Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 2, 125–137

УДК 517.9

А.І. Грод

(Інститут математики НАН України, Київ),

С.О. Кужель

(AGH University of Science and Technology, Krakow, Poland)

Властивості матриць розсіяння для $\mathcal{PT}$-симетричних операторів

andriy.grod@yandex.ua
kuzhel@mat.agh.edu.pl

Scattering matrices of nonself-adjoint $\mathcal{PT}$-symmetric operators generated by Schrödinger differential expression with singular zero-range potentials are studied.

Досліджуються матриці розсіяння для несамоспряжених $\mathcal{PT}$-симетричних операторів породжених сингулярними збуреннями "нульового радіуса" оператора Шредінгера.

1 Вступ

Теорія розсіяння є однією з важливих складових сучасної математичної фізики [1]. В цій теорії, за даними розсіяння динаміки, яка задається самоспряженим оператором H визначається певний об'єкт $S(\cdot)$ (матриця розсіяння, S-матриця, оператор розсіяння), властивості якого тісно пов'язані з спектральними властивостями гамільтоніана H. Дослідження зв'язку між H і $S(\cdot)$ є основною задачею теорії розсіяння. В цьому напрямку вдалося отримати низку важливих результатів [2, 3]. Частину цих результатів можна перенести на випадок, коли H

визначає динаміку з дисипацією енергії (тобто є дисипативним оператором) і на випадок, коли оператор H є самоспряженим і невід'ємним оператором у просторі Крейна.

Якщо ж оператор H не належить до згаданих вище класів, то розвиток змістовної теорії розсіяння є складною задачею оскільки стандартні методи дослідження, як правило, вже не діють. Так у випадку несамоспряжених Гамільтоніанів $\mathcal{PT}$-симетричної квантової механіки [4] ($\mathcal{PT}$-симетричних операторів), дослідження зазвичай зводяться до формального опису нових властивостей матриці розсіяння $S(\cdot)$ без математично обгрунтованого зв'язку цих властивостей з початковим оператором H [5, 6, 7, 8, 9].

В зв'язку з цим є актуальним дослідження матриць розсіяння у випадку так званих повністю розв'язних моделей $\mathcal{PT}$-симетричної квантової механіки, тобто у випадку таких $\mathcal{PT}$-симетричних операторів H, для яких математично коректний зв'язок між H і $S(\cdot)$ може бути відносно просто описаний. Такі дослідження дозволяють окреслити коло можливих нових задач в теорії розсіяння для $\mathcal{PT}$-симетричних операторів і зрозуміти перспективи такої теорії.

Метою данної роботи є дослідження зв'язку між H і $S(\cdot)$ у випадку коли $\mathcal{PT}$-симетричний оператор Шредінгера H визначається у просторі $L_2(\mathbb{R})$ за допомогою формального виразу

$$-\frac{d^2}{dx^2} + a < \delta, \cdot > \delta + b < \delta', \cdot > \delta + c < \delta, \cdot > \delta' + d < \delta', \cdot > \delta', \qquad (1)$$

де δ і δ' є, відповідно, δ-функція Дірака та її похідна (з носієм в 0), а параметри a, b, c, d є комплексними числами.

Використовуючи підхід до означення матриць розсіяння $\mathcal{PT}$-симетричних операторів запропонований в [10], ми знаходимо явне зображення матриць розсіяння для певних класів операторів породжених (1). Такі матриці розсіяння є $\mathcal{PT}$-симетричними (в сенсі рівності (11)) і, крім того, вони мають низку нових (нетипових для самоспряженого випадку) властивостей. Так, ми наводимо приклад матриці розсіяння, значення якої на дійсній осі вже не є унітарні матриці. Інший приклад показує існування матриці розсіяння, яка є одночасно матрицею розсіяння для двох різних операторів H ($\mathcal{PT}$-симетричного і самоспряженого) породжених виразом (1).

Надалі, символи $\mathcal{D}(H)$ та $\rho(H)$ використовуються, відповідно, для області визначення та резольвентної множини лінійного оператора H.

