Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 2, 60–70

УДК 517.9+531.19+530.145

М.С. Боровченкова

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

Існування розв'язку задачі Коші для рівняння Енскоґа з дисипативним розсіянням

borovchenkova@ukr.net

For the corresponding initial data from the space of integrable functions the existence theorem of strong and weak solutions of the Cauchy problem of the non-Markovian Enskog kinetic equation for granular gases is proved. For such Cauchy problem the existence of a weak solution in the extended sense is also established.

Для відповідних початкових даних з простору інтегрованих функцій доведено теорему про існування сильного та слабкого розв'язків задачі Коші для немарківського кінетичного рівняння Енскоґа ґранульованих газів. Для такої задачі Коші також встановлено існування слабкого розв'язку в узагальненому сенсі.

1 Вступ

Як відомо, в останній час в теорії нелінійних кінетичних рівнянь, зокрема для рівняння Больцмана, встановлено цілий ряд результатів про існування розв'язків в різноманітних функціональних просторах [1]-[3]. В той же час залишається відкритою проблема дослідження кінетичних рівнянь для систем багатьох частинок з дисипативною взаємодією [4],[5], якими описується нерівноважна колективна поведінка ґранульованих газів (сипучих речовин)[6].

Загально прийнятою динамічною системою, яка описує типові статистичні властивості ґранульованих газів, є система багатьох твердих куль з непружним розсіянням [4],[6],[7]. В сучасних працях з теорії ґранульованих газів [4],[6] в основу опису еволюції станів твердих куль з дисипативною взаємодією покладено апріорі сформульовані кінетичні рівняння типу Больцмана або Енскоґа.

В статті [8] було обґрунтовано немарківське кінетичне рівняння Енскоґа, яким описується еволюція станів одновимірних ґранульованих газів в спосіб, еквівалентний до ієрархії рівнянь ББҐКІ для маргінальних функцій розподілу твердих куль з непружним розсіянням.

Мета даної роботи полягає в побудові розв'язку задачі Коші для немарківського кінетичного рівняння Енскоґа для багатовимірних ґранульованих газів в просторі інтегрованих функцій. З цією метою в наступному розділі розглянуто задачу Коші для немарківського кінетичного рівняння Енскоґа ґранульованих газів та наведено основний результат роботи. В третьому розділі для відповідних початкових даних з простору інтегрованих функцій доведено теорему про існування сильного та слабкого розв'язків сформульованої задачі Коші. В останньому розділі введено поняття слабкого розв'язку в узагальненому сенсі для задачі Коші для немарківського рівняння Енскоґа з непружним розсіянням і доведено його існування.

2 Задача Коші для рівняння Енскоґа з непружним розсіянням

Розглянемо при $t \geq 0$ абстрактну задачу Коші для немарківського кінетичного рівняння Енскоґа з непружним розсіянням [8] в просторі інтегрованих функцій $L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}F_1(t,x_1) = -\langle p_1, \frac{\partial}{\partial q_1}\rangle F_1(t,x_1) + \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_+} dp_2 d\eta \langle \eta, (p_1-p_2)\rangle \quad (1)\\ \times\big(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2}\, F_2(t,q_1,p_1^\diamond,q_1-\sigma\eta,p_2^\diamond|F_1(t,x_1)) - \\ -F_2(t,x_1,q_1+\sigma\eta,p_2|F_1(t,x_1))\big),\end{aligned}$$

$$F_1(t,x_1)|_{t=0} = F_1^0(x_1), \tag{2}$$

де $x_1 \equiv (q_1,p_1) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ – фазові координати твердої кулі одиничної маси з діаметром $\sigma > 0$, коефіцієнт $\varepsilon > 0$ характеризує величину непружності розсіяння твердих куль, символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначено скалярний добуток, $\mathbb{S}^2_+ \doteq \{\eta \in \mathbb{R}^3 \mid |\eta| = 1, \langle\eta,(p_{j_1} - p_{j_2})\rangle \geq 0\}$ і для значень швидкостей твердих куль до зіткнення використано такі позначення:

$$p_1^\diamond = p_1 - \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon}\,\eta\langle\eta,(p_1-p_2)\rangle,$$
$$p_2^\diamond = p_2 + \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon}\,\eta\langle\eta,(p_1-p_2)\rangle.$$

