Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 2, 112–124

УДК 517.984, 517.923

А.С. Горюнов, В.А. Михайлец

(Інститут математики НАН Украины, Киев)

Сходимость двучленных дифференциальных операторов с обобщенными функциями в коэффициентах

goriunov@imath.kiev.ua, mikhailets@imath.kiev.ua

Для операторов, порожденных формальными дифференциальными выражениями порядка $m \geqslant 2$

$$l(y) = i^m y^{(m)}(t) + q(t)y(t),\ t \in (a,b),$$

где коэффициент-распределение q является k-й обобщенной производной функции из $L_2([a,b];\mathbb{C})$, если $m = 2k$, и $L_1([a,b];\mathbb{C})$ в остальных случаях, найдены достаточные условия равномерной на $(a,b) \times (a,b)$ сходимости функций Грина, в частности, равномерной резольвентной сходимости.

1 Введение

Рассмотрим на конечном интервале (a,b) формальное дифференциальное выражение порядка m

$$l(y) = i^m y^{(m)}(t) + q(t)y(t), \quad t \in (a,b). \tag{1}$$

Если $m = 2$ и коэффициент $q \in L([a,b];\mathbb{R})$, то дифференциальное уравнение $l(y) = f$ является классическим уравнением Штурма–Лиувилля и изучено весьма полно. Современное изложение этой теории приведено во многих монографиях (см. [8]) и приведенные там ссылки). Как выяснилось в последние годы [6], многие положения этой теории распространяются на существенно более общий случай

$$q = Q', \quad Q \in L_2\left([a, b]; \mathbb{C}\right), \tag{2}$$

где производная понимается в смысле обобщенных функций. В частности, это относится к физически содержательному случаю, когда q является мерой Радона на $[a, b]$ либо имеет неинтегрируемые точечные особенности. Подобные операторы много ранее возникали в различных задачах математической физики и исследовались многими авторами, главным образом, при помощи средств теории операторов (см. монографии [1, 2] и приведенные там ссылки).

В связи с этим идея регуляризации формального дифференциального выражения квазипроизводными, лежащая в основе работы [6], получила существенное развитие. В работах [4, 9] авторами получены различные результаты относительно оператора второго порядка, в том числе для случая полного дифференциального выражения Штурма–Лиувилля. В работе [10] авторами была найдена регуляризация дифференциального выражения (1) с сингулярным коэффициентом $q = Q'$, $Q \in L_1\left([a, b]; \mathbb{C}\right)$ при произвольном значении $m \geq 3$. Существенное обобщение этих результатов дано в работе [5], где допускается, что в (1)

$$\begin{aligned} &q = Q^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq m/2, \\ &Q \in \begin{cases} L_2([a, b], \mathbb{C}), \ m = 2k; \\ L_1([a, b], \mathbb{C}), \ m > 2k. \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

Для таких выражений была построена регуляризация с помощью квазипроизводных Шина-Цеттла, введены минимальный и максимальный операторы и описаны различные классы расширений минимального симметрического оператора.

Данная работа посвящена исследованию сходимости функций Грина двухточечных краевых задач, связанных с такими операторами. При этом дифференциальное (1) может не быть формально самосопряженным.

Работа структурирована следующим образом.

В разделе 2 приведена построенная в [5] регуляризация выражения (1) при условиях (3) и дано определение функции Грина квазидифференциальной краевой задачи.

В разделе 3 установлены достаточные условия равномерной сходимости функций Грина последовательности краевых задач.

В разделе 4 приведены достаточные условия равномерной резольвентной сходимости последовательности квазидифференциальных операторов.

2 Регуляризация сингулярного выражения и функция Грина

Рассмотрим формальное дифференциальное выражение (1) порядка $m \geq 2$ при условиях (3).

