Збірник праць Інституту математики НАН України    2013, т. 10, № 3, 191–200

УДК 531.383-62:50

# Дослідження двох зв'язаних керованих осциляторів *

***О.В. Тетерятник***

*Інститут математики НАН України, Київ;*
*e.teteryatnik@gmail.com*

В данной работе изложены результаты исследования двух связанных управляемых осцилляторов, модель которых представлена системой дифференциальных уравнений. Найдены соотношения, позволяющие упростить процесс решения задачи управления, а также рассмотрены разные способы решения задачи оптимального управления.

The present paper presents results of study of two coupled controlled oscillators whose model is a system of differential equations. The relations which make it possible to simplify solving the control problem are established. Different solution methods of the optimal control problem are considered.

**Вступ.** Останнім часом підвищився інтерес до вивчення рівнянь руху керованих зв'язаних осциляторів [1–3]. Аналогічні рівняння виникають при моделюванні різноманітних гіроскопічних систем [4]. Дана робота присвячена дослідженню таких осциляторів, знайдені співвідношення, які спрощують процес розв'язання задачі керування та розглянуті різні способи побудови оптимального керування.

## 1 Зведення системи двох керованих осциляторів до керованої майже консервативної системи

Розглянемо таку систему двох зв'язаних повністю керованих осциляторів [5]:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 &= \varepsilon(a_{11}\dot{q}_1 + b_{11}q_1 + a_{12}\dot{q}_2 + b_{12}q_2 + c_1u_1), \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 &= \varepsilon(a_{21}\dot{q}_1 + b_{21}q_1 + a_{22}\dot{q}_2 + b_{22}q_2 + c_2u_2), \end{aligned} \tag{1}$$

* Робота виконана за частковою підтримкою НДР № 0112U001015

де $q_i$ — узагальнені координати, $a_{ii}, b_{ii}, w_i, c_i$ — сталі коефіцієнти, $u_i$ — керування, $i = \overline{1,2}$, $\varepsilon$ — малий параметр. Подамо систему (1) у матричному вигляді

$$\ddot{q} + W^2 q = \varepsilon(A\dot{q} + Bq + Cu), \tag{2}$$

де

$$W = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 2}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 2}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 2},$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 2}, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 1}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 1}.$$

Система (2) з точки зору теорії гіроскопічних (механічних) систем знаходиться під дією потенційних сил, які характеризуються симетричною матрицею $W^2$. Також на неї додатково діють малі $(0 \leq \varepsilon \ll 1)$ гіроскопічні, дисипативні, потенційні та неконсервативні сили, які відповідно характеризуються матрицями [4]

$$H_0 = \frac{A - A^T}{2}, \ B_0 = \frac{A + A^T}{2}, \ C_0 = \frac{B + B^T}{2}, \ P_0 = \frac{B - B^T}{2}. \tag{3}$$

Малий параметр $\varepsilon$ в гіроскопічних системах залежить від кутової швидкості обертання Землі $U \approx 7,29\cdot 10^{-5} 1/c$, яка є малою порівняно з кутовою швидкістю $\omega > 1/c$ обертання роторів гіроскопів: $\varepsilon = \dfrac{U}{\omega} \ll 1$.

Зведемо систему (2) до форми Коші заміною

$$x_1 = Kq, \quad x_2 = M\dot{q}, \tag{4}$$

де $K, M \in \mathbb{R}_{2\times 2}, \quad detK \neq 0, \quad detM \neq 0$.

Після виконання перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = KM^{-1}x_2, \\ &\dot{x}_2 = -MW^2K^{-1}x_1 + \varepsilon(MBK^{-1}x_1 + MAM^{-1}x_2) + \varepsilon MCu. \end{aligned} \tag{5}$$

Систему (5) запишемо у компактному вигляді

$$\dot{x} = (F_0 + \varepsilon F_1)x + \varepsilon C_1 u, \tag{6}$$

де

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{4\times 1}, \quad F_0 = \begin{bmatrix} 0 & KM^{-1} \\ -MW^2K^{-1} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{4\times 4},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ MBK^{-1} & MAM^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{4\times4}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ MC \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{4\times1}.$$

