beta,n,p}\big)\big\|_1+$$

$$+O(1)p\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)\Big)E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\bar\beta})_{L_\infty}, \qquad (27)$$

де

$$\alpha_{\bar\beta,n,p}=\frac{\beta_{n-p+2}\pi}{2}-\frac{n-p+2}{n-p+1}\frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}. \qquad (28)$$

Як випливає з роботи С.О. Теляковського [21, с. 512–513],

$$\big\|\psi(n-p+1)\cos(n-p+1)t+2\psi(n-p+2)\cos\big((n-p+2)t+\alpha_{\bar\beta,n,p}\big)\big\|_1+$$

$$+O(1)p\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)\leq$$

$$\leq 4\psi(n-p+1)+O(1)\Big(\frac{\psi^2(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}+p\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)\Big). \qquad (29)$$

Співвідношення (27) і (29) доводять нерівність (24).

Доведемо другу частину теореми. Виходячи з інтегрального зображення (26) і використовуючи факт ортогональності функції $\sum\limits_{k=n-p+3}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)\cos\big(kt-\frac{\beta_k\pi}{2}\big)$ до будь-якого тригонометричного полінома t_{n-p} порядку не вищого $n-p$, для довільної функції f з множини $C^{\psi}_{\bar\beta}L_\infty$, $\psi\in\mathcal{D}_0$, $\beta_k\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$ виконується рівність

$$|\rho_{n,p}(f;x)|=$$

$$=\frac{\psi(n-p+1)}{\pi p}\Big|\int_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}_{\bar\beta}(x-t)\Big(\cos\big((n-p+1)t-\frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big)+$$

$$+2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\cos\big((n-p+2)t-\frac{\beta_{n-p+2}\pi}{2}\big)\big)dt\Big|+$$

$$+O(1)\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)E_{n-p+1}(f_{\beta}^{\psi})_{L_\infty}. \qquad (30)$$

Для доведення (25), з урахуванням (30), досить встановити, що для довільної $\varphi\in L_\infty^0=\{\varphi\in L_\infty:\varphi\perp 1\}$ існує функція $\Phi(\cdot)=\Phi(\varphi;\cdot)\in C$ для якої при всіх $n,p\in\mathbb{N}$, $p\le n$

$$E_{n-p+1}(\Phi)_C=E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}$$

і, крім того, при $n-p\to\infty$ має місце рівність

$$|\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(t)\big(\cos\big((n-p+1)t+\frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big)+$$

$$+2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\cos\big((n-p+2)t+\frac{\beta_{n-p+2}\pi}{2}\big)\big)dt|=$$

$$=\Bigg(4+O(1)\Big(\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\Big)^2\Bigg)E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}. \qquad (31)$$

Покладемо

$$\varphi_0(t)=\operatorname{sign}\cos\Big((n-p+1)t+\frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\Big)E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}$$

і через $\varphi_\delta(t)$ позначимо 2π-періодичну функцію, яка збігається з $\varphi_0(t)$ скрізь, за виключенням δ-околів $(0<\delta<\frac{\pi}{2(n-p+1)})$ точок $t_k=\frac{(2k+1-\beta_{n-p+1})\pi}{2(n-p+1)}$, $k\in\mathbb{Z}$, де вона лінійна і її графік сполучає точки $(t_k-\delta,\varphi_0(t_k-\delta))$ і $(t_k+\delta,\varphi_0(t_k+\delta))$. Функція $\varphi_\delta(t)$ неперервна і у точках $\tau_k=\frac{(2k-\beta_{n-p+1})\pi}{2(n-p+1)}$, $k=1,2,...,2(n-p+1)$, періоду $\big(-\frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2(n-p+1)},2\pi-\frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2(n-p+1)}\big]$ досягає по абсолютній величині максимального значення, яке дорівнює $E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}$, почергово змінюючи знак. Тому її поліном найкращого рівномірного наближення порядку не вищого $n-p$, згідно з критерієм Чебишова, є поліном, що тотожно дорівнює нулю і, отже,

$$E_{n-p+1}(\varphi_\delta)_C = \|\varphi_\delta\|_C = E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}. \tag{32}$$

Враховуючи (15) і (32), одержуємо

$$\Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_\delta(t)\Big(\cos\big((n-p+1)t + \frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big) +$$

$$+2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\cos\big((n-p+2)t + \frac{\beta_{n-p+2}\pi}{2}\big)\Big)dt\Big| \le$$

$$\le \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big|\cos(n-p+1)t + 2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\cos\big((n-p+2)t + \alpha_{\bar{\beta},n,p}\big)\Big|dt \times$$

$$\times E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}, \tag{33}$$

де $\alpha_{\bar{\beta},n,p}$ визначається рівністю (28). Із нерівності (19) роботи [21], випливає оцінка