Інтеграл зіткнень кінетичного рівняння (1) визначається маргінальним функціоналом стану $F_2\big(t,x_1,x_2 \mid F_1(t)\big)$, яким в термінах одночастинкової маргінальної функції розподілу описуються всі можливі парні кореляції твердих куль з непружним розсіянням. В загальному випадку маргінальні функціонали стану зображуються такими розкладами [9]:

$$F_s\big(t,x_1,\ldots,x_s \mid F_1(t)\big) \doteq \tag{3}$$
$$\doteq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1}\ldots dx_{s+n}\,\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y)\prod_{i=1}^{s+n}F_1(t,x_i),$$

де використано такі позначення: $\{Y\}$ – множина, яка складається з одного елементу $Y \equiv (1,\ldots,s)$, тобто $|\{Y\}| = 1$, $(\{Y\},X\setminus Y) \equiv (\{Y\},s+1,\ldots,s+n)$, та твірні еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y)$, $n \geq 0$, в загальному випадку визначені в роботі [8]. Наведемо приклади твірних операторів $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n \geq 0$:

$$\mathfrak{V}_1(t,\{Y\}) = \widehat{\mathfrak{A}}_1(t,\{Y\}) \doteq S_s^*(t,1,\ldots,s)\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(s+n)}\setminus\mathbb{W}_{s+n}}\prod_{i=1}^{s}S_1^*(t,i)^{-1},$$

$$\mathfrak{V}_2(t,\{Y\},s+1) = \widehat{\mathfrak{A}}_2(t,\{Y\},s+1) - \widehat{\mathfrak{A}}_1(t,\{Y\})\sum_{i_1=1}^{s}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,i_1,s+1),$$

де напівгрупа операторів $S_n^*(t,1,\ldots,n)$ є спряженою до напівгрупи операторів твердих куль з непружним розсіянням $S_n(t,1,\ldots,n)$, яка визначається як оператор зсуву аргументів функцій вздовж фазових траєкторій твердих куль [7], $\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(s+n)}\setminus\mathbb{W}_{s+n}}$ – характеристична функція дозволених конфігурацій системи [10] та введено кумулянти розсіяння:

$$\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y) \doteq \mathfrak{A}^*_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y)\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(s+n)}\setminus\mathbb{W}_{s+n}}\prod_{i=1}^{s+n}\mathfrak{A}_1^*(t,i)^{-1},$$

які визначаються кумулянтами напівгруп операторів твердих куль з непружним розсіянням:

$$\mathfrak{A}^*_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y) = \\ = \sum_{\mathtt{P}:\,(\{Y\},X\setminus Y)=\bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathtt{P}|-1}(|\mathtt{P}|-1)! \prod_{X_i\subset \mathtt{P}} S^*_{|\theta(X_i)|}(t,\theta(X_i)). \tag{4}$$

В формулі (4) використано такі позначення: $\sum_{\mathtt{P}}$ – сума по всім можливим розбиттям $\mathtt{P}$ множини $(\{Y\},X\setminus Y)$ на $|\mathtt{P}|$ непорожніх підмножин $X_i \in (\{Y\},X\setminus Y)$, які попарно не перетинаються, відображення декластеризації θ визначається такою формулою: $\theta(\{Y\},X\setminus Y)=X$.

Якщо $\|F_1(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)} < e^{-(3s+2)}$, ряд (3) є збіжним за нормою простору $L^1(\mathbb{R}^{3s}\times\mathbb{R}^{3s})$ для $t\geq 0$, і таким чином, ряд, яким зображується інтеграл зіткнень кінетичного рівняння (1), збігається в тому ж сенсі за такої умови: $\|F_1(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)} < e^{-8}$ [9].