Для того, щоб система (6) була майже консервативною [6, 7], матриця $F_0$ повинна бути кососиметричною та невиродженою, тобто задовольняти умову $F_0 = -F_0^T$ [8]. В нашому випадку ця умова матиме такий вигляд:

$$\begin{bmatrix} 0 & KM^{-1} \\ -MW^2K^{-1} & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -(MW^2K^{-1})^T \\ (KM^{-1})^T & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Звідси

$$KM^{-1} = (MW^2K^{-1})^T. \tag{8}$$

Розв'яжемо дане рівняння (8) відносно K:

$$KM^{-1} = K^{-T}W^{2T}M^T, \tag{9}$$

де

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{bmatrix}.$$

Оскільки $W$ — симетрична матриця, то $W^{2T} = W^2$. Тоді

$$KM^{-1} = K^{-T}W^2M^T,$$

$$K^TK = W^2M^TM, \tag{10}$$

$$K^TK = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^2 + k_{21}^2 & k_{11}k_{12} + k_{21}k_{22} \\ k_{11}k_{12} + k_{21}k_{22} & k_{12}^2 + k_{22}^2 \end{bmatrix},$$

$$M^TM = \begin{bmatrix} m_{11}^2 + m_{21}^2 & m_{11}m_{12} + m_{21}m_{22} \\ m_{11}m_{12} + m_{21}m_{22} & m_{12}^2 + m_{22}^2 \end{bmatrix},$$

$$W^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, система (10) буде мати вигляд

$$\begin{bmatrix} k_{11}^2 + k_{21}^2 & k_{11}k_{12} + k_{21}k_{22} \\ k_{11}k_{12} + k_{21}k_{22} & k_{12}^2 + k_{22}^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (m_{11}^2 + m_{21}^2)\omega_1^2 & (m_{11}m_{12} + m_{21}m_{22})\omega_1^2 \\ (m_{11}m_{12} + m_{21}m_{22})\omega_2^2 & (m_{12}^2 + m_{22}^2)\omega_2^2 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Оскільки матриця $W$ діагональна, то і матриці $K$ і $M$ також виберемо діагональними. Тоді

$$\begin{bmatrix} k_{11}^2 & 0 \\ 0 & k_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}^2\omega_1^2 & 0 \\ 0 & m_{22}^2\omega_2^2 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Звідси

$$k_{11} = m_{11}\omega_1, \quad k_{22} = m_{22}\omega_2. \tag{13}$$

Отже, після заміни

$$x_1 = MWq, \quad x_2 = M\dot{q}, \tag{14}$$

де

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{bmatrix},$$

система (6) двох зв'язаних осциляторів набуде вигляду

$$\dot{x} = (F_0 + \varepsilon F_1)x + \varepsilon C_1 u, \tag{15}$$

де

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & W \\ -W & 0 \end{bmatrix}, \; F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ MBW^{-1}M^{-1} & MAM^{-1} \end{bmatrix}, \; C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ MC \end{bmatrix}, \tag{16}$$

або

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{b_{11}}{\omega_1} & \dfrac{m_{11}b_{12}}{m_{22}\omega_2} & a_{11} & \dfrac{m_{11}a_{12}}{m_{22}} \\ \dfrac{m_{22}b_{21}}{m_{11}\omega_1} & \dfrac{b_{22}}{\omega_2} & \dfrac{m_{22}a_{21}}{m_{11}} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ m_{11}c_1 & 0 \\ 0 & m_{22}c_2 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Отже, систему двох зв'язаних керованих осциляторів (1) зведено до моделі керованої майже консервативної системи (15).

## 2 Перший спосіб побудови оптимального керування

Розглянемо задачу керування системою (15) з матрицями коефіцієнтів (16), (17).

Введемо квадратичний критерій якості

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt, \tag{18}$$

де

$$0 \le Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{4\times4},\ 0 < R \in \mathbb{R}_{2\times2},\ Q_{ij} \in \mathbb{R}_{2\times2},\ i,j = \overline{1,2}.$$

Розв'язком задачі оптимального керування системою (15) з критерієм (18) є (див., наприклад, [9, 10])

$$u = -\varepsilon R^{-1} C_1^T S x, \tag{19}$$

де стала симетрична додатно визначена матриця $S \in \mathbb{R}_{4\times4}$ задовольняє матричне алгебраїчне рівняння Ріккаті

$$S(F_0 + \varepsilon F_1) + (F_0 + \varepsilon F_1)^T S - \varepsilon^2 S C_1 R^{-1} C_1^T S + Q = 0. \tag{20}$$

Заміна $P = \varepsilon S$ [11] зводить останні два співвідношення до вигляду, притаманному задачі слабкого керування:

$$u = -R^{-1} C_1^T P x, \tag{21}$$

$$P(F_0 + \varepsilon F_1) + (F_0 + \varepsilon F_1)^T P - \varepsilon P C_1 R^{-1} C_1^T P + \varepsilon Q = 0, \tag{22}$$

де $P$ — симетрична додатно визначена матриця.