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big|\cos(n-p+1)t + 2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\cos\big((n-p+2)t + \alpha_{\bar{\beta},n,p}\big)\Big|dt \le$$

$$\le 4 + O(1)\Big(\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\Big)^2. \tag{34}$$

З іншого боку,

$$\Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_\delta(t)\Big(\cos\big((n-p+1)t + \frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big) +$$

$$+2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\cos\big((n-p+2)t + \frac{\beta_{n-p+2}\pi}{2}\big)\Big)dt\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(t)\Big(\cos\big((n-p+1)t + \frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big) +$$

$$+2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\cos\big((n-p+2)t+\frac{\beta_{n-p+2}\pi}{2}\big)\big)dt\big|+O(1)r_{n,p}(\delta), \quad (35)$$

де

$$r_{n,p}(\delta)=\big|\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\varphi_\delta(t)-\varphi_0(t))\big(\cos\big((n-p+1)t+\frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big)+$$

$$+2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\cos\big((n-p+2)t+\frac{\beta_{n-p+2}\pi}{2}\big)\big)dt\big|. \quad (36)$$

Оскільки $\psi\in\mathcal{D}_0$, то для досить великих номерів $n-p$ справджується нерівність $\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}<1$ і, отже,

$$r_{n,p}(\delta)<3\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\varphi_\delta(t)-\varphi_0(t)|dt\le 6(n-p+1)\delta E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}, \quad (37)$$

то вибравши δ настільки малим, щоб виконувалась умова

$$0<\delta<\frac{1}{n-p+1}\Big(\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\Big)^2, \quad (38)$$

із (37) одержимо оцінку

$$r_{n,p}(\delta)=O(1)\Big(\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\Big)^2E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}. \quad (39)$$

Оскільки $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_0(t)\cos\big((n-p+2)t+\frac{\beta_{n-p+2}\pi}{2}\big)dt=0$, то, врахувавши розклад функцій $\operatorname{sign}\cos(n-p+1)t$ та $\operatorname{sign}\sin(n-p+1)t$ в ряд Фур'є, отримаємо

$$\big|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_0(t)\big(\cos\big((n-p+1)t+\frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big)+$$

$$+2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\cos\big((n-p+2)t+\frac{\beta_{n-p+2}\pi}{2}\big)\big)dt\big|=$$

$$= \Big| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(t) \cos\big((n-p+1)t + \frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big) dt \Big| =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \Big| \cos\big((n-p+1)t + \frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\big)\Big| dt E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty} = 4E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}. \quad (40)$$

Із формул (33)–(35), (39) і (40) випливає, що для функції $\Phi(t) = \varphi_\delta(t)$ у якій параметр δ задовольняє умову (38), при $n - p + 1 \to \infty$ має місце рівність (31), а отже, і (25). Теорему 2 доведено.

Далі, розглянемо аналоги теорем 1 та 2 для величини $\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x)$.

У випадку $p = 1$, тобто коли суми $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ є інтерполяційними поліномами $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$, нерівності типу Лебега на класах цілих функцій встановлені в роботі [13]. Тому ми розглянемо лише випадок $2 \le p \le n$.

Теорема 3. *Нехай $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді для довільних $f \in C^{\psi}_{\bar\beta} L_s$, $1 \le s < \infty$, $n, p \in \mathbb{N}$, $2 \le p \le n$ справедлива нерівність*

$$|\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x)| \le$$

$$\le \Big(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi p} \psi(n-p+1) + O(1) \sum_{k=n-p+2}^{\infty} \psi(k)\tau_{n,p}(k) \Big) E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\bar\beta})_{L_s}. \quad (41)$$

При цьому для будь-якої функції $f \in C^{\psi}_{\bar\beta} L_s$, $1 \le s < \infty$ і довільних $n, p \in \mathbb{N}$, $p \le n$ в множині $C^{\psi}_{\bar\beta} L_s$, $1 \le s < \infty$, знайдеться функція $F(x) = F(f;n;p;x)$ така, що $E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\bar\beta})_{L_s} = E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\bar\beta})_{L_s}$, і для неї при $n - p \to \infty$ виконується рівність

$$|\widetilde{\rho}_{n,p}(F;x)| =$$

$$= \Big(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi p} \psi(n-p+1) + O(1) \sum_{k=n-p+2}^{\infty} \psi(k)\tau_{n,p}(k) \Big) E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\bar\beta})_{L_s}. \quad (42)$$

