

## Определение свободных колебаний жидкости в резервуарах сложной геометрии \*

*В.А. Троценко, Ю.В. Троценко*

*Институт математики НАН Украины, Киев; trots@imath.kiev.ua*

Розвинуто варіаційний метод побудови наближеного розв'язку спектральної задачі, що описує вільні коливання ідеальної рідини в резервуарах складної геометрії, яка поставлена з позицій методу спряження. Побудовано узагальнений функціонал для якого умови спряження на суміжній границі підобластей, що введені, є природними граничними умовами. Побудова розв'язків еквівалентної варіаційної задачі базується на основі методу Треффта.

A variational method for constructing an approximate solution of spectral problem describing the natural liquid sloshing in the complex shape tanks is developed based on the domain decomposition method. A generalized functional is constructed whose extrema and saddle points imply all transmission conditions. The Trefftz method is employed to find the approximate solution.

Решение многих задач механики сплошной среды для сложных областей зачастую может быть существенно упрощено, если область разбить на отдельные подобласти, вводя на поверхности раздела соответствующие условия сопряжения. Построение приближенных решений задач в такой постановке имеет определенные трудности, которые связаны, в первую очередь, с выполнением граничных условий сопряжения на смежных границах введенных подобластей. Если подобласти имеют каноническую форму (их границы совпадают с координатными поверхностями одной из систем координат), то использование метода Фурье для сопряжения решений в подобластях можно свести к решению бесконечных систем алгебраических уравнений [1].

---

\* Работа выполнена при частичной поддержке НИР № 0112U001015

Для составных областей решения граничных задач могут быть также получены при помощи итерационного метода Шварца [2].

Значительное внимание в литературе уделяется формулировке различных обобщенных вариационных принципов для решения задач сопряжения, которые связаны преимущественно с разработкой тех или иных модификаций метода конечных элементов. Среди этих исследований особо можно выделить работы, посвященные формулировке вариационных принципов теории упругости и теории оболочек при разрывных полях перемещений, напряжений и деформаций [3] – [6].

Для определения частот и присоединенных масс идеальной жидкости в подвижных полостях твердого тела в работе [7] предложен метод решения соответствующих граничных задач, основанный на разбиении области определения потенциала скоростей жидкости на подобласти с формулировкой на смежной поверхности введенных подобластей упрощенных условий сопряжения. Расчеты, приведенные в монографии [7], подтверждают эффективность такого подхода к решению задач сопряжения при нахождении интегральных характеристик от потенциала скоростей жидкости.

Одна модификация вариационного метода для решения задач сопряжения при определении собственных колебаний жидкости в сосуде сложной геометрической формы изложена в работе [8].

Развитию метода сопряжения решений применительно к неклассическим граничным задачам теории движения твердых тел с полостями, которые содержат конструктивные устройства в виде ребер-перегородок, посвящена монография [9]. Эффективность предложенных алгоритмов расчета динамических характеристик жидкости в рассматриваемых полостях обусловлена в первую очередь тем, что при построении решений краевых задач учитывались особенности в искомых решениях на кромках перегородок.

В данной статье развивается вариационный метод решения спектральной задачи о свободных колебаниях идеальной жидкости в резервуарах сложной геометрической формы, поставленной с позиций задач сопряжения. Построен функционал, при помощи которого можно избежать затруднений, возникающих при удовлетворении условиям непрерывности функций и их нормальных производных на смежной границе между введенными подобластями. Для нахождения стационарных значений этого функционала используется метод Трэфтца при независимом варьировании искомых функций в подобластях. На

конкретном примере показана эффективность предложенного алгоритма решения рассматриваемой задачи.