Введем последовательно квазипроизводные:

$$
\begin{aligned}
&D^{[r]}y = y^{(r)}, \qquad 0 \leq r \leq m-k-1;\\
&D^{[m-k+s]}y = (D^{[m-k+s-1]}y)' + i^{-m}(-1)^s C_s^k\, QD^{[s]}y,\ 0 \leq s \leq k-1;\\
&D^{[m]}y = \begin{cases} (D^{[m-1]}y)' + i^{-m}(-1)^k C_k^k QD^{[k]}y, & 1 \leq k < m/2,\\ (D^{[m-1]}y)' + QD^{[\frac{m}{2}]}y + (-1)^{\frac{m}{2}+1}Q^2y, & m = 2n = 2k; \end{cases}
\end{aligned}
$$

где C_k^s — биномиальные коэффициенты, $[x]$ — целая часть числа x. Обозначим через

$$\widehat{y}(t) = \Big(D^{[0]}y(t), D^{[1]}y(t), \ldots, D^{[m-1]}y(t)\Big) \in \mathbb{C}^m.$$

В условиях (3) выражения $D^{[0]}y(t), D^{[1]}y(t), \ldots, D^{[m]}y(t)$ являются квазипроизводными по Шину–Цеттлу (см. [3, Sec. 1]). Также легко проверить, что для достаточно гладких функций Q справедливо равенство $l(y) = i^m D^{[m]}y$.

Поэтому формальное выражение (1) можно корректно определить как квазидифференциальное выражение Шина–Цеттла

$$l[y] = i^m D^{[m]}y.$$

Соответствующая матрица Шина–Цеттла имеет вид

$$A(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -i^{-m}C_k^0 Q & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i^{-m}C_k^1 Q & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ (-1)^{\frac{m}{2}} Q^2 \delta_{2k,m} & 0 & \dots & i^{-m}(-1)^{k+1}C_k^k Q & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; $A(t) \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$.

Определение 1 *Решением задачи Коши для резольвентного уравнения*

$$l[y] - \lambda y = f \in L_2, \qquad \widehat{y}(c) = (\alpha_0, \alpha_1, ...\alpha_{m-1}), \quad (5)$$

где $c \in [a,b]$ и $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{0, m-1}$, является первая компонента решения задачи Коши для соответствующей системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$w'(t) = A_\lambda(t) w(t) + \varphi(t), \qquad w(c) = (\alpha_0, \alpha_1, ...\alpha_{m-1})$$

где вектор-функция $w(t) = \widehat{y}(t)$, квадратная матрица-функция

$$A_\lambda(t) = A(t) - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ i^{-m}\lambda & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}),$$

а вектор-функция $\varphi(t) = (0, 0, ..., 0, i^{-m} f(t)) \in L_1([a,b];\mathbb{C}^m)$.

Лемма 2 *Задача Коши* (5) *при условиях* (3) *имеет решение на* $[a,b]$. *Оно единственно.*

Рассмотрим двухточечную квазидифференциальную краевую задачу

$$l[y] = f(t) \in L_1([a,b],\mathbb{C}), \quad (6)$$

$$\alpha\widehat{y}(a) + \beta\widehat{y}(b) = 0 \tag{7}$$

Следующее утверждение, как и для задачи Коши, связывает квазидифференциальную краевую задачу (6), (7) с системами дифференциальных уравнений первого порядка.

Лемма 3 *Функция $y(t)$ является решением краевой задачи* (6), (7) *тогда и только тогда, когда вектор-функция $w(t) = \widehat{y}(t)$ является решением краевой задачи*

$$w'(t) = A(t)w(t) + \varphi(t), \tag{8}$$

$$\alpha w(a) + \beta w(b) = 0, \tag{9}$$

где квадратная матрица-функция $A(t)$ задана формулой (4), *а* $\varphi(t) = (0, 0, ..., 0, i^{-m}f(t)) \in L_1([a, b]; \mathbb{C}^m)$.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} (D^{[j]}y(t))' = D^{[j+1]}y(t), & j = \overline{0, m-2-k}, \\ (D^{[m-k+j-1]}y(t))' = D^{[m-k+j]}y(t) + i^{-m}(-1)^{j+1}C_k^j Q(t)D^{[j]}y(t), & \\ & j = \overline{0, k-1}, \\ (D^{[m-1]}y(t))' = i^{-m}(-1)^{k+1}C_k^k Q(t)D^{[k]}y(t) + (-1)^{m/2+1}Q^2(t)y + & \\ \quad + i^{-m}f(t). & \end{cases}$$

Если $y(\cdot)$ – решение уравнения (6), то из определения квазипроизводных следует, что $y(\cdot)$ есть решение этой системы. С другой стороны, положив $w(t) = \widehat{y}(t)$ и $\varphi(t) = (0, 0, ..., 0, i^{-m}f(t))$, данную систему можно записать в виде уравнения (8).