У (41) та (42) $s' = \frac{s}{s-1}$, коефіцієнти $\tau_{n,p}(k)$ означаються рівністю (10), *а $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Теорема 4. *Нехай $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді для довільних $f \in C^{\psi}_{\bar\beta} L_\infty$ і будь–яких $n, p \in \mathbb{N}$, $2 \le p \le n$ справедлива нерівність*

$$|\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x)| \le$$

$$\le \Big(\frac{4}{\pi p}\psi(n-p+1) + O(1)\sum_{k=n-p+2}^{\infty}\psi(k)\tau_{n,p}(k)\Big)E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\bar\beta})_{L_\infty}. \quad (43)$$

При цьому для будь-якої функції $f \in C^{\psi}_{\bar\beta} L_\infty$ і довільних $n, p \in \mathbb{N}$, $p \le n$ в множині $C^{\psi}_{\bar\beta} C$, знайдеться функція $F(x) = F(f; n; p; x)$ така, що $E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\bar\beta})_C = E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\bar\beta})_{L_\infty}$, і для неї при $n - p \to \infty$ виконується рівність

$$|\widetilde{\rho}_{n,p}(F;x)| =$$

$$= \Big(\frac{4}{\pi p}\psi(n-p+1) + O(1)\sum_{k=n-p+2}^{\infty}\psi(k)\tau_{n,p}(k)\Big)E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\bar\beta})_C, \quad (44)$$

де коефіцієнти $\tau_{n,p}(k)$ означаються рівністю (10), а $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.

Оскільки доведення теорем 3 та 4 не відрізняються, тому проведемо їх разом.

Доведення теорем 3 та 4. Нехай $f \in C^{\psi}_{\bar\beta} L_s$, $1 \le s \le \infty$, $\psi \in \mathcal{D}_0$. В лемі 2 роботи [22] встановлено, що коли $\psi(k) > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, то для довільної функції $f \in C^{\psi}_{\bar\beta} L_s$, $1 \le s \le \infty$, в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ мають місце рівності

$$\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x) = \rho_{n,p}(f;x) + O(1)E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\bar\beta})_{L_s}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k), \quad (45)$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

З урахуванням формули (13) запишемо (45) в такому вигляді:

$$\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x) =$$

$$= \frac{\psi(n-p+1)}{\pi p} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta_{n,p}(x-t) \cos\Big((n-p+1)t - \frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\Big)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta_{n,p}(x-t)\Psi_{2,n,p}(t)dt + O(1)E_{n-p+1}(f_{\bar\beta}^{\psi})_{L_s} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \qquad (46)$$

Застосувавши нерівність

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)K(t)dt \le \|\varphi\|_s \|K\|_{s'}, \varphi \in L_s, K \in L_{s'}, \frac{1}{s}+\frac{1}{s'} = 1,\ 1 \le s \le \infty, \ (47)$$

(див., наприклад, [20, с. 391]), та рівності (16) та (17), отримаємо (41) та (43).

Доведемо тепер рівності (42) та (44). Розглянемо спочатку випадок $1 \le s < \infty$. Як показано в доведенні теореми 1, для функції $\Phi(\cdot) = \Phi(\varphi;\cdot)$, означеної рівністю (21), при всіх $n, p \in \mathbb{N}$, $p \le n$

$$E_{n-p+1}(\Phi)_{L_s} = E_{n-p+1}(f_{\bar\beta}^{\psi})_{L_s}$$

і, крім того, має місце рівність

$$|\rho_{n,p}(F;x)| =$$

$$= \Big(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi p}\psi(n-p+1) + O(1) \sum_{k=n-p+2}^{\infty} \psi(k)\tau_{n,p}(k)\Big) E_{n-p+1}(\Phi)_{L_s}, \ (48)$$

де $F = \mathcal{J}_{\bar\beta}^{\psi}\Phi$. Тому з (45) та (48) випливає рівність (42).

Розглянемо випадок, коли $s = \infty$. Як показано в доведенні теореми 2, для функції $\varphi_\delta(\cdot) = \varphi_\delta(\varphi;\cdot)$, означеної в доведенні другої частини теореми 2, при всіх $n, p \in \mathbb{N}$, $p \le n$

$$E_{n-p+1}(\Phi)_{L_s} = E_{n-p+1}(f_{\bar\beta}^{\psi})_{L_s}$$

і, крім того, має місце рівність

$$|\rho_{n,p}(F;x)| = \frac{1}{p}\Big(\frac{4}{\pi}\psi(n-p+1) + O(1)\Big(\frac{\psi^2(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}+$$

$$+p\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\psi(k)\tau_{n,p}(k)\Big)\Big)E_{n-p+1}(\varphi_\delta)_C, \tag{49}$$

де $F=\mathcal{J}^{\psi}_{\bar\beta}\varphi_\delta$. Тому з (45) та (49) випливає рівність (42). Теореми 3 та 4 доведено.

