Збірник праць Інституту математики НАН України 2013, т. 10, № 3, 171–177

УДК 517.9

Ітераційний метод розв'язування задачі з обмеженнями для сингулярних інтегральних рівнянь

О.Б. Поліщук

Національний технічний університет України "КПІ", Київ;
polya417@gmail.com

Обгрунтовано застосування ітераційного методу до задачі з обмеженнями для сингулярних інтегральних рівнянь.

An iterative method application to a problem with constraints for the singular integral equations is justified.

Загальновідома роль, яку відіграють у сучасній науці задачі з імпульсним впливом або з параметрами та задачі, на розв'язок яких накладено певні обмеження. Це і диференціальні рівняння та їх системи з імпульсним впливом, і сингулярні інтегральні рівняння з параметрами, і нетерові крайові задачі та інтегральні рівняння з додатковими умовами [1-6]. Відомо, що ряд задач теорії пружності, аеродинаміки, математичної фізики зводиться до розв'язання сингулярних рівнянь, на розв'язок яких накладаються певні умови. Дана стаття присвячена умовам застосування ітераційного методу при розв'язанні сингулярних інтегральних рівнянь з обмеженнями.

1 Постановка задачі

В дійсному просторі 2π–періодичних функцій розглянемо задачу знаходження функції $x(t)$, що задовольняє рівняння

$$(Ax)(t) = f(t) + \mu(Fx)(t), \tag{1}$$

і додаткові умови

$$\Phi(x) = \alpha, \ \alpha \in R^l, \tag{2}$$

де

$$(Ax)(t) = a(t)x(t) + \frac{b(t)}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x(t) ctg \frac{\tau - t}{2} dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} k(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

$$(Fx)(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} H(t,\tau)F(\tau, x(\tau))d\tau,$$

$\Phi(x) = (\Phi_1(x), \ \Phi_2(x), \ldots, \Phi_l(x)), \ \Phi_s(x)$ — лінійно обмежені функціонали на класі функцій $L_2[-\pi,\pi]$, зокрема,

$$\Phi_s(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \eta_s(t)x(t)dt, \ s = \overline{1,l}, \tag{3}$$

$\{\eta_s(t)\}_{s=1}^{l}$ — задана система лінійно незалежних функцій в $L_2[-\pi,\pi]$.

Будемо вважати, що
1) 2π — періодичні функції $a(t)$ і $b(t)$ задовольняють умову Гельдера і $a^2(t) + b^2(t) = 1 \forall t \in [-\pi,\pi]$;
2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mid k(t,\tau) \mid^2 dtd\tau < \infty, \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mid H(t,\tau) \mid^2 dtd\tau < \infty$;
3)$F(t,u)$ — неперервна функція своїх аргументів, 2π — періодична по t і задовольняє умову

$$\mid F(t,u) - F(t,\nu) \mid \leq c \mid u - \nu \mid, \ \forall u,\nu \in R;$$

4) $f \in L_2[-\pi,\pi], F(\cdot,0) \in L_2[-\pi,\pi], \mu$ — малий додатний параметр.

Неважко помітити, що ми маємо перевизначену задачу. Задача (1), (2) є сумісною тільки в тому випадку, коли шукана функція задовольняє рівняння (1) і додаткові умови (2). Якщо рівняння (1) не має розв'язку, чи існує розв'язок, але він не задовольняє умови (2), то задача (1), (2) несумісна. Умови сумісності задачі (1), (2) відомі [7].

2 Ітераційний метод

Згідно з ітераційним методом наближені розв'язки задачі (1), (2) будуються на основі формул

$$x_k(t) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^k (R\xi_j)(t) = u_k(t), \ \int_{-\pi}^{\pi} \eta_s(t) x_k(t) dt = \alpha_s, s = \overline{1, l}, \quad (4)$$

$$u_k(t) = x_{k-1}(t) + R[f - Ax_{k-1} + \mu(Fx_{k-1})](t), \quad (5)$$

де $\{\xi_j(t)_{j=1}^l\}$ — задана система лінійно незалежних функцій в $L_2[-\pi, \pi]$, а R — еквівалентний регуляризатор оператора A вигляду

$$(Ry)(t) = a(t)y(t) - \frac{b(t)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\tau) ctg \frac{\tau - t}{2} d\tau.$$

Початкове наближення $x_0(t)$ визначаємо із формули (4), за умови, що $k = 0$, а u_0 задаємо довільним чином.