Зазначимо, що типові властивості розв'язку немарківського кінетичного рівняння Енскоґа з непружним розсіянням індукуються властивостями твірних еволюційних операторів інтегралу зіткнень цього рівняння.

Для задачі Коші (1),(2) в просторі $L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$ справедливе таке твердження.

Теорема 1 *Якщо $t\geq 0$, глобальний розв'язок задачі Коші для немарківського кінетичного рівняння Енскоґа з непружним розсіянням (1),(2) визначається таким рядом:*

$$F_1(t,x_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_2\dots dx_{n+1}\,\mathfrak{A}^*_{1+n}(t,1,\dots,n+1) \\ \times \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(1+n)}\setminus\mathbb{W}_{1+n}} \prod_{i=1}^{n+1} F_1^0(x_i), \tag{5}$$

де твірний оператор $\mathfrak{A}^*_{1+n}(t)$, $n\geq 0$ – кумулянт $(1+n)$-го порядку (4). За умови $\|F_1^0\|_{L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)} < e^{-10}(1+e^{-9})^{-1}$, для $F_1^0\in L^1_0(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)\subset L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$, тобто для нескінченно диференційованих інтегрованих функцій з компактними носіями, рядом (5) зображується сильний розв'язок, а для довільних початкових даних $F_1^0\in L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$ функція (5) є слабким розв'язком задачі Коші (1),(2).

3 Доведення теореми існування

Для $F_1^0 \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ ряд (5) є збіжним по нормі простору інтегрованих функцій $L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ за умови: $\|F_1^0\|_{L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)} < e^{-10}(1+e^{-9})^{-1}$.

Якщо $F_1^0 \in L_0^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, скористаємось результатом диференціювання за змінною часу одночастинкової маргінальної функції розподілу (5) в сенсі поточкової збіжності на просторі $L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, в результаті при $t \geq 0$ справедлива така рівність:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t \to 0} \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_1 \Big| \frac{1}{\Delta t}\big(F_1(t+\Delta t, x_1) - F_1(t, x_1)\big) - \\
&-\big(- \langle p_1, \frac{\partial}{\partial q_1}\rangle F_1(t, x_1) + \qquad\qquad (6)\\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_2 \mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(1,2) \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_3 \ldots dx_{n+2} \mathfrak{V}_{1+n}\big(t, \{1,2\},\\
&3, \ldots, n+2\big) \prod_{i=1}^{n+2} F_1(t, x_i)\big)\Big| = 0,
\end{aligned}$$

де дія оператора $\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(1,2)$ при $t \geq 0$ визначається в такий спосіб:

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(1,1) f_2)(x_1, x_2) \doteq \sigma^2 \int_{\mathbb{S}^2_+} d\eta \langle \eta, (p_1 - p_2)\rangle \times \qquad\qquad (7)\\
&\big(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2} f_2(q_1, p_1^\diamond, q_2, p_2^\diamond) \delta(q_1 - q_2 + \sigma\eta) - f_2(x_1, x_2)\delta(q_1 - q_2 - \sigma\eta)\big),
\end{aligned}$$

та використано позначення, прийняті у рівнянні (1). Функція $F_1(t, x_1)$ в рівності (6) визначається формулою (5) і, отже, функція $\prod_{i=1}^{n+2} F_1(t, x_i)$ визначається таким рядом:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+2} F_1(t, x_i) = &\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{k_1} \ldots \sum_{k_{n+2}=0}^{k_{n+1}} \frac{1}{k_{n+2}!(k_{n+1} - k_{n+2})! \ldots (k_1 - k_2)!} \qquad (8)\\
&\times \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^{k_1}} dx_{n+3} \ldots dx_{n+2+k_1} \prod_{i=1}^{n+2} \mathfrak{A}^*_{1+k_{n+3-i} - k_{n+4-i}}(t, i,\\
&\quad n+3+k_{n+4-i}, \ldots, n+2+k_{n+3-i}) \mathcal{X}_{1+k_{n+3-i}-k_{n+4-i}}(q_i,\\
&\quad q_{n+3+k_{n+4-i}}, \ldots, q_{n+2+k_{n+3-i}}) \prod_{j=1}^{n+2+k_1} F_1^0(x_j).
\end{aligned}$$

Справедливість рівності (6) означає, що для $F_1^0 \in L_0^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ сильний розв'язок задачі Коші (1),(2) для немарківського кінетичного рівняння Енскога з непружним розсіянням визначається рядом (5).