Учитывая, что $\widehat{y}(a) = w(a)$, $\widehat{y}(b) = w(b)$, легко видеть, что краевые условия (7) эквивалентны краевым условиям (9). □

Пусть однородная краевая задача

$$w'(t) = A(t)w(t), \quad \alpha w(a) + \beta w(b) = 0$$

имеет только тривиальное решение. Тогда, как известно, существует матрица Грина этой задачи $G(t, s) = (g_{ij}(t, s))_{i,j=1}^m \in L_\infty([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m})$, имеющая вид

$$G(t, s) = \begin{cases} -Y(t)(\alpha + \beta Y(b))^{-1}\beta Y(b)Y^{-1}(s), & a \le t < s, \\ Y(t)\left[I_m - (\alpha + \beta Y(b))^{-1}\beta Y(b)\right]Y^{-1}(s), & s < t \le b, \end{cases} \tag{10}$$

где $Y(t)$ — матрицант, то есть решение матричной задачи Коши

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad Y(a) = I_m,$$

а I_m — единичная $m \times m$-матрица. Матрица Грина позволяет представить единственное решение задачи (8), (9) в виде

$$w(t) = \int_a^b G(t,s)\varphi(s)ds, \quad t \in [a,b]. \tag{11}$$

Введем аналогичный объект для квазидифференциальной краевой задачи (6), (7).

Определение 4 *Под функцией Грина полуоднородной краевой задачи* (6), (7) *будем понимать непрерывную функцию* $\Gamma(t,s) \in C([a,b] \times [a,b], \mathbb{C})$*, с помощью которой решение этой задачи представляется в виде*

$$y(t) = \int_a^b \Gamma(t,s)f(s)ds.$$

Теорема 5 *Пусть однородная краевая задача*

$$D^{[m]}y(t) = 0, \quad \alpha\widehat{y}(a) + \beta\widehat{y}(b) = 0$$

имеет только тривиальное решение.

Тогда существует и единственна функция Грина $\Gamma(t,s)$ *краевой задачи* (6), (7) *и*

$$\Gamma(t,s) = i^{-m}g_{1m}(t,s).$$

Доказательство. В силу леммы 3 из предположения теоремы следует, что однородная краевая задача

$$w'(t) = A(t)w(t), \quad \alpha w(a) + \beta w(b) = 0$$

также имеет только тривиальное решение и для задачи (8), (9) существует матрица Грина $G(t,s)$ и справедливо равенство (11).

Снова воспользовавшись леммой 3, перепишем (11) в виде

$$\begin{cases} D^{[0]}y(t) = \int\limits_a^b g_{1m}(t,s)i^{-m}f(s)ds \\ D^{[1]}y(t) = \int\limits_a^b g_{2m}(t,s)i^{-m}f(s)ds, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ D^{[m-1]}y(t) = \int\limits_a^b g_{mm}(t,s)i^{-m}f(s)ds, \end{cases}$$

где $y(\cdot)$ — единственное решение задачи (6), (7).

Из формулы (10) легко видеть, что все элементы матрицы $G(t,s)$ вне главной диагонали являются непрерывными функциями в силу непрерывности матрицанта $Y(t)$ и $Y^{-1}(t)$.

Отсюда следует утверждение теоремы. □

3 Сходимость функций Грина

Рассмотрим наряду с квазидифференциальным выражением $l[y]$ семейство квазидифференциальных выражений $l_n[y]$ вида (1) с коэффициентами

$$q_n = Q_n^{(k)}, \quad k \le m/2, \quad n \in \mathbb{N},$$

удовлетворяющими условиям (3). Соответствующие им квазипроизводные будем обозначать через $D_n^{[0]}y, D_n^{[1]}y, ..., D_n^{[m]}y$, а вектор из квазипроизводных обозначим

$$\widehat{y}_n(t) := \Big(D_n^{[0]}y(t), D_n^{[1]}y(t), \dots, D_n^{[m-1]}y(t)\Big) \in \mathbb{C}^m.$$

Соответствующие матрицы Шина–Цеттла обозначим через $A_n(t)$.