За умови, що задача (4), (5) однозначно розв'язна, її розв'язок, як відомо [7], виражається за формулами

$$x_k(t) = (Gu_k)(t) + r(t), \quad (6)$$

$$\lambda_j^k = \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_j(t) u_k(t) dt - \beta_j, \ j = \overline{1, l}. \quad (7)$$

Причому, внаслідок властивості оператора G [4], формулу (6) можна подати у вигляді

$$x_k(t) = (G\nu_k)(t) + r(t), \ \nu_k(t) = (Qx_k)(t), \quad (8)$$

де $Q = I - P$, P — оператор ортогонального проектування простору $L_2[-\pi, \pi]$ на його підпростір $U_1[-\pi, \pi]$, породжений системою лінійно незалежних функцій $\{(R\xi_j)(t)\}_{j=1}^l$.

Після підстановки (8) у (5), замінюючи при цьому k на $k - 1$ і використовуючи відому властивість еквівалентного регуляризатора [8]: $RA = I - T$, де T — цілком неперервний інтегральний оператор, що діє в $L_2[-\pi, \pi]$, приходимо до співвідношення

$$u_k(t) = (M\nu_{k-1})(t) + g(t) + \mu(C\nu_{k-1})(t), \quad (9)$$

де

$$M = TG,\ g(t) = (Tr)(t) + (Rf)(t),\ (C\nu)(t) = RF((G\nu)(t) + r(t)).$$

Спроектуємо (9) на підпростір $V[-\pi,\pi] = L_2[-\pi,\pi] \ominus U_1[-\pi,\pi]$. Отримаємо

$$\nu_k(t) = (L\nu_{k-1})(t) + h(t) + \mu(B\nu_{k-1})(t), \qquad (10)$$

де

$$L = QM,\ h(t) = (Qg)(t),\ B = QC.$$

Таким чином, ітераційний процес (4), (5) зводиться до методу послідовних наближень (10) розв'язання інтегрального рівняння

$$\nu(t) = (L\nu)(t) + h(t) + \mu(B\nu)(t).$$

Використавши відомі результати з теорії ітераційних методів [9], можна сформулювати достатні умови збіжності методу (4), (5), який застосовується до перевизначеної задачі (1), (2).

Теорема 2.1 *Якщо $q_1 = q + \mu b < 1$ і задача (1), (2) сумісна, то вона має єдиний розв'язок $x^*(t)$ і послідовність $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, побудована за формулами (4),(5), збігається за нормою до цього розв'язку, причому*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_j^k = 0,\ j = \overline{1,l}.$$

Тут q і b — сталі з нерівностей:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} L(t,\tau)u(\tau)d\tau \right]^2 dt \le q \int_{-\pi}^{\pi} u^2(t)dt,$$

$$\| Bu - B\nu \| \le b \| u - \nu \|,$$

для довільних $u, \nu \in L_2[-\pi,\pi]$.

Зауваження 2.1 Якщо ж задача (1), (2) несумісна, але виконується нерівність $q_1 = q + \mu b < 1$, то

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_j^k = \lambda_j^* \ne 0,\ j = \overline{1,l},$$

і тоді, якщо до лівої частини (1) додати елемент $\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* \xi_j(t)$, то задача (1), (2) стає сумісною.

Для лінійної задачі

$$(Ax)(t) = f(t), \quad \Phi(x) = \alpha, \ \alpha \in R^l, \tag{11}$$

наближені розв'язки, згідно з ітераційним методом, будемо знаходити із задачі

$$x_k(t) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^k (R\xi_j)(t) = u_k(t), \ \int_{-\pi}^{\pi} \eta_s(t) x_k(t) dt = \alpha_s, s = \overline{1,l}, \tag{12}$$

де
$$u_k(t) = x_{k-1}(t) + R[f - Ax_{k-1}](t). \tag{13}$$

Цей ітераційний процес зводиться до методу послідовних наближень розв'язування інтегрального рівняння

$$\nu(t) = (L\nu)(t) + h(t), \quad \nu(t) = (Qu)(t).$$

В цьому випадку теорему 2.1 можна уточнити.