Задача о линейных собственных колебаниях идеальной и несжимаемой жидкости в неподвижном резервуаре относительно потенциала смещений  $\Phi(x, y, z)$  имеет вид [7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (x, y, z) \in Q, \\ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \varkappa \Phi \right) \Big|_{\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \Big|_S = 0, \quad \int_{\Sigma} \Phi dS = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Sigma$  — невозмущенная свободная поверхность жидкости,  $S$  — смачиваемая поверхность резервуара,  $Q$  — область, ограниченная поверхностью  $\Sigma \cup S$ ,  $\vec{\nu}$  — орт внешней нормали к поверхностям  $\Sigma$  и  $S$ ,  $\varkappa$  — частотный параметр, который подлежит определению.

Пусть резервуар имеет форму тела вращения. Ось  $Oz$  декартовой системы координат  $Oxyz$  совместим с осью симметрии емкости и направим ее в сторону свободной поверхности  $\Sigma$ . Введем цилиндрическую систему координат  $Ox\eta z$

$$x = r \cos \eta, \quad y = r \sin \eta, \quad z = z. \quad (2)$$

В дальнейшем будем рассматривать антисимметричные колебания жидкости в плоскости  $Oyz$ . С учетом осевой симметрии резервуара представим функцию  $\Phi(x, y, z)$  в следующем виде

$$\Phi(x, y, z) = \psi(r, z) \sin \eta. \quad (3)$$

Тогда для составляющей потенциала смещений  $\psi(r, z)$  получим следующую спектральную задачу в области  $G$  меридионального сечения сосуда:

$$\begin{aligned} M(\psi) = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \psi = 0, \quad (z, r) \in G, \\ \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - \varkappa \psi \right) \Big|_{L_0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \Big|_L = 0, \quad \psi(0, z) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $L_0$  и  $L$  — линии пересечения меридионального сечения сосуда с поверхностями  $\Sigma$  и  $S$  соответственно.

Однородная краевая задача (4) с параметром  $\varkappa$  в граничном условии эквивалентна вариационной задаче для функционала [7]:

$$I = \int_G r \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \psi^2 \right] dG - \varkappa \int_{L_0} r \psi^2 ds \quad (5)$$

на классе функций, интегрируемых с квадратом вместе и их первыми производными и подчиненных последнему граничному условию из (4). Стационарные значения функционала (5) достигаются на собственных значениях и функциях задачи (4).

На основе вариационной формулировки задачи (4) и метода Трефтца ранее был решен широкий класс задач по определению частот и форм собственных колебаний жидкости в осесимметричных резервуарах [7], [10]. Однако, для удлиненных вдоль оси  $Oz$  емкостей, у которых радиус свободной поверхности жидкости намного меньше продольного размера сосуда, сходимость метода Трефтца существенно замедляется, что приводит к необходимости проведения большого числа вычислений. Для рассматриваемого класса резервуаров решение задачи (4) может быть эффективно построено, если исходить при этом с позиций задач сопряжения.

Разобьем область  $G$  линией  $\gamma$  на две подобласти  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$ : область  $G^{(1)}$  ограничена осью  $Oz$ , линиями  $L_0$ ,  $L^{(1)}$  и  $\gamma$ , а область  $G^{(2)}$  — соответственно осью  $Oz$  и линиями  $L^{(2)}$  и  $\gamma$ . Здесь  $L^{(1)}$  и  $L^{(2)}$  — линии пересечения меридионального сечения резервуара со смачиваемыми границами областей  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$  соответственно. Обозначим решения исходной задачи (4) в подобластях  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$  через  $\psi^{(1)}$  и  $\psi^{(2)}$ . В дальнейшем верхний индекс во всех встречающихся функциях будет обозначать номер области, в которой эти функции определены. При этом, для функций  $\psi^{(1)}$  и  $\psi^{(2)}$ , а также их производных на смежной линии  $\gamma$  подобластей  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$ , должны выполняться условия сопряжения

$$\left( \psi^{(1)} = \psi^{(2)} \right) \Big|_{\gamma}, \quad \left( \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} = - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right) \Big|_{\gamma}, \quad (6)$$

где  $\vec{\nu}^{(1)}$  и  $\vec{\nu}^{(2)}$  — орты внешних нормалей к областям  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$  соответственно. Условия (6) фигурируют наравне с граничными условиями исходной задачи.