Символ $H\restriction_{\mathcal{D}}$ означає звуження H на множину $\mathcal{D}$. Через $W_2^m(a,b)$ ми позначаємо простір Соболева вектор-функцій на (a,b) $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$; множина $\overset{0}{W_2^m}(a,b)$ є підпростором простору $W_2^m(a,b)$, визначеного умовою: $f \in \overset{0}{W_2^m}(a,b)$, якщо всі похідні $f^{(k)}(x)$ $(k = 0, \ldots m-1)$ дорівнюють нулю в точках $x = a, x = b$ (докладніше див. [11]).

2 Опис $\mathcal{PT}$-симетричних операторів H

Операторна реалізація H формального виразу (1) у просторі $L_2(\mathbb{R})$ визначається як:

$$H = l_{\text{reg}} \restriction \mathcal{D}(H), \quad \mathcal{D}(H) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \ : \ l_{\text{reg}}(f) \in L_2(\mathbb{R})\}, \quad (2)$$

де регуляризація l_{reg} виразу (1) діє на функціях з $W_2^2(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ і має вигляд

$$l_{\text{reg}}(\cdot) = -\frac{d^2}{dx^2} + a < \delta_{\text{ex}}, \cdot > \delta + b < \delta'_{\text{ex}}, \cdot > \delta + c < \delta_{\text{ex}}, \cdot > \delta' + d < \delta'_{\text{ex}}, \cdot > \delta'.$$

Тут $-d^2/dx^2$ діє на $W_2^2(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ як узагальнена функція і

$$< \delta_{\text{ex}}, f >= \frac{f(+0) + f(-0)}{2}, \quad < \delta'_{\text{ex}}, f >= -\frac{f'(+0) + f'(-0)}{2}$$

для всіх $f \in W_2^2(\mathbb{R}\backslash\{0\})$.

Оператор H визначений (2) є замкненим щільно визначеним оператором в $L_2(\mathbb{R})$. Еквівалентний опис цього оператора дає теорема 1 з [12]:

Оператор $H = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ і його область визначення $\mathcal{D}(H)$ містить ті і тільки ті функції $f \in W_2^2(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, для яких виконуються граничні умови

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0+) + f(0-) \\ -f'(0+) - f'(0-) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} f'(0+) - f'(0-) \\ f(0+) - f(0-) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В просторі $L_2(\mathbb{R})$ розглянемо оператор унітарної інволюції $\mathcal{P}f(x) = f(-x)$ і оператор спряження $\mathcal{T}f(x) = \overline{f(x)}$.

Будемо говорити, що H є $\mathcal{PT}$*-симетричним*, якщо

$$H\mathcal{PT}f = \mathcal{PT}Hf, \qquad \forall f \in \mathcal{D}(H). \quad (4)$$

З урахуванням (4) одержуємо (див. [13, Теорема 2]), що H буде $\mathcal{PT}$-симетричним оператором тоді і тільки тоді коли

$$a,\ d \in \mathbb{R} \qquad b,\ c \in i\mathbb{R}. \tag{5}$$

Зауважимо, що ці умови відповідають $\mathcal{PT}$-симетричності формального потенціала $V = a < \delta, \cdot > \delta + b < \delta', \cdot > \delta + c < \delta, \cdot > \delta' + d < \delta', \cdot > \delta'$ в (1).

3 Означення матриць розсіяння для $\mathcal{PT}$-симетричних операторів H

Стисло нагадаємо означення матриць розсіяння для $\mathcal{PT}$-симетричних операторів породжених формальним виразом (1). Обмежимось випадком коли H має *дійсний невід'ємний спектр*. Загальний випадок (спектр може містити комплексні числа) детально розглянуто в [10].