Доведемо, що для довільних початкових даних $F_1^0 \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ рядом (5) представляється слабкий розв'язок задачі Коші для немарківського кінетичного рівняння Енскоґа (1),(2). З цією метою введемо такий функціонал:

$$(\varphi_1, F_1(t)) \doteq \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_1 \varphi_1(x_1) F_1(t, x_1), \tag{9}$$

де $\varphi_1 \in L_0(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ – неперервно диференційована обмежена функція з компактним носієм, та функція $F_1(t)$ визначається рядом (5), який є збіжним по нормі простору $L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ за зазначеної вище умови. Функціонал (9) існує, оскільки функція $F_1(t)$ є інтегрованою, а функція φ_1 є обмеженою функцією з компактним носієм.

Згідно до структури ряду (5), яким зображується розв'язок задачі Коші (1),(2), перетворимо функціонал (9) в такий спосіб:

$$(\varphi_1, F_1(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^{n+1}} dx_1 \ldots dx_{n+1} \varphi_1(x_1) \times$$
$$\times \mathfrak{A}_{1+n}^*(t, 1, \ldots, n+1) \prod_{i=1}^{n+1} F_1^0(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(1+n)} \setminus \mathbb{W}_{1+n}} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^{n+1}} dx_1 \ldots dx_{n+1} \mathfrak{A}_{1+n}(t, 1, \ldots, n+1) \varphi_1(x_1) \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{n+1} F_1^0(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(1+n)} \setminus \mathbb{W}_{1+n}},$$

де еволюційний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$ є кумулянтом $(1+n)$-го порядку напівгруп операторів твердих куль з непружним розсіянням, який є спряженим до кумулянту спряжених напігруп операторів твердих куль з непружним розсіянням в сенсі функціоналу (9), а саме:

$$(\varphi_1, \mathfrak{A}_{1+n}^*(t) F_1(t)) = (\mathfrak{A}_{1+n}(t) \varphi_1, F_1(t)).$$

Для довільних початкових даних $F_1^0 \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ та $\varphi_1 \in L_0(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ в сенсі $*$-слабкої збіжності на просторі обмежених функцій $L(\mathbb{R}^3 \times$

$\mathbb{R}^3$) справедлива така рівність:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^{n+1}} dx_1 \dots dx_{n+1} \frac{1}{\Delta t} \big(\mathfrak{A}_{1+n}(t+\Delta t) - \tag{10}$$
$$-\mathfrak{A}_{1+n}(t)\big)\varphi_1(x_1) \prod_{i=1}^{n+1} F_1^0(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(1+n)}\setminus\mathbb{W}_{1+n}} =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_1 \langle p_j, \frac{\partial}{\partial q_j}\rangle \varphi_1(x_1) F_1(t,x_1) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^{n+2}} dx_1 \dots dx_{n+2} \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(1,2)\varphi_1(x_1) \times$$
$$\times \mathfrak{A}^*_{1+k}(t,\{1,2\},3,\dots,n+2) \prod_{i=1}^{n+2} F_1^0(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(n+2)}\setminus\mathbb{W}_{n+2}}.$$