Для построения приближенного решения сформулированной задачи сопряжения будем использовать вариационный метод, который

для одномерных задач применялся ранее в работах [11], [12]. Заменяя в функционале (5) интеграл по области  $G$  суммой интегралов по областям  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$ , представим его в следующем виде:

$$I = \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} F(\psi^{(i)}) dG^{(i)} - \varkappa \int_{L_0} r(\psi^{(1)})^2 ds, \quad (7)$$

где

$$F(\psi^{(i)}) = r \left[ \left( \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{1}{r} (\psi^{(i)})^2.$$

Вычислим первую вариацию функционала (7), не накладывая никаких ограничений на варьируемые функции, кроме условия на оси  $Oz$ .

Пусть имеем две произвольные функции  $\psi(r, z)$  и  $\varphi(r, z)$ , которые вместе с их первыми производными являются непрерывными функциями в некоторой области  $G$  вплоть до ее границы  $\Gamma$ . Введем в рассмотрение следующий интеграл:

$$K(\psi, \varphi) = \int_G r \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] dG.$$

Преобразуем его при помощи формулы Грина:

$$\begin{aligned} K(\psi, \varphi) &= \int_G \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial z} \varphi \right) \right] dG - \\ &- \int_G \left[ r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + r \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] \varphi dG = \\ &= - \int_G \left[ M(\psi) + \frac{1}{r} \psi \right] \varphi dG + \int_{\Gamma} r \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \varphi ds. \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом формулы (8) и принятых обозначений первую вариацию от функционала (7) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \delta I &= 2 \sum_{k=1}^2 \left[ \int_{L^{(k)}} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \nu^{(k)}} \delta \psi^{(k)} r ds + \int_{\gamma^{(k)}} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \nu^{(k)}} \delta \psi^{(k)} r ds - \right. \\ &- \left. \int_{G^{(k)}} M(\psi^{(k)}) \delta \psi^{(k)} dG^{(k)} \right] + 2 \int_{L_0} \left[ \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} - \varkappa \psi^{(1)} \right] r \delta \psi^{(1)} ds. \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что интегрирование вдоль линии  $\gamma$ , в силу принятого разбиения области  $G$ , выполняется дважды в противоположных направлениях. Поэтому здесь через  $\gamma^{(k)}$  обозначены контуры интегрирования по линии  $\gamma$  со стороны областей  $G^{(k)}$  соответственно.

Приравнявая (9) к нулю, получим вариационное уравнение для определения функций  $\psi^{(k)}(r, z)$  и параметра  $\varkappa$ . Из этого уравнения в силу произвольного варьирования функций  $\psi^{(k)}$  в областях  $G^{(k)}$  и на границах  $L_0$  и  $L^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$  следует, что в пределах каждой из введенных подобластей должны выполняться исходные уравнения и соответствующие граничные условия на контурах  $L_0$  и  $L^{(k)}$ .

Далее, если предположить, что класс допустимых функций подчинен условию

$$(\psi^{(1)} - \psi^{(2)})|_{\gamma} = 0, \tag{10}$$

то второе условие сопряжения (6) будет естественным граничным условием для функционала  $I$ .

Итак, при использовании метода Ритца для решения вариационного уравнения  $\delta I = 0$  аппроксимации для функций  $\psi^{(k)}$  должны выбираться таким образом, чтобы они обеспечивали выполнение условия (10) на контуре  $\gamma$ . В этом случае остальные граничные условия задачи для рассматриваемого функционала будут естественными граничными условиями. Построение координатных функций, удовлетворяющих граничному условию (10), вызывает определенные трудности. В связи с этим возникает проблема построения такого функционала  $F_1$ , для которого все условия сопряжения (6) были бы естественными граничными условиями.