Матриця розсіяння в нестаціонарній теорії розсіяння виникає через порівняння незбуреної та збуреної динамік. Формальний вираз (1) визначає симетричний оператор

$$S = -\frac{d^2}{dx^2}, \qquad \mathcal{D}(S) = \overset{0}{W}{}_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus \overset{0}{W}{}_2^2(\mathbb{R}_+) \tag{6}$$

і довільний оператор H з (2) є власним розширенням оператора S (тобто $S \subset H \subset S^*$).

В якості оператора який визначає незбурену динаміку виберемо розширення Фрідріхса H_μ [11] оператора S:

$$H_\mu = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(H_\mu) = \{u \in W_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus W_2^2(\mathbb{R}_+) : u(0-) = u(0+) = 0\} \tag{7}$$

Зауважимо, що самоспряжений оператор H_μ також буде $\mathcal{PT}$-симетричним [14].

Нехай H є $\mathcal{PT}$-симетричним оператором з дійсним невід'ємним спектром. Тоді вираз

$$T = (H + I)^{-1} - (H_\mu + I)^{-1} \tag{8}$$

задає обмежений оператор, який діє в підпросторі $\mathcal{H} = \ker(S^* + I)$ простору $L_2(\mathbb{R})$.

У певному сенсі оператор T характеризує "різницю"між операторами H і H_μ, які визначають збурену та незбурену динаміки.

Додатково припустимо, що H є самоспряженим оператором. Тоді кінцевим результатом типових для математичної теорії розсіяння завдань: а) обгрунтування існування хвильових операторів $W_\pm = \lim\limits_{t\to\pm\infty} e^{iHt}e^{-iH_\mu t}$; б) представлення оператора розсіяння $S = W_+^{-1}W_-$ в спектральному зображенні для групи унітарних операторів $e^{-iH_\mu t}$, яка характеризує незбурену динаміку, буде наступне твердження:

Твердження 1 *[15] Матриця розсіяння $S(\cdot)$ для пари операторів H і H_μ є аналітичною операторнозначною функцією в верхній півплощині $\mathbb{C}_+$, яка задаеться формулою*

$$S(k) = [I - 2(1 - ik)T][I - 2(1 + ik)T]^{-1}, \qquad k \in \mathbb{C}_+. \tag{9}$$

При всіх $k \in \mathbb{C}_+$, значеннями $S(k)$ є стискуючі оператори в $\mathcal{H}$. Граничними значеннями функції $S(k)$ на дійсній осі будуть унітарні оператори в $\mathcal{H}$.

Беручи до уваги Твердження 1, ми можемо визначити матрицю розсіяння для $\mathcal{PT}$-симетричного оператора H породженого формальним виразом (1) за допомогою формули (9) для всіх $k \in \mathbb{C}_+$, де (9) має сенс. Таким чином, операторнозначну функцію

$$S(k) = [I - 2(1 - ik)T][I - 2(1 + ik)T]^{-1}, \tag{10}$$

визначену при всіх $k \in \mathbb{C}_+$ таких, що $0 \in \rho(I - 2(1 + ik)T)$ будемо називати *матрицею розсіяння для $\mathcal{PT}$-симетричного оператора H*.

На відміну від випадку самоспряженого оператора H в Твердженні 1, таке означення не пов'язане з існуванням відповідних хвильових операторів і отже є достатньо формальним. Однак воно добре узгоджується з означенням матриці розсіяння прийнятим в фізичних роботах (див. наступний розділ) і одночасно встановлює явний зв'язок з операторним параметром T, який характеризує H, що може бути корисним в обернених задачах розсіяння.

З означення матриці розсіяння випливає, що функція $S(k)$ визначена і є аналітичною на підмножині

$$\Lambda = \{k \in \mathbb{C}_+ \ : \ 0 \in \rho(I - 2(1 + ik)T)\}$$

верхньої півплощини $\mathbb{C}_+$. Множина Λ є непустою (наприклад $i \in \Lambda$) і відкритою.

Відомо [16], що $k \in \Lambda$ тоді і тільки тоді коли $k^2 \in \rho(H)$. Таким чином, для $\mathcal{PT}$-симетричних операторів H *з дійсним додатним спектром*, які розглядаються у цій роботі, матриця розсіяння $S(k)$ *буде визначена на всій верхній півплощині* $\mathbb{C}_+$.