В отриманому виразі (10) використано оператор $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(1,2)$, який є спряженим оператором до оператору (7), і на множині $L_0(\mathbb{R}^6 \times (\mathbb{R}^6 \setminus \mathbb{W}_2))$ дія цього оператора визначається в такий спосіб:

$$\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^2} dx_1 dx_2 \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(1,2)\varphi_2(x_1,x_2) \doteq \tag{11}$$
$$\doteq \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_1 \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_+} dp_2 d\eta \langle \eta, (p_1 - p_2)\rangle$$
$$\times \big(\varphi_2(q_1, p_1^*, q_1 + \sigma\eta, p_2^*) - \varphi_2(q_1, p_1, q_1 + \sigma\eta, p_2)\big),$$

де вирази p_1^* та p_2^* – значення імпульсів твердих куль з непружним розсіянням після зіткнення:

$$p_i^* = p_i - (1-\varepsilon)\, \eta \langle \eta, (p_i - p_j)\rangle,$$
$$p_j^* = p_j + (1-\varepsilon)\, \eta \langle \eta, (p_i - p_j)\rangle,$$

Для функцій $F_1^0 \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ та $\varphi_1 \in L_0(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ граничні функціонали з рівності (10) існують.

В другому функціоналі з правої частини рівності (10) розкладемо кумулянти спряжених напігруп операторів твердих куль з непружним розсіянням $\mathfrak{A}^*_{1+k}(t)$ в кінетичні кластерні розклади [9] та використаємо рівність (8). В результаті функціонал перетворюється до такого представлення:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^{n+2}}dx_1\dots dx_{n+2}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(1,2)\varphi_1(x_1)\times \tag{12}$$

$$\mathfrak{A}^*_{1+k}(t,\{1,2\},3,\dots,n+2)\prod_{i=1}^{n+2}F_1^0(x_i)\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(n+2)}\setminus\mathbb{W}_{n+2}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^{2}}dx_1dx_2\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(1,2)\varphi_1(x_1)\times$$

$$\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^{n}}dx_3\dots dx_{n+2}\mathfrak{V}_{1+n}\big(t,\{1,2\},3,\dots,n+2\big)\prod_{i=1}^{n+2}F_1(t,x_i),$$

де функція $F_1(t,x_1)$ в рівності (12) визначається формулою (5) та еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{1,2\},3,\dots,n+2)$, $n\geq 0$, – твірні оператори маргінальних функціоналів стану (3).

Внаслідок справедливості рівностей (10) та (12) отримуємо таку рівність:

$$\frac{d}{dt}(\varphi_1,F_1(t))=\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}dx_1\langle p_1,\frac{\partial}{\partial q_1}\rangle\varphi_1(x_1)F_1(t,x_1)+ \tag{13}$$

$$+\sigma^2\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}dx_1\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_+}dp_2d\eta\langle\eta,p_1-p_2\rangle(\varphi_1(q_1,p_1^*)-\varphi_1(q_1,p_1))\times$$

$$\times F_2(t,x_1,q_1+\sigma\eta,p_2\mid F_1(t)),$$

де вираз $F_2(t|F_1(t))$ – маргінальний функціонал стану (3) у випадку $s=2$ та використано введені вище позначення.

Встановлена рівність (13) означає, що для довільних початкових даних $F_1^0\in L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$ ряд (5), яким зображується одночастинкова маргінальна функція розподілу є слабким розв'язком задачі Коші (1),(2) для немарківського кінетичного рівняння Енскоґа з непружним розсіянням.

Зауважимо, що за допомогою одночастинкової маргінальної функції розподілу з простору інтегрованих функцій можна описати еволюцію системи скінченої середньої кількості частинок. Оскільки кінетична еволюція є характерною властивістю систем нескінченної кількості частинок, розвинутий підхід може бути узагальнений для доведення теореми про існування розв'язку і в просторі неперервних обмежених функцій, якому належать стани таких систем.

4 Існування слабкого розв'язку в узагальненому сенсі

Якщо початкові дані цілком визначаються одночастинковою маргінальною функцією розподілу на дозволених конфігураціях, тоді еволюція станів системи твердих куль цілком описується немарківським кінетичним рівнянням Енскоґа з непружним розсіянням (1) та послідовністю $F_s\big(t \mid F_1(t)\big)$, $s \geq 2$, маргінальних функціоналів стану (3), якими описуються усі можливі кореляції, що виникають в процесі еволюції систем частинок з дисипативною взаємодією.