Если рассматривать условие (10) как дополнительное ограничение на задачу нахождения стационарного значения функционала  $I(\psi)$ , то можно воспользоваться методом Лагранжа [13] для построения такого функционала. В соответствии с этим введем в рассмотрение новый функционал  $F_1(\psi, \alpha)$ , который имеет вид

$$F_1(\psi, \alpha) = I(\psi) + \int_{\gamma} \alpha(\psi^{(1)} - \psi^{(2)}) r ds, \tag{11}$$

где  $\alpha(s)$  — неизвестная функция, заданная на контуре  $\gamma$  и подлежащая определению в дальнейшем. Эта функция называется множителем Лагранжа.

Стационарное значение функционала (11) нужно разыскивать при свободном варьировании функций  $\psi^{(k)}$  и  $\alpha$ . Следовательно, введение множителя Лагранжа приводит к увеличению числа неизвестных функций рассматриваемой задачи. Чтобы избежать искусственное повышение числа неизвестных функций исходной задачи, найдем явное выражение для множителя Лагранжа. Тогда, в отличие от работы [14], где искомые функции и множитель Лагранжа находились методом Ритца, после замены функции  $\alpha(s)$  в функционале (11) на тождественно равное ей выражение, можно получить обобщенный функционал относительно функций  $\psi^{(k)}$ . Это позволит существенно упростить алгоритм нахождения приближенного решения вариационной задачи при помощи метода Ритца.

Вычислим первую вариацию функционала (11) и приравняем ее к нулю. С учетом выражения (9) будем иметь

$$\begin{aligned} \delta F_1 = & \sum_{k=1}^2 \left[ \int_{L^{(k)}} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \nu^{(k)}} \delta \psi^{(k)} r ds - \int_{G^{(k)}} M(\psi^{(k)}) \delta \psi^{(k)} dG^{(k)} \right] + \\ & + \int_{L_0} \left( \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} - \alpha \psi^{(1)} \right) \delta \psi^{(1)} r ds + \int_{\gamma} \left( \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} + \frac{\alpha}{2} \right) \delta \psi^{(1)} r ds + \\ & + \int_{\gamma} \left( \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} - \frac{\alpha}{2} \right) \delta \psi^{(2)} r ds + \frac{1}{2} \int_{\gamma} \delta \alpha (\psi^{(1)} - \psi^{(2)}) r ds = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь было учтено, что при изменении направления пути интегрирования на противоположный криволинейный интеграл первого рода не меняется.

При свободном варьировании функций  $\psi^{(k)}$  на границе  $\gamma$  из вариационного уравнения (12) вытекают следующие соотношения:

$$\frac{\alpha}{2} = - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \Big|_{\gamma}; \quad \frac{\alpha}{2} = \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \Big|_{\gamma}. \quad (13)$$

Складывая эти два равенства, получим следующее выражение для множителя Лагранжа:

$$\alpha = \left( \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right) \Big|_{\gamma}. \quad (14)$$

С учетом этого соотношения, обобщенный функционал  $F(\psi^{(1)}, \psi^{(2)})$

принимает вид

$$F(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = I(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) + \int_{\gamma} (\psi^{(1)} - \psi^{(2)}) \left( \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right) r ds. \quad (15)$$

Проводя все рассуждения в обратном порядке, убеждаемся, что уравнениями Эйлера для функционала (15) будут уравнения (4). При этом краевые условия задачи и условия сопряжения (6) для него являются естественными граничными условиями, так как они автоматически выполняются для функций  $\psi^{(k)}$ , доставляющих функционалу  $F$  стационарное значение. Это является важным фактором при решении задач сопряжения вариационным методом.