Отже, задача побудови керування двома зв'язаними осциляторами зводиться до розв'язку рівняння Ріккаті спеціального вигляду (22), яке можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} &P_{12}(-W + \varepsilon M B W^{-1} M^{-1}) + (-W + \varepsilon M^{-1} W^{-1} B^T M) P_{12}^T - \\ &\qquad - \varepsilon P_{12} M C R^{-1} C M P_{12}^T + \varepsilon Q_{11} = 0, \\ &P_{12}^T W + \varepsilon P_{22} M A M^{-1} + W P_{12} + \varepsilon M^{-1} A^T M P_{22} - \\ &\qquad - \varepsilon P_{22} M C R^{-1} C M P_{22} + \varepsilon Q_{22} = 0, \\ &P_{11} W + \varepsilon P_{12} M A M^{-1} + (-W + \varepsilon M^{-1} W^{-1} B^T M) P_{22}^T - \\ &\qquad - \varepsilon P_{12} M C R^{-1} C M P_{22} + \varepsilon Q_{12} = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Тут враховано, що матриці четвертого порядку $P$ та $Q$ записані у блочній формі

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}, \tag{24}$$

де $P_{11}, P_{12}, P_{22}, Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}$ — матриці другого порядку.

Шукатимемо компоненти $P_{ij}$ матриці-розв'язку $P$ у вигляді рядів за степенями $\varepsilon$

$$P_{ij} = P_{ij}^0 + \varepsilon P_{ij}^1 + \varepsilon^2 P_{ij}^2 + ... \tag{25}$$

Після підстановки (25) в (23) з першого рівняння маємо

$$P_{12}^0 W = -(P_{12}^0 W)^T,$$

тобто матриця $P_{12}^0 W = \Omega$ — довільна кососиметрична. Виберемо найпростійший випадок $\Omega \equiv 0$, тоді $P_{12}^0 = 0$ і також

$$P_{12}^1 W + W (P_{12}^1)^T = Q_{11}. \tag{26}$$

Оскільки $Q_{11}$ — симетрична матриця, то будемо шукати розв'язок останнього рівняння в класі симетричних матриц $P_{12}^1 = (P_{12}^1)^T$. Тоді матимемо такий вираз для другого рівняння Ріккаті з (23):

$$\varepsilon P_{22} MAM^{-1} + \varepsilon M^{-1} A^T M P_{22} - \varepsilon P_{22} MCR^{-1} CMP_{22} + \varepsilon Q_{11} + \varepsilon Q_{22} = 0,$$

$$P_{22} MAM^{-1} + M^{-1} A^T M P_{22} - P_{22} MCR^{-1} CMP_{22} + Q_{11} + Q_{22} = 0. \tag{27}$$

Розв'яжемо рівняння (27) відносно $P_{22}$, враховуючи, що $R = \mathrm{diag}\{r_1, r_2\}$, та структуру матриці $P$ [7]. Нехай $P_{22} = \mathrm{diag}\{p_1, p_2\}$, а $Q_{11} + Q_{22} = \mathrm{diag}\{q_{11}, q_{22}\}$; тоді

$$p_i = \frac{a_{ii} r_i}{m_{ii}^2 c_i^2} + \sqrt{\frac{a_{ii}^2 r_i^2}{m_{ii}^4 c_i^4} + \frac{q_{ii} r_i}{m_{ii}^2 c_i^2}}, \tag{28}$$

де $i = \overline{1,2}$.