Властивість $\mathcal{PT}$-симетричності оператора H призводить до наступної властивості $\mathcal{PT}$-симетричності матриці розсіяння:

$$\mathcal{PT}S(k) = S(-\overline{k})\mathcal{PT}, \qquad k \in \mathbb{C}_+. \tag{11}$$

Для доведення рівності (11) достатньо зауважити, що оператор T в (8) буде $\mathcal{PT}$-симетричним (оскільки H і H_μ є $\mathcal{PT}$-симетричними операторами) і використати означення (10).

4 Зображення матриці розсіяння в термінах коефіцієнтів відбиття і проходження

В фізичних роботах, матриця розсіяння для одновимірного оператора Шредінгера визначається в термінах правосторонніх (лівосторонніх) коефіцієнтів відбиття R_k^r (R_l^r) та проходження T_k^r (T_l^r) відповідних хвильових функцій

$$f_1 = \begin{cases} e^{-i\overline{k}x} + R_k^r e^{ikx}, & x > 0 \\ T_k^r e^{-ikx}, & x < 0 \end{cases}, \quad f_2 = \begin{cases} T_k^l e^{ikx}, & x > 0 \\ e^{i\overline{k}x} + R_k^l e^{-ikx}, & x < 0 \end{cases} \tag{12}$$

Наслідуючи міркування [10], перепишемо загальну формулу (10) для матриці розсіяння в термінах цих коефіцієнтів. Для цього, спочатку, більш детально вивчимо як оператор T з (8) задає область визначення оператора H.

Довільний елемент $f \in \mathcal{D}(H)$ можна записати у вигляді $f = (H + I)^{-1}p$, де $p \in L_2(\mathbb{R})$. Згадуючи (8) одержуємо $f = u + Tp = u + h$, де $u = (H_\mu + I)^{-1}p$ і $h = Tp \in \mathcal{H}$. Тому

$$\mathcal{D}(H) = \{f \in \mathcal{D}(S^*) = W_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus W_2^2(\mathbb{R}_+) \ : \ T\Gamma_1 f = \Gamma_0 f\}, \tag{13}$$

де $\Gamma_0 f = \Gamma_0(u + h) = h$, $\Gamma_1 f = \Gamma_1(u + h) = P_{\mathcal{H}}(H_\mu + I)u$, і $P_{\mathcal{H}}$ є ортогональним проектором в просторі $L_2(\mathbb{R})$ на підпростір $\mathcal{H}$.

Беручи до уваги (6) одержуємо, що функції

$$\psi_-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases} \qquad \psi_+(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{14}$$

є ортогональним базисом простору $\mathcal{H} = \ker(S^* + I)$ і оператори Γ_j діють наступним чином

$$\begin{aligned} \Gamma_0 f &= f(0-)\psi_- + f(0+)\psi_+, \\ \Gamma_1 f &= 2[f(0-) - f'(0-)]\psi_- + 2[f(0+) + f'(0+)]\psi_+ \end{aligned} \tag{15}$$

Оператор T відносно ортогонального базису $\{\psi_+, \psi_-\}$ простору $\mathcal{H}$ задається матрицею $\mathsf{T} = \|t_{ij}\|_{ij}^2$. Враховуючи таке позначення і беручи (13), (15) до уваги, перепишемо визначення оператора H наступним (еквівалентним) чином:

H діє як $-\frac{d^2}{dx^2}$ на всіх функціях $f \in W_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus W_2^2(\mathbb{R}_+)$, які в точці 0 задовольняють граничні умови

$$\mathsf{T} \begin{pmatrix} f(0+) + f'(0+) \\ f(0-) - f'(0-) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f(0+) \\ f(0-) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Матриця T повністю визначається довільними двома лінійно незалежними функціями $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(H) \setminus \mathcal{D}(S)$. Оскільки $L_2(\mathbb{R}) = \mathcal{R}(S - k^2 I) \oplus \ker(S^* - \overline{k}^2 I)$, робимо висновок, що

$$\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(S) \dot{+} (H - k^2 I)^{-1} \ker(S^* - \overline{k}^2 I), \tag{17}$$