Полученные результаты позволяют теперь перейти к построению приближенного решения исходной задачи на основе метода Ритца. В связи с этим представим искомые функции в виде следующих отрезков обобщенных рядов:

$$\psi^{(1)}(r, z) = \sum_{j=1}^{m_0} a_j W_j^{(1)}; \quad \psi^{(2)}(r, z) = \sum_{j=1}^{n_0} b_j W_j^{(2)}, \quad (16)$$

где  $a_j, b_j$  — произвольные постоянные,  $\{W_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$  и  $\{W_j^{(2)}\}_{j=1}^{\infty}$  — системы базисных функций для областей  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$ , которые удовлетворяют условию  $M(W_j^{(k)}) = 0, k = 1, 2$ .

Требование того, что системы базисных функций удовлетворяют исходному уравнению, позволяет избавиться от вычисления двойных интегралов по области  $G^{(k)}$  при нахождении коэффициентов алгебраической системы уравнений относительно постоянных  $a_j$  и  $b_j$ .

Коэффициенты разложений (16) определяются из условий стационарности функционала (15):

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b_i} = 0. \quad (17)$$

В итоге, решение исходной задачи сводится к решению обобщенной алгебраической проблемы собственных значений

$$(A - \varkappa B) \vec{X} = 0, \quad \vec{X}^T = \{a_1, a_2, \dots, a_{m_0}, b_1, b_2, \dots, b_{n_0}\}. \quad (18)$$

Формирование элементов  $\alpha_{ij}$  и  $\beta_{ij}$  матриц  $A$  и  $B$  будем осуществлять на основе вариационного уравнения  $\delta F = 0$  с использованием выражения (9). При вычислении  $\partial F/\partial a_i$  в вариации для функционала  $F$  полагаем  $\delta\psi^{(1)} = W_i^{(1)}$ ,  $\delta\psi^{(2)} = 0$ . При нахождении  $\partial F/\partial b_i$  — полагаем  $\delta\psi^{(1)} = 0$ ,  $\delta\psi^{(2)} = W_i^{(2)}$ . В результате будем иметь следующие выражения для элементов  $\alpha_{ij}$  и ненулевых элементов  $\beta_{ij}$ :

$$\alpha_{i,j} = 2 \int_{\Gamma^{(1)}} W_i^{(1)} \frac{\partial W_j^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} r ds - \int_{\gamma} \left( W_i^{(1)} \frac{\partial W_j^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} + W_j^{(1)} \frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right) r ds,$$

$$i, j = 1, 2, \dots, m_0;$$

$$\alpha_{i,j+m_0} = \int_{\gamma} \left( W_i^{(1)} \frac{\partial W_j^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} + W_j^{(2)} \frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right) r ds,$$

$$i = 1, 2, \dots, m_0, j = 1, 2, \dots, n_0;$$

$$\alpha_{i+m_0,j} = \int_{\gamma} \left( W_i^{(2)} \frac{\partial W_j^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} + W_j^{(1)} \frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right) r ds, \quad i, j = 1, 2, \dots, n_0; \quad (19)$$

$$\alpha_{i+m_0,j+m_0} = 2 \int_{\Gamma^{(2)}} W_i^{(2)} \frac{\partial W_j^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} r ds -$$

$$- \int_{\gamma} \left( W_i^{(2)} \frac{\partial W_j^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} + W_j^{(2)} \frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right) r ds, \quad i, j = 1, 2, \dots, n_0;$$

$$\beta_{i,j} = 2 \int_{L_0} W_i^{(1)} W_j^{(1)} r ds, \quad i, j = 1, 2, \dots, m_0.$$

Напомним, что  $\Gamma^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$  — границы областей  $G^{(k)}$  ( $\Gamma^{(1)} = L^{(1)} \cup L_0 \cup \gamma$ ;  $\Gamma^{(2)} = L^{(2)} \cup \gamma$ ). Симметричность матрицы  $A$  вытекает из симметричности оператора исходной задачи. Элементы матриц  $A$  и  $B$  с высокой степенью точности могут быть вычислены при помощи квадратурных формул Гаусса.