Таким чином,

$$P_{22} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{11} r_1}{m_{11}^2 c_1^2} + \sqrt{\dfrac{a_{11}^2 r_1^2}{m_{11}^4 c_1^4} + \dfrac{q_{11} r_1}{m_{11}^2 c_1^2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{a_{22} r_2}{m_{22}^2 c_2^2} + \sqrt{\dfrac{a_{22}^2 r_2^2}{m_{22}^4 c_2^4} + \dfrac{q_{22} r_2}{m_{22}^2 c_2^2}} \end{bmatrix}. \tag{29}$$

З третього рівняння системи (23) неважко знайти, що $P_{11} = P_{22}$. Остаточно отримаємо

$$P = \operatorname{diag}\{p_1, p_2, p_1, p_2\}, \tag{30}$$

де

$$p_i = \frac{a_{ii} r_i}{m_{ii}^2 c_i^2} + \sqrt{\frac{a_{ii}^2 r_i^2}{m_{ii}^4 c_i^4} + \frac{q_{ii} r_i}{m_{ii}^2 c_i^2}}.$$

## 3 Другий спосіб побудови оптимального керування

Задачу оптимального керування можна розв'язати також наступним чином. За допомогою заміни з матрицею перестановок [12]

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

зведемо систему (15)–(17) до вигляду

$$\dot{\widetilde{q}} = (\widetilde{F_0} + \varepsilon \widetilde{F_1})\widetilde{q} + \varepsilon \widetilde{C} u, \tag{32}$$

де

$$\widetilde{F_0} = L F_0 L^T = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{F_1} = L F_1 L^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{b_{11}}{\omega_1} & a_{11} & \dfrac{m_{11} b_{12}}{m_{22}\omega_2} & \dfrac{m_{11} a_{12}}{m_{22}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{m_{22} b_{21}}{m_{11}\omega_1} & \dfrac{m_{22} a_{21}}{m_{11}} & \dfrac{b_{22}}{\omega_2} & a_{22} \end{bmatrix}, \tag{33}$$

$$\widetilde{C} = L C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_{11} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & m_{22} c_2 \end{bmatrix}.$$

Аналогічно до попереднього розв'язку, вводимо критерій якості (18) та, використовуючи заміну [11] $P = \varepsilon S$, зводимо задачу оптимального керування системою (19), (20) до задачі слабкого керування (21), (22). Отримаємо керування

$$u = -R^{-1}\widetilde{C}^T P x, \tag{34}$$

де $P$ — симетрична додатно визначена матриця, що задовольняє рівняння

$$P(\widetilde{F_0} + \varepsilon\widetilde{F_1}) + (\widetilde{F_0} + \varepsilon\widetilde{F_1})^T P - \varepsilon P\widetilde{C}R^{-1}\widetilde{C}^T P + \varepsilon Q = 0, \tag{35}$$

Матрицю-розв'язок $P$ будемо шукати у вигляді розкладу за малим параметром

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots\ . \tag{36}$$

Підставимо вираз матриці $P$ в (36) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях $\varepsilon$, отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь типу Ріккаті:

$$\begin{aligned}
&P_0\widetilde{F_0} + \widetilde{F_0}^T P_0 = 0,\\
&P_1\widetilde{F_0} + P_0\widetilde{F_1} + \widetilde{F_0}^T P_1 + \widetilde{F_1}^T P_0 - P_0\widetilde{C}R^{-1}\widetilde{C}^T P_0 + Q = 0,\\
&P_2\widetilde{F_0} + P_1\widetilde{F_1} + \widetilde{F_0}^T P_2 + \widetilde{F_1}^T P_1 + P_0\widetilde{C}R^{-1}\widetilde{C}^T P_1 - P_1\widetilde{C}R^{-1}\widetilde{C}^T P_0 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{37}$$

Перше рівняння системи (37) показує, що нульове наближення матриці $P$ комутує з кососиметричною матрицею $A_0$. Таких комутаторів нескінченна множина, але інші рівняння дозволяють знайти шукану конкретну симетричну додатно визначену матрицю. Розглянемо друге рівняння системи (врахуємо, що $F_0$ — кососиметрична матриця) та перетворимо його до зручного вигляду

$$\widetilde{F_0}P_1 - P_1\widetilde{F_0} = P_0\widetilde{F_1} + \widetilde{F_1}^T P_0 - P_0\widetilde{C}R^{-1}\widetilde{C}^T P_0 + Q. \tag{38}$$

Розв'язок будемо шукати у блочному вигляді, тому введемо нові позначення. Нехай

$$\widetilde{F_0}P_1 - P_1\widetilde{F_0} = D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12}^T & D_{22} \end{bmatrix}, P_0 = N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix}, \tag{39}$$

$$\widetilde{F_1} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \widetilde{C}R^{-1}\widetilde{C}^T = V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12}^T & V_{22} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}.$$