Нехай $k \in \mathbb{C}'_+ = \mathbb{C}_+ \setminus i\mathbb{R}_+ = \{k \in \mathbb{C}_+ : \mathrm{Re}\, k \neq 0\}$. Тоді функції

$$h_1 = \begin{cases} \beta e^{-i\overline{k}x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad h_2 = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ \beta e^{i\overline{k}x}, & x < 0 \end{cases}, \qquad \beta = \overline{k}^2 - k^2 \tag{18}$$

утворюють базис підпростору $\ker(S^{*2} - \overline{k}^2 I)$ (множник β спрощує подальші формули). З (17) випливає, що функції $f_j = (H - k^2 I)^{-1} h_j$ належать до $\mathcal{D}(H) \setminus \mathcal{D}(S)$ і вони є лінійно незалежними. Використовуючи означення оператора H, одержуємо що ці функції є розв'язками диференціальних рівнянь

$$-\frac{d^2}{dx^2} f_j - k^2 f_j = h_j, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad j = 1, 2. \tag{19}$$

Беручи до уваги (18) приходимо до висновку, що розвязками рівняння (19) будуть хвильові функції f_j вигляду (12). Тому

$$f_1(0+) = 1 + R_k^r;\ f_1(0-) = T_k^r;\quad f_1'(0+) = i(-\overline{k} + kR_k^r);\ f_1'(0-) = -ikT_k^r;$$
$$f_2(0+) = T_k^l;\ f_2(0-) = 1 + R_k^l;\quad f_2'(0+) = ikT_k^l;\ f_2'(0-) = i(\overline{k} - kR_k^l).$$

Підставляючи ці значення в (16) та розвязуючи відповідні системи лінійних рівняннь одержуємо, що

$$\begin{aligned} t_{11} &= \frac{1}{2\theta\Delta_k}[\Delta_k - (e^{i\alpha}-1)(R_k^l + e^{i\alpha})]; \quad t_{12} = \frac{T_k^l}{2\theta\Delta_k}(e^{i\alpha}-1); \\ t_{22} &= \frac{1}{2\theta\Delta_k}[\Delta_k - (e^{i\alpha}-1)(R_k^r + e^{i\alpha})]; \quad t_{21} = \frac{T_k^r}{2\theta\Delta_k}(e^{i\alpha}-1), \end{aligned} \tag{20}$$

де $\theta = 1 + ik$, $e^{i\alpha} = \dfrac{\overline{\theta}}{\theta}$, $k \in \mathbb{C}'_+$, і

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} R_k^r + e^{i\alpha}, & T_k^r \\ T_k^l, & R_k^l + e^{i\alpha} \end{vmatrix}.$$

Відносно ортогонального базису $\{\psi_+, \psi_-\}$ операторнозначна функція $S(k)$ з (9) переписується у вигляді 2×2-матричнозначної функції

$$\mathsf{S}(k) = [I - 2(1-ik)\mathsf{T}][I - 2(1+ik)\mathsf{T}]^{-1}, \qquad k \in \mathbb{C}_+. \tag{21}$$

Підставляючи значення t_{ij} з (20) до (21) і виконуючи елементарні обчислення (див. [10, 16]) одержуємо, що

$$\mathsf{S}(k) = -\frac{k}{\mathsf{Re}\ k}\begin{pmatrix} R_k^r + i\dfrac{\mathsf{Im}\ k}{k} & T_k^l \\ & \\ T_k^r & R_k^l + i\dfrac{\mathsf{Im}\ k}{k} \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{C}'_+. \tag{22}$$

Значення $\mathsf{S}(k)$ при $k \in i\mathbb{R}_+$ отримуємо продовжуючи вираз (22) по неперервності.