Приведем некоторые результаты расчетов частот и форм собственных колебаний жидкости по предлагаемому алгоритму. В качестве примера рассмотрим составной резервуар, который имеет форму прямого кругового цилиндра единичного радиуса и высоты  $h_1$  с днищем в форме полусферы.

Представим функции  $\psi^{(1)}(z, r)$  и  $\psi^{(2)}(z, r)$ , определенные соответственно в областях  $G_1$  и  $G_2$ , в следующем виде:

$$\psi^{(1)} = \sum_{j=1}^{m_0} a_j W_j(z, r), \quad \psi^{(2)} = \sum_{j=1}^{m_0} b_j W_j(z, r). \quad (20)$$

Здесь  $\{W_j(z, r)\}_{j=1}^{\infty}$  – системы базисных функций, удовлетворяющих исходному уравнению (4), условиям полноты и линейной независимости [7]. В полярной системе координат  $R$  и  $\vartheta$  решения этого уравнения можно представить в виде

$$W_j(z, r) = \frac{2(j-1)!}{(j+1)!} R^j P_j^{(1)}(\cos \theta), \quad j \geq 1, \quad R = \sqrt{z^2 + r^2}, \quad (21)$$

где  $P_j^{(1)}(\cos \theta)$  – присоединенные функции Лежандра первого рода. Выражение (21) имеет полиномиальную структуру относительно переменных  $z$  и  $r$ , причем каждый такой полином содержит лишь члены порядка  $j$ .

**Таб. 1:** Сходимость первых пяти собственных значений  $\varkappa_i$  в зависимости от числа приближений  $m_0$  в разложениях (20) при  $h_1 = 0, 5$ .

$m_0$	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	$\varkappa_3$	$\varkappa_4$	$\varkappa_5$
3	1,8121828	64,564223	—	—	—
4	1,7953569	11,490991	—	—	—
5	1,7940169	9,4311417	—	—	—
7	1,7936771	5,3866431	18,359004	—	—
9	1,7936764	5,3345034	9,6682162	89,311516	—
11	1,7936760	5,3312830	8,7332283	21,408005	—
13	1,7936758	5,3311655	8,5423516	12,480581	32,999997
15	1,7936758	5,3311654	8,5366300	11,855002	18,483618
17	1,7936758	5,3311654	8,5363206	11,727027	15,915316
18	1,7936758	5,3311654	8,5363107	11,709809	15,245902
20	1,7936758	5,3311654	8,5363100	11,706243	14,941364
21	1,7936758	5,3311654	8,5363100	11,706032	14,883641
23	1,7936757	5,3311654	8,5363100	11,706005	14,865673

В таблице 1 проиллюстрирована типичная скорость сходимости первых пяти собственных значений краевой задачи (4) в зависимости от количества базисных функций  $m_0$  в представлении (20) при

$h_1 = 0,5$ . Из таблицы видно, что восемь значащих цифр для первых двух собственных значений  $\varkappa_i$  стабилизируются уже при  $m_0 = 15$ . Для достижения такой же точности для  $\varkappa_3, \varkappa_4$  и  $\varkappa_5$  в расчетах следует положить  $m_0 = 27$ . Изменение высоты жидкости сосуда практически не влияет на скорость сходимости последовательных приближений данного алгоритма. Так в таблице 2 для  $h_1 = 0,2$  приведены значения функций  $\psi^{(1)}(z, r)$  и  $\psi^{(2)}(z, r)$ , а также их производных в направлении оси  $Oz$ , которые вычислены на линии сопряжения  $\gamma$  при разных значениях координаты  $r$  и числа приближений  $m_0$  в разложениях (20).

**Таб. 2:** Выполнение условий сопряжения на границе  $\gamma$  для первой формы колебаний при  $h_1 = 0,2$ , в зависимости от числа приближений  $m_0$  в разложениях (20).