Тоді рівняння (38) набуде вигляду

$$D = NF_1 + F_1^T N - NVN + Q. \tag{40}$$

Розглянемо діагональні блоки $D_{ii}$ $(i = \overline{1,2})$ матриці $D_1$ та відповідні рівняння

$$D_{ii} = N_i F_{ii} + F_{ii}^T N_i - N_i V_{ii} N_i + Q_{ii}. \tag{41}$$

Оскільки $F_0$ не має кратних власних значень, то (41) набуде вигляду

$$D_{ii} = c \begin{bmatrix} 2f_1 & f_2 + f_3 \\ f_2 + f_3 & 2f_4 \end{bmatrix}_{ii} - c^2 \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_4 \end{bmatrix}_{ii} + \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_4 \end{bmatrix}_{ii}, \tag{42}$$

де

$$D_{ii} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_2 & d_4 \end{bmatrix}_{ii}, F_{ii} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_4 \end{bmatrix}_{ii}, N_i = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}_{i}, V_{ii} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_4 \end{bmatrix}_{ii},$$

$$Q_{ii} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_4 \end{bmatrix}_{ii}, \; i = \overline{1,2}.$$

Враховуючи обмеження на $D_{ii}$ $(d_1 + d_4 = 0)$, отримаємо діагональні елементи невідомої матриці $N_i$ з рівняння (42),

$$d = \frac{(f_1 + f_4) + \sqrt{(f_1 + f_4)^2 + (v_1 + v_4)(q_1 + q_4)}}{v_1 + v_4}. \tag{43}$$

З урахуванням (33) маємо

$$d_i = \frac{a_{ii} r_i}{m_{ii}^2 c_i^2} + \sqrt{\frac{a_{ii}^2 r_i^2}{m_{ii}^4 c_i^4} + \frac{r_i (q_1 + q_4)}{m_{ii}^2 c_i^2}}. \tag{44}$$

Отже, матриця-розв'язок $P$ буде мати вигляд

$$P_0 = \operatorname{diag}\{d_1, d_1, d_2, d_2\}. \tag{45}$$

Очевидно, що матриця (45) співпадає з матрицею (30) після перестановки її діагональних елементів. Це тому, що ми використовували матрицю перестановок $L$ (31). Зробимо зворотну заміну і отримаємо

$$P = \operatorname{diag}\{p_1, p_2, p_1, p_2\}, \tag{46}$$

де

$$p_i = \frac{a_{ii} r_i}{m_{ii}^2 c_i^2} + \sqrt{\frac{a_{ii}^2 r_i^2}{m_{ii}^4 c_i^4} + \frac{q_{ii} r_i}{m_{ii}^2 c_i^2}}.$$

Тут враховано, що $q_{ii} = (q_1 + q_4)_{ii}$.


[1] *Князь І.О.* Керування хаотичною поведінкою системи зв'язаних осциляторів з метою стабілізації просторово-однорідних станів / Вісник Сумського держ. унів-ту. Серія технічні науки. — 2009. — № 2. — С. 100–104.

[2] *Князь І.О., Сайко І.І.* Синхронізація у системі нелінійних осциляторів зі зворотним зв'язком // Вісник Львівського унів-ту. Серія фізична. — Випуск 46. — 2011. — С. 71–82.

[3] *Яценко В.О., Кочкодан О.І.* Моделювання і керування показниками Ляпунова у гратці зв'язаних осциляторів // Наукові записки НаУКМА. — 2012. — Т. 126: Фізико-матем. науки. — С. 28–33.

[4] *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. — М.: Наука, 1974. — 344 с.

[5] *Попович О.В.* Асимптотична поведінка та біфуркації розв'язків ланцюгів зв'язаних осциляторів // Автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. — 18 с.

[6] *Новицький В.В.* Керування гіроскопічними системами та інші задачі аналітичної механіки // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2008. — Т. 78. — 124 с.

[7] *Новицький В.В.* Рівняння Ляпунова для майже консервативних систем. — Київ, 2004. — 33 с. — (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 2004.7).

[8] *Ланкастер П.* Теория матриц.— М.: Наука, 1978. — 280 с.

[9] *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1985. — 424 с.

[10] *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1976. — 672 с.

[11] *Ларин В.Б.* О слабом управлении слабодемпфированными системами // ПММ. — 1978. — **42**, випуск 6. — С. 1000–1006.

[12] *Зінчук М.О., Новицький В.В.* Оптимальне керування неперервними майже консервативними системами // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — **3**, № 1. — С. 75–89.