Матричнозначна функція $\mathsf{S}(k)$ є зображенням операторнозначної функції $S(k)$ відносно ортогонального базису $\{\psi_+, \psi_-\}$ простору $\mathcal{H}$. Тому, з результатів підрозділу 3 випливає, що для $\mathcal{PT}$-симетричних операторів H з дійсним невід'ємним спектром матриця розсіяння $\mathsf{S}(k)$ буде визначена для всіх $k \in \mathbb{C}_+$.

5 Властивості матриць розсіяння для $\mathcal{PT}$-симетричних операторів

Нехай H є $\mathcal{PT}$-симетричним оператором з дійсним невід'ємним спектром, який визначається виразом (1). За побудовою, хвильові функції f_j з (12) належать до області визначення оператора H. Тобто, їх граничні значення $f_j(0\pm)$, $f_j'(0\pm)$ пораховані в розділі 4 задовольняють умови (3). Підставляючи ці значення в (3) одержуємо зв'язок коефіцієнтів відбиття R_k^l, R_k^r та проходження T_k^l, T_k^r матриці розсіяння (22) з параметрами a, b, c, d, які характеризують оператор H в (1). Це дозволяє переписати матрицю розсіяння $\mathsf{S}(k)$ в термінах параметрів a, b, c, d. В загальному випадку, такі формули є достатньо громіздкими. Тому розглянемо частинні випадки.

5.1 Випадок $a = d = 0$, $b = i\gamma$, $c = -i\gamma$ $(\gamma \in \mathbb{R})$.

Вираз (1) приймає вигляд

$$-\frac{d^2}{dx^2} + i\gamma < \delta', \cdot > \delta + -i\gamma < \delta, \cdot > \delta'$$

і він є $\mathcal{PT}$-симетричним згідно з (5).

Область визначення (3) для відповідної $\mathcal{PT}$-симетричної операторної реалізації H можна переписати у вигляді

$$\mathcal{D}(H) = \left\{ f \in W_2^2(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \ : \ \begin{array}{c} f(0+) = e^{i\beta} f(0-) \\ f'(0+) = e^{i\beta} f'(0-) \end{array} \right\}, \tag{23}$$

де $e^{i\beta} = \dfrac{2 - i\gamma}{2 + i\gamma} \quad \beta \in (-\pi, \pi]$.

Елементарний аналіз оператора H з областю визначення (23) показує (див. наприклад подібні міркування в [12, Theorem 1]), що спектр H є дійсним і невід'ємним. Однак, H не є самоспряженим оператором.

Підставляючи значення функцій $f_j(0\pm)$, $f_j'(0\pm)$ з Розділу 4 до (23) одержуємо системи рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{ll} i(-\overline{k} + kR_k^r) & = -e^{i\beta} ikT_k^r \\ 1 + R_k^r & = e^{i\beta} T_k^r \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{ll} ikT_k^l & = e^{i\beta} i(\overline{k} - kR_k^l) \\ T_k^l & = e^{i\beta}(1 + R_k^l) \end{array} \right.$$

Звідси одержуємо розв'язання

$$R_k^r = R_k^l = -\frac{i\mathsf{Im}k}{k}, \qquad T_k^r = \frac{\mathsf{Re}k}{k}e^{-i\beta}, \qquad T_k^l = \frac{\mathsf{Re}k}{k}e^{i\beta}.$$

Підставляючи ці величини в (22) отримуємо

$$\mathsf{S}(k) = \begin{pmatrix} 0 & -e^{i\beta} \\ -e^{-i\beta} & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Отже, матриця розсіяння $\mathsf{S}(k)$ є унітарною константою на $\mathbb{C}_+$. У цьому випадку, існує самоспряжений оператор H породжений формальним виразом (1), для якого вираз (24) буде матрицею розсіяння.