Рассмотрим наряду с задачей (6), (7) при каждом n краевые задачи

$$l_n[y](t) = f_n(t) \in L_2([a,b];\mathbb{C}), \tag{12}$$

$$\alpha_n \widehat{y}_n(a) + \beta_n \widehat{y}_n(b) = 0. \tag{13}$$

Они, согласно лемме 3, эквивалентны краевым задачам

$$w'(t) = A_n(t)w(t) + \varphi_n(t), \tag{14}$$

$$\alpha_n w(a) + \beta_n w(b) = 0, \tag{15}$$

где $w(t) = \widehat{y}_n(t)$ и $\varphi_n(t) = (0, 0, ..., 0, i^{-m} f_n(t)) \in L_1([a,b];\mathbb{C}^m)$.

Теорема 6 *Пусть выполнены условия:*

1) *Однородная краевая задача*

$$D^{[m]}y(t) = 0, \quad \alpha\widehat{y}(a) + \beta\widehat{y}(b) = 0$$

имеет только тривиальное решение;

2) $\alpha_n \to \alpha, \quad \beta_n \to \beta, \quad n \to \infty$;

3) $\|\int\limits_a^t (Q_n(s) - Q(s))ds\|_C \to 0$;

4) $\|\int\limits_a^t (Q_n^2(s) - Q^2(s))ds\|_C \to 0$ *в случае* $m = 2k$.

Тогда при достаточно больших n *существуют функции Грина* $\Gamma_n(t,s)$ *полуоднородных краевых задач* (12), (13) *и справедливо предельное соотношение*

$$\|\Gamma_n(t,s) - \Gamma(t,s)\|_C \to 0, \quad n \to \infty. \tag{16}$$

Здесь $\|\cdot\|_C$ — равномерная норма.

Доказательство этой теоремы основывается на вспомогательном результате, полученном в [13]. Отметим, что результаты работы [13] были существенно усилены в последующих работах, см. [12] и приведенные там ссылки. Нам, однако, будет достаточно нижеприведенного результата.

Обозначим через $Y_n(\cdot)$ — матриканты, соответствующие задачам (14), (15), то есть решения матричных задач Коши

$$Y_n'(t) = A_n(t)Y_n(t), \quad Y_n(a) = I_m.$$

Лемма 7 *Если при* $n \to \infty$ *выполнено одно из четырех (неэквивалентных между собой) условий:*

(α) $\|A_n - A\|_1 = O(1)$,

(β) $\|\int_a^t (A_n(s) - A(s))\,ds \cdot (A_n(t) - A(t))\,\|_1 \to 0$,

(γ) $\|\,(A_n(t) - A(t)) \cdot \int_a^t (A_n(s) - A(s))\,ds\|_1 \to 0$,

(δ) $\| \int_a^t (A_n(s) - A(s))\, ds\, (A_n(t) - A(t)) -$
$- (A_n(t) - A(t)) \int_a^t (A_n(s) - A(s))\, ds \|_1 \to 0,$

то условие $\| \int_a^t (A_n(s) - A(s))\, ds \|_C \to 0$ *равносильно тому, что при* $n \to \infty$

$$\|Y_n - Y\|_C \to 0, \quad \|Y_n^{-1} - Y^{-1}\|_C \to 0. \tag{17}$$

Доказательство теоремы 6. В силу леммы 3 из предположения 1) теоремы 6 следует, что однородные краевые задачи

$$w'(t) = A_n(t) w(t), \quad \alpha_n w(a) + \beta_n w(b) = 0$$

также имеют только тривиальные решения при достаточно больших n. Отсюда в силу теоремы 5 следует существование функций Грина задач (12), (13).

Докажем теперь соотношение (16).