Внаслідок зазначеної обставини для задачі Коші (1),(2) можна ввести поняття слабкого розв'язку в узагальненому сенсі.

Введемо функціонал $\big(\varphi, F(t \mid F_1(t))\big)$, який визначається таким рядом:

$$\big(\varphi, F(t \mid F_1(t))\big) \doteq \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^s} dx_1 \dots dx_s \, \varphi_s \, F_s(t \mid F_1(t)), \quad (14)$$

де $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1(x_1), \dots, \varphi_s(x_1, \dots, x_s), \dots)$ – фінітна послідовність обмежених нескінченно диференційованих функцій з компактними носіями в фазовому просторі твердих куль $\varphi_s \in L_0(\mathbb{R}^{3s} \times (\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s))$, $s \geq 0$, та послідовність $F(t \mid F_1(t)) = \big(1, F_1(t, x_1), F_2(t, x_1, x_2 \mid F_1(t)), \dots, F_s(t, x_1, \dots, x_s \mid F_1(t)), \dots\big)$ визначена формулами (5) та (3) відповідно для першого та інших елементів.

Для $t \geq 0$ на послідовностях φ функцій $\varphi_s \in L_0(\mathbb{R}^{3s} \times (\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s))$ визначено оператор $\mathcal{B}$ – генератор дуальної ієрархії ББҐКІ з непружним розсіянням [8]:

$$(\mathcal{B}\varphi)_s(x_1, \dots, x_s) \doteq (\sum_{j=1}^{s} \mathcal{L}(j) + \sum_{j_1 > j_2 = 1}^{s} \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1, j_2))\varphi_s(x_1, \dots, x_s) +$$
$$+ \sum_{j_1 \neq j_2 = 1}^{s} \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1, j_2)\varphi_{s-1}((x_1, \dots, x_s)\backslash(x_{j_1})), \quad s \geq 1,$$

де оператор $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1, j_2)$ визначено формулою (11) та $\mathcal{L}(j)$ – оператор Ліувілля невзаємодіючої j-тої твердої кулі.

Розклад (5) є слабким розв'язком в узагальненому сенсі задачі Коші (1),(2), якщо для функціоналу (14) виконується така рівність:

$$\frac{d}{dt}\big(\varphi, F(t \mid F_1(t))\big) = \big(\mathcal{B}\varphi, F(t \mid F_1(t))\big), \quad (15)$$

де згідно наведених вище оцінок функціонал в правій частині цієї рівності існує.

Встановимо рівняння (15). Для розв'язку (5) справедлива рівність:

$$\big(\varphi, F(t \mid F_1(t))\big) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^s} dx_1 \dots dx_s \sum_{n=0}^{s} \frac{1}{(s-n)!} \times \tag{16}$$

$$\sum_{j_1\neq\ldots\neq j_{s-n}=1}^{s} \quad \sum_{Z\subset Y\setminus(j_1,\ldots,j_{s-n})} (-1)^{|Y\setminus(j_1,\ldots,j_{s-n})\setminus Z|} \times$$

$$S_{s-n+|Z|}(t,(j_1,\ldots,j_{s-n})\cup Z)\varphi_{s-n}(x_{j_1},\ldots,x_{j_{s-n}}) \prod_{i=1}^{s} F_1^0(x_i)\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3s}\setminus\mathbb{W}_s},$$

де $\sum_{Z\subset Y\setminus(j_1,\ldots,j_{s-n})}$ – сума по всіх можливих підмножинах $Z \subset Y \setminus (j_1,\ldots,j_{s-n})$ множини $Y \setminus (j_1,\ldots,j_{s-n}) \subset Y \equiv (1,\ldots,s)$. Для $F_1^0 \in L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$ та $\varphi_s \in L_0(\mathbb{R}^{3s}\times(\mathbb{R}^{3s}\setminus\mathbb{W}_s))$, $s \geq 1$, функціонал (16) існує.