Дійсно з [15, Theorem 4.2] робимо висновок, що необхідною і достатньою умовою того щоб функція $\mathsf{S}(\cdot)$ була матрицею розсіяння для деякого самоспряженого оператора H з невід'ємним спектром породженого виразом (1) є наступна умова:

$$(Re\ k)[I - \mathsf{S}^*(k)\mathsf{S}(k)] = i(Im\ k)[\mathsf{S}^*(k) - \mathsf{S}(k)], \qquad k \in \mathbb{C}_+.$$

Враховуючи (24), легко бачити, що ця рівність виконується. Отже, функція $\mathsf{S}(\cdot)$ буде також матрицею розсіяння для певного самоспряженого оператора.

5.2 Випадок $a = c = d = 0$, $b = i\gamma$ $(\gamma \in \mathbb{R})$.

Вираз (1) приймає вигляд

$$-\frac{d^2}{dx^2} + i\gamma < \delta', \cdot > \delta$$

і він є $\mathcal{PT}$-симетричним згідно з (5).

Область визначення (3) для відповідної $\mathcal{PT}$-симетричної операторної реалізації H має вигляд

$$\mathcal{D}(H) = \left\{ f \in W_2^2(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \ : \ \begin{array}{c} f(0+) = f(0-) \\ f'(0+) = e^{i\beta} f'(0-) \end{array} \right\}, \tag{25}$$

де $e^{i\beta} = \dfrac{2 - i\gamma}{2 + i\gamma}$ $\quad \beta \in (-\pi, \pi]$.

Подібно до попереднього випадку, спектр H є дійсним і невід'ємним. Однак, H не є самоспряженим оператором.

Підставляючи значення функцій $f_j(0\pm)$, $f_j'(0\pm)$ з Розділу 4 до (25) одержуємо системи рівнянь

$$\begin{cases} i(-\overline{k}+kR_k^r) & = -e^{i\beta}ikT_k^r \\ 1+R_k^r & = T_k^r \end{cases} \qquad \begin{cases} ikT_k^l & = e^{i\beta}i(\overline{k}-kR_k^l) \\ T_k^l & = 1+R_k^l \end{cases}$$

Звідси одержуємо розв'язання

$$R_k^r = \frac{\overline{k}-e^{i\beta}k}{k(1+e^{i\beta})}, \quad R_k^l = \frac{e^{i\beta}\overline{k}-k}{k(1+e^{i\beta})}, \quad T_k^r = \frac{2\mathsf{Re}k}{k(1+e^{i\beta})}, \quad T_k^l = \frac{2e^{i\beta}\mathsf{Re}k}{k(1+e^{i\beta})}.$$

Підставляючи ці величини в (22) отримуємо

$$\mathsf{S}(k) = -\frac{k}{\mathsf{Re}\ k}\begin{pmatrix} \dfrac{\overline{k}-e^{i\beta}k}{k(1+e^{i\beta})}+i\dfrac{\mathsf{Im}\ k}{k} & \dfrac{2e^{i\beta}\mathsf{Re}k}{k(1+e^{i\beta})} \\ \dfrac{2\mathsf{Re}k}{k(1+e^{i\beta})} & \dfrac{e^{i\beta}\overline{k}-k}{k(1+e^{i\beta})}+i\dfrac{\mathsf{Im}\ k}{k} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} i\tan\dfrac{\beta}{2} & -1-i\tan\dfrac{\beta}{2} \\ -1+i\tan\dfrac{\beta}{2} & -i\tan\dfrac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

Матриця розсіяння $\mathsf{S}(k)$ є константою на $\mathbb{C}_+$, але ця константа не є унітарною матрицею. Властивість $\mathcal{PT}$-симетричності матриці розсіяння (11) трансформується в рівність $\sigma_1\mathcal{T}\mathsf{S}(k) = \mathsf{S}(k)\sigma_1\mathcal{T}$, де $\mathcal{T}$ є оператором спряження в $\mathbb{C}^2$ а $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ є матрицею Паулі, яка характеризує дію оператора $\mathcal{P}$ відносно базису (14).