Обозначим

$$r_n := i^{-m} Q_n - i^{-m} Q,$$
$$p_n := i^{-m} Q_n^2 - i^{-m} Q^2.$$

Тогда

$$A_n - A =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -i^{-m} C_k^0 r_n & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i^{-m} C_k^1 r_n & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ (-1)^{\frac{m}{2}} p_n \delta_{2k,m} & 0 & \dots & i^{-m} (-1)^{k+1} C_k^k r_n & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что при $k < m/2$

$$(A_n(t) - A(t)) \cdot \int\limits_a^t (A_n(s) - A(s))\, ds = 0,$$

поэтому матричные функции A_n, A удовлетворяют условию (β) леммы 7. При $m = 2k+1$ и $m = 2k$ имеем

$$(A_n(t) - A(t)) \cdot \int\limits_a^t (A_n(s) - A(s))\, ds = \\ = \int\limits_a^t (A_n(s) - A(s))\, ds \cdot (A_n(t) - A(t))\,,$$

и матричные функции A_n, A удовлетворяют условию (δ) леммы 7.

Очевидно, что условие $\| \int\limits_a^t (A_n(s) - A(s))\, ds\|_C \to 0$, $n \to \infty$ эквивалентно условию 3) (или условиям 3), 4) при $m = 2k$) теоремы 6. Поэтому из леммы 7 вытекает предельное соотношение (17). Учитывая формулу (10), это значит, что выполняется предельное равенство (16). $\square$

4 Сходимость операторов

Введенное в разделе 2 квазидифференциальное выражение $l[y]$ порождает в гильбертовом пространстве $L_2([a,b];\mathbb{C})$ (см. [3, 7]) *максимальный* квазидифференциальный оператор

$$L_{\max} : y \to l[y],$$

$$\mathrm{Dom}(L_{\max}) = \left\{ y \,\middle|\, D^{[k]}y \in AC([a,b];\mathbb{C}), k = \overline{0, m-1},\; D^{[m]}y \in L_2([a,b];\mathbb{C}) \right\}.$$

Минимальный квазидифференциальный оператор определяется как сужение оператора $L_{\max}$ на линейное многообразие

$$\mathrm{Dom}(L_{\min}) := \{ y \in \mathrm{Dom}(L_{\max}) \,|\, \widehat{y}(a) = \widehat{y}(b) = 0 \}\,.$$

Замечание 8 *Очевидно, квазипроизводные $D^{[1]}y, \ldots, D^{[m]}y$ зависят от выбора первообразной Q с точностью до полинома степени $k-1$. Однако, как нетрудно проверить, сами операторы $L_{\min}$, $L_{\max}$ при этом не меняются.*

Рассмотрим наряду с (1) формально сопряженное дифференциальное выражение

$$l^{+}(y)=i^{m}y^{(m)}(t)+\overline{q}(t)y(t),$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Обозначим через $L^{+}_{\max}$ и $L^{+}_{\min}$ порождаемые им максимальный и минимальный операторы в пространстве $L_2([a,b];\mathbb{C})$. Тогда из результатов монографии [3] для общих квазидифференциальных выражений Шина–Цеттла и вышеприведенного следует

Теорема 9 *Операторы $L_{\min}$, $L^{+}_{\min}$, $L_{\max}$, $L^{+}_{\max}$ являются плотно заданными и замкнутыми в пространстве $L_2([a,b];\mathbb{C})$,*

$$L^{*}_{\min}=L^{+}_{\max},\quad L^{*}_{\max}=L^{+}_{\min}.$$

Аналогично, выражения $l_n[y]$ при каждом n порождают в гильбертовом пространстве $L_2([a,b];\mathbb{C})$ операторы $L^{n}_{\min}$, $L^{n}_{\max}$.

В работе [5] были описаны некоторые классы расширений минимального квазидифференциального оператора $L_{\min}$. Здесь мы рассмотрим произвольное расширение минимального оператора, заданное двухточечными краевыми условиями.

Именно, рассмотрим операторы

$$Ly=l[y],$$

$$\mathrm{Dom}(L)=\left\{\, y\in \mathrm{Dom}\,(L_{\max})\,|\, \alpha\widehat{y}(a)+\beta\widehat{y}(b)=0\right\},$$

соответствующий задаче (6), (7) и операторы

$$L_n y=l_n[y],$$

$$\mathrm{Dom}(L_n)=\left\{\, y\in \mathrm{Dom}\,(L^{n}_{\max})\,|\, \alpha_n\widehat{y}_n(a)+\beta_n\widehat{y}_n(b)=0\right\},$$

соответствующие краевым задачам (12), (13).