Внаслідок справедливості рівності (16) для функцій $\varphi_s \in L_0(\mathbb{R}^{3s}\times(\mathbb{R}^{3s}\setminus\mathbb{W}_s))$, $s \geq 1$, похідна функціоналу (14) за змінною часу в сенсі $*$-слабкої збіжності в просторі послідовностей обмежених функцій набуває такого вигляду:

$$\frac{d}{dt}\big(\varphi, F(t \mid F_1(t))\big) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^s} dx_1 \dots dx_s \big((\sum_{j=1}^{s} \mathcal{L}(j) + \tag{17}$$

$$+ \sum_{j_1>j_2=1}^{s} \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1,j_2))\varphi_s(x_1,\ldots,x_s)$$

$$+ \sum_{j_1\neq j_2=1}^{s} \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1,j_2)\varphi_{s-1}((x_1,\ldots,x_s)\setminus(x_{j_1}))\big)F_s(t,x_1,\ldots,x_s \mid F_1(t)),$$

де функціонал $F_s(t \mid F_1(t))$ визначається рядом (3). Згідно з означенням (15) слабкого розв'язку в узагальненому сенсі, рівність (17) означає, що для довільних початкових даних $F_1^0 \in L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$ слабкий розв'язок в узагальненому сенсі задачі Коші для немарківського рівняння Енскоґа з непружним розсіянням (1) визначається рядом (5).

Зауважимо, вище фактично також встановлено, що маргінальні функціонали стану (3) є слабким розв'язком ієрархії рівнянь ББҐКІ з непружним розсіянням.

Таким чином, в роботі доведено теорему про існування сильного та слабкого розв'язків задачі Коші для немарківського кінетичного рівняння Енскоґа для гранульованих газів в просторі інтегрованих функцій.

Зауважимо також, що оскільки в багатовимірному просторі при розсіянні твердих куль змінюються лише поздовжні компоненти швидкостей, то основні властивості ґранульованих (сипучих) матеріалів моделюються за допомогою системи твердих куль з непружним розсіянням в одновимірному просторі. Строгий підхід до опису одновимірного ґранульованого газу розвинуто в роботі [8]. Доведена теорема існування також справедлива і у випадку одновимірної системи твердих куль з дисипативною взаємодією [8].

References

[1] C. Villani, *A review of mathematical topics in collisional kinetic theory.* In: Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, Vol. I., North-Holland, Amsterdam, 2002, 71–305.

[2] C. Cercignani, *Rarefied Gas Dynamics.* Cambridge University Press, 2000.

[3] C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti. *The Mathematical Theory of Dilute Gases.* Springer-Verlag, 1994.

[4] C. Villani, *Mathematics of granular materials.* J. Stat. Phys., **124**, (2)-(4), (2006), 781–822.

[5] G. Toscani, *The large-time behavior of nonconservative evolution equations.* In: Kinetic Methods for Nonconservative and Reacting Systems, **16**, Seconda Universita di Napoli, 2005, 145–320.

[6] N.V. Brilliantov, T. Pöschel. *Kinetic Theory of Granular Gases.* Oxford, 2004.

[7] D.Ya. Petrina, *Stochastic Dynamics and Boltzmann Hierarchy.* Kyiv: Inst. Math. NASU, 2008.

[8] M.S. Borovchenkova, V.I. Gerasimenko, *On the kinetic equations of a one-dimensional granular gas.* Збірн. праць Ін-ту матем. НАНУ, **9**, (2), (2012), 69–86.

[9] V.I. Gerasimenko, I.V. Gapyak, *Hard sphere dynamics and the Enskog equation.* Kinet. Relat. Models, **5**, (3), (2012), 459–484.

[10] C. Cercignani, V.I. Gerasimenko, D.Ya. Petrina, *Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations.* Kluwer Acad. Publ., 1997.