Теорема 2.2 *Якщо спектральний радіус $\rho(L) < 1$ і задача (11) сумісна, то вона має єдиний розв'язок $x^*(t)$ і послідовність $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, побудована за формулами (12), (13), збігається за нормою до цього розв'язку, причому*

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_j^k = 0, \ j = \overline{1,l}.$$

Зауваження 2.2 Якщо задача (11) несумісна, але виконується нерівність $\rho(L) < 1$, то

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_j^k = \lambda_j^* \neq 0, \ j = \overline{1,l},$$

і тоді, якщо до лівої частини рівняння $(Ax)(t) = f(t)$ додати елемент $\sum\limits_{j=1}^{l} \lambda_j^* \xi_j(t)$, то задача (11) стає сумісною.

Організацію обчислень за алгоритмом (4), (5) зручно проводити, користуючись наступною обчислювальною схемою.

Обчислюємо допоміжні функції:

— будуємо систему функцій

$$\zeta_j(t) = (R\xi_j)(t), \ j = \overline{1,l},$$

— будуємо матрицю D, елементи якої обчислюються за формулою

$$d_{sj} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \eta_s(t)\zeta_j(t)dt, s,\ j = \overline{1,l},$$

— знаходимо матрицю D^{-1}, обернену до матриці D.

Нехай початкове наближення $u_0(t)$ задано, тоді $x_0(t), \lambda_j^0$ знаходяться із задачі (4) за умови, що $k = 0$. Після цього наближення знаходимо за рекурентними формулами. Нехай наближення $x_{k-1}(t)$ знайдено, тоді:

— знаходимо нев'язку

$$z_k(t) = f(t) - (Ax_{k-1})(t) + \mu(Fx_{k-1})(t);$$

— обчислюємо

$$\varepsilon_k(t) = (Rz_k)(t),$$

$$u_k(t) = x_{k-1}(t) + \varepsilon_k(t);$$

— будуємо вектори $g_k = \{g_1^k, g_2^k, \ldots, g_l^k\},\ \beta_k = \{\beta_1^k, \beta_2^k, \ldots, \beta_l^k\}$ координати яких обчислюються відповідно за формулами

$$g_s^k = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \eta_s(t)u_k(t)dt,$$

$$\beta_s^k = g_s^k - \alpha_s,\ s = \overline{1,l};$$

— знаходимо вектор $\lambda_k = D^{-1}\beta_k$;

— складаємо функцію

$$r_k(t) = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^k \zeta_j(t);$$

— отримуємо k-те наближення

$$x_k(t) = u_k(t) - r_k(t).$$

Безпосередньою підстановкою встановлюється рівносильність запропонованої обчислювальної схеми алгоритму (4), (5).

[1] *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 319 с.

[2] *Лучка А.Ю.* Методи розв'язання рівнянь з обмеженнями і проекційно-ітеративний метод Ю.Д. Соколова // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 11. — С. 1501–1509.

[3] *Лучка А.Ю.* Методи дослідження систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 2. — С. 189–194.

[4] *Поліщук О.Б.* Методи розв'язання лінійних сингулярних інтегральних рівнянь з параметрами // Доп. НАН України. — 1998. — № 1. — С. 48–52.

[5] *Поліщук О.Б.* Модифікований проекційно-ітеративний метод розв'язання сингулярного інтегрального рівняння з параметрами та з малою нелінійністю // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 3. — С. 418–422.

[6] *Лучка А.Ю., Ферук В.А.* Модифікований проекційно-ітеративний метод для систем квазілінійних диференціальних рівнянь із запізненням та обмеженням // Нелінійні коливання. — 2004. — **7**, № 2. — С. 188–207.

[7] *Поліщук О.Б.* Умови сумісності задачі з обмеженнями для сингулярних інтегральних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2000. — **3**, № 4. — С. 511–514.

[8] *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977. — 640 с.

[9] *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональний анализ. — М.: Наука, 1984. — 752 с.