Оскільки для сум $\sum\limits_{k=n-p+j}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)$, які фігурують в теоремах 1 — 4, мають місце рівності

$$\sum_{k=n-p+j}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)=$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{k=n-p+j}^{n-1}\frac{k-n+p}{p}\psi(k)+\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi(k), & p>j,\quad j\in\mathbb{N},\\ \sum\limits_{k=n-p+j}^{\infty}\psi(k), & p\le j,\quad j\in\mathbb{N},\end{cases} \tag{50}$$

то, як неважко переконатися, для них справедлива наступна оцінка зверху:

$$\sum_{k=n-p+j}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)\leqslant$$

$$\le\min\Big\{\sum_{k=n-p+j}^{\infty}\psi(k),\frac{1}{p}\sum_{k=n-p+j}^{\infty}(k-n+p)\psi(k)\Big\},\qquad j\in\mathbb{N}.$$

Отже, в співвідношеннях (8) і (9) теореми 1, співвідношеннях (24) і (25) теореми 2, співвідношеннях (41) і (42) теореми 3 та співвідношеннях (43) і (44) теореми 4 величини $O(1)\sum\limits_{k=n-p+j}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)$ можна замінити на $O(1)\min\Big\{\sum\limits_{k=n-p+j}^{\infty}\psi(k),\frac{1}{p}\sum\limits_{k=n-p+j}^{\infty}(k-n+p)\psi(k)\Big\}$, $j=2,3$.

Зауваження. При $\beta_k=\beta,\ k\in\mathbb{N}$ теореми 1 та 2 встановлені в роботі [9].

1. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, №1. — С. 97 – 107.

2. *Сердюк А.С., Овсій Є.Ю.* Наближення на класах цілих функцій сумами Валле Пуссена // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **5**, №1. — С. 334 – 351.

3. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена в рівномірній та інтегральних метриках // Доп. НАН України. — 2009. — №6. — С. 34 – 39.

4. *Сердюк А.С.* Приближение интегралов Пуассона суммами Валле Пуссена в равномерной и интегральных метриках // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, №12. — С. 1672 – 1686.

5. *Serdyuk A.S., Ovsii Ie.Yu.* Uniform approximation of Poisson integrals of functions from the class H_ω by de la Vallée Poussin sums // Analysis Mathematica. — 2012. — **38**, № 4. — P. 305 – 325.

6. *Serdyuk A.S., Ovsii Ie.Yu., Musienko A.P.* Approximation of classes of analytic functions by de la Vallée Poussin sums in uniform metric // Rendiconti di Matematica. — 2012. — **32**. — P. 1 – 15.

7. *Сердюк А.С., Мусієнко А.П.* Нерівності типу Лебега для сум Валле Пуссена при наближенні інтегралів Пуассона // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, №1. — С. 298 – 316.

8. *Сердюк А.С., Мусієнко А.П.* Нерівності типу Лебега для сум Валле Пуссена на множинах аналітичних функцій // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, №4. — С. 522 – 537.

9. *Сердюк А.С., Мусієнко А.П.* Нерівності типу Лебега для сум Валле Пуссена на множинах цілих функцій // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, №5. — С. 630 – 642.

10. *Степанец А.И., Сердюк А.С.* Приближение периодических аналитических функций интерполяционными тригонометрическими многочленами // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, №12. — С. 1689 – 1701.

11. *Сердюк А.С.* Наближення періодичних аналітичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці простору L // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, №5. — С. 1692 – 1700.

12. *Сердюк А.С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 8. — С. 1079 – 1096.

13. *Сердюк А.С.* Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах періодичних аналітичних функцій // Укр. мат. журн. — 2012. — **64**, №5. — С. 698 – 712.

14. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.

15. *Степанец А.И.* Методы теории приближений В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **40**. — Ч. I. — 427 с.

16. *Ch. de la Vallée Poussin.* Lecons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. – Paris: Gautier-Villars, 1919. — 150 p.

17. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **40**. — Ч. II. — 424 с.

18. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. — М.: Мир, 1965. — **2**. — 538 с.

19. *Рукасов В.И.* Приближение суммами Валле Пуссена классов аналитических функций // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, №6. — С. 806 – 816.

20. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 422 с.

21. *Теляковский С.А.* О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, №4. — С. 510 – 518.

22. *Сердюк А.С., Войтович В.А.* Наближення класів цілих функцій інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, №1. — С. 274 – 297.