6 Висновки

В даній роботі знайдено явне зображення матриць розсіяння $S(\cdot)$ для певних класів $\mathcal{PT}$-симетричних операторів H, породжених формальним диференціальним виразом типу Шредінгера з сингулярними збуреннями нульового радіуса (1). Такі матриці розсіяння зберігають достатньо інформації про оператори H, але вони не завжди мають властивості притаманні самоспряженому випадку. Зокрема, такі матриці розсіяння є $\mathcal{PT}$-симетричними (в сенсі (11)), їх значення на дійсній осі не завжди будуть унітарними матрицями.

Отримані результати показують, що у випадку матриць розсіяння для $\mathcal{PT}$-симетричних операторів зв'язок між H і $S(\cdot)$ є достатньо прозорим і математично обгрунтованим, що дозволяє розглядати і розв'язувати нові задачі в теорії розсіяння, наприклад, задачу відтворення за матрицею розсіяння відповідної індефінітної метрики (скалярного добутку), відносно якої $\mathcal{PT}$-симетричний оператор H буде самоспряженим у просторі Крейна (у гільбертовому просторі).

Дослідження представленні в цій роботі частково підтримані проектом 03-01-12 "Обернені задачі в сучасній математичній фізиці" спільних досліджень НАН України та СО РАН.

Література

[1] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики, том 3, Теория рассеяния. - Москва: Мир, 1982. - 442 с.

[2] *Агранович З.С., Марченко В.А.* Обратная задача теории рассеяния // Издательство харьковского университета - 1960. - 270 с.

[3] *Нижник Л.П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. - Киев: Наук. думка, 1991. - 230 с.

[4] *Bender C. M.* Making sense of non-Hermitian Hamiltonians // Rep. Progr. Phys. - 2007. - **70**, No.6. - P. 947–1018.

[5] *Ahmed Z., Bender C. M., Berry M. V.* Reflectionless potentials and $\mathcal{PT}$ symmetry // J. Phys. - 2005. - **38**, P. 627-630.

[6] *Cannata F., Dedonder J.-P., Ventura A.* Scattering in $\mathcal{PT}$-symmetric quantum mechanics // Ann. Physics - 2007. - **322**, P. 397-433.

[7] *Jones H. F.* Scattering from localized non-Hermitian potentials // Phys. Rev. D - 2007. - **76**, 125003–8.

[8] *Mostafazadeh A.* Spectral singularities of complex scattering potentials and infinite reflection and transmission coefficients at real energies // Phys. Rev. Lett. - 2009. - **102**, 220402-7.

[9] *Znojil M.* Scattering theory with localized non-Hermiticites // Phys. Rev. D - 2008. - **78**, 025026-36.

[10] *Cojuhari P. A., Kuzhel S.* Lax-Phillips scattering theory for $\mathcal{PT}$-symmetric ρ-perturbed operators // J. Math. Phys. - 2012.- **53**, 073514.

[11] *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. - Киев: Наукова думка, 1984. - 285 с.

[12] *Albeverio S., Kuzhel S.* One-dimensional Schrödinger operators with $\mathcal{P}$-symmetric zero-range potentials // J. Phys. A - 2005. - **38**, 4975-88.

[13] *Кужель С.О., Пацюк О.М.* Про інтерпритацію $\mathcal{PT}$-симетричних операторів як самоспряжених у просторах Крейна // Збірник праць Ін-ту математики НАН України - 2011. - **8**, No.1 - 263 с.

[14] *Albeverio S., Kuzhel S.* On elements of the Lax-Phillips scattering scheme for $\mathcal{PT}$-symmetric operators // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical - 2012. - **45**, 444001-20.

[15] *Kuzhel S.* On the inverse problem in the Lax-Phillips scattering theory method for a class of operator-differential equations // St. Petersburg Math. J. - 2012. - **13**, P. 41-56.

[16] *Грод А.I., Кужель С.О.* Теорія розсіяння для 0-збурених $\mathcal{PT}$-симетрических операторов // Укр. Мат. Журнал - подано до друку