Очевидно, что $L_{\min}\subset L\subset L_{\max}$ и $L^{n}_{\min}\subset L_n\subset L^{n}_{\max}$.

Будем обозначать через $\rho(L)$ резольвентное множество оператора L. Напомним, что операторы L_n сходятся при $n\to\infty$ к оператору L в смысле равномерной резольвентной сходимости, $L_n\overset{R}{\to}L$, если существует $\mu\in\mathbb{C}$ такое, что $\mu\in\rho(L)$, $\mu\in\rho(L_n)$ для достаточно больших n и

$$\|(L_n-\mu)^{-1}-(L-\mu)^{-1}\|\to 0,\quad n\to\infty.$$

Это определение не зависит от выбора $\mu\in\rho(L)$ [11].

Теорема 10 *Пусть резольвентное множество предельного оператора $\rho(L)$ не пусто и при $n \to \infty$ выполнены условия 2), 3) теоремы 6.*

Тогда $L_n \overset{R}{\to} L$.

Доказательство. Поскольку по условию теоремы $\rho(L)$ непусто, можно, не уменьшая общности, считать, что $0 \in \rho(L)$.

Покажем, что $\sup\limits_{\|f\|_2=1} \|L_n^{-1}f - L^{-1}f\| \to 0$, $n \to \infty$, где $\|\cdot\|_2$ — норма в пространстве $L_2([a,b];\mathbb{C})$.

Уравнение $L_n^{-1}f = y_n$ эквивалентно тому, что $L_n y_n = f$, т. е. y_n является решением задачи (12), (13). При этом из включения $0 \in \rho(L)$ следует, что выполняется предположение 3) теоремы 6.

Тогда

$$\|L_n^{-1} - L^{-1}\| = \sup_{\|f\|_2=1} \| \int_a^b [\Gamma_n(t,s) - \Gamma(t,s)] f(s) ds\|_2 \leq$$

$$\leq (b-a)^{1/2} \sup_{\|f\|_2=1} \| \int_a^b |\Gamma_n(t,s) - \Gamma(t,s)||f(s)|ds\|_C \leq$$

$$\leq (b-a)\|\Gamma_n - \Gamma\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty,$$

что влечет утверждение теоремы 10. □

Список литературы

[1] S. Albeverio, F. Gestezy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden, *Solvable models in quantum mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[2] S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular Perturbations of Differential Operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[3] W. N. Everitt, L. Markus, *Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi–differential Operators*, American Mathematical Society, Providence, 1999.

[4] A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets, *Regularization of singular Sturm–Liouville equations*, Methods Funct. Anal. Topology. **16** (2010), no. 2, 120–130.

[5] A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets, K. Pankrashkin, *Formally self-adjoint quasi-differential operators and boundary-value problems*, Electron. J. Diff. Equ. **2013** (2013), no. 101, 1–16.

[6] A. Savchuk, A. Shkalikov, *Sturm–Liouville operators with singular potentials* (Russian), Matem. Zametki **66** (1999), no. 6 897–912; Engl. transl. in Math. Notes **66** (1999), no. 5-6, 741–753 (2000).

[7] A. Zettl, *Formally self-adjoint quasi-differential operators*, Rocky Mountain J. Math. **5** (1975), no. 3, 453–474.

[8] A. Zettl, *Sturm–Liouville Theory*, American Mathematical Society, Providence, 2005.

[9] А. С. Горюнов, В. А. Михайлец, *Резольвентная сходимость операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами*, Математические заметки **87** (2010), no. 2, 311–315.

[10] А. С. Горюнов, В. А. Михайлец, *Регуляризация квазипроизводными двучленных дифференциальных уравнений с сингулярным коэффициентом*, Укр. мат. журн. **63** (2011), no. 9, 1190–1205.

[11] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, Москва, 1972.

[12] Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец, Н. В. Рева, *Предельные теоремы для одномерных краевых задач*, Укр. мат. журн. **65** (2013), no. 1, 70–81.

[13] А. Ю. Левин, *Предельный переход для несингулярных систем* $\dot{X} = A_n(t)X$, Докл. АН СССР **176** (1967), no. 4, 774–777.