$r$	$\psi_1$	$\psi_2$	$\frac{\partial\psi_1}{\partial z}$	$\frac{\partial\psi_2}{\partial z}$
$m_0 = 10$				
0,20	0,30433	0,30305	0,48167	0,49391
0,40	0,57821	0,57810	0,93599	0,93688
0,60	0,79882	0,79961	1,2896	1,2812
0,80	0,94705	0,94628	1,4699	1,4801
1,00	1,0000	1,0024	1,5290	1,4750
$m_0 = 15$				
0,20	0,30260	0,30267	0,49402	0,49352
0,40	0,57739	0,57734	0,93532	0,93561
0,60	0,79851	0,79854	1,2795	1,2794
0,80	0,94508	0,94506	1,4782	1,4782
1,00	1,0000	1,0002	1,4889	1,4746

На рис. 1 для  $h_1 = 0,5$  приведены значения функций  $\psi^{(i)}$  и их производных в направлении оси  $Oz$ , которые вычислены на линии сопряжения  $\gamma$  при различных значениях координаты  $r$  и количества приближений  $m_0$  в разложениях (20) ( $i = 1$  – штриховые линии,  $i = 2$  – сплошные). Как видно из приведенного рисунка, а также из таблицы 2, предложенный алгоритм решения исходной задачи способен обеспечивать (в отличие от алгоритма работы [7]) поточечную сходимость для решений и их нормальных производных на смежной границе  $\gamma$  областей  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$ . Более медленная сходимость решений наблюдается в окрестности точки  $z = 0, r = 1$ . Это объясняется наличием

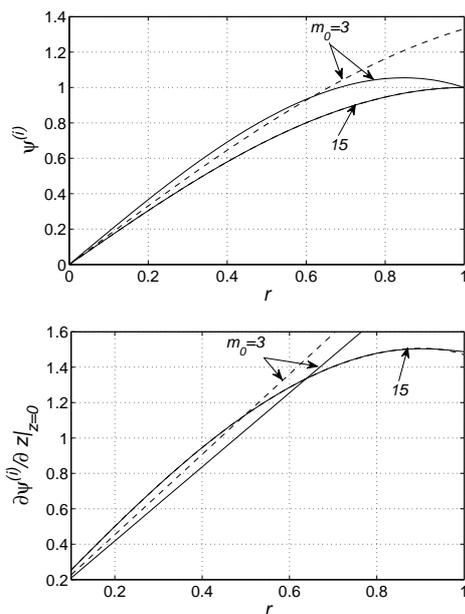


Рис. 1: Изменение функций  $\psi^{(i)}$  и их производных в зависимости от количества приближений  $m_0$  в разложениях (20).

сингулярностей в производных собственных форм колебаний жидкости вдоль контактной линии цилиндрической поверхности и полусферического дна рассматриваемого резервуара. Заметим, что здесь все величины были нормированы таким образом, чтобы выполнялось условие  $\psi^{(1)}(z; 1, 0) = 1, 0$ .

**Выводы.** С позиций метода сопряжения решений предложен приближенный подход решения двумерной спектральной задачи о свободных колебаниях идеальной жидкости в резервуарах, имеющих сложную форму. Этот подход базируется на формулировке обобщенного функционала, для которого условия сопряжения на смежной границе искусственно введенных под областей являются естественными граничными условиями. Это позволяет независимо варьировать решения в этих под областях, что во многих случаях упрощает получение приближенного решения исходной задачи.

- [1] *Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л.* Кручение упругих тел. — М.: Физматгиз, 1963. — 686 с.
- [2] *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. — М.-Л.: Физматгиз, 1962. — 708 с.
- [3] *Прагер В.* Вариационные принципы линейной статической теории упругости при разрывных смещениях, деформациях и напряжениях. // В кн.: *Механика*. — М., 1969. — 5. — С. 139-144.
- [4] *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. — М.: Мир, 1987. — 542 с.
- [5] *Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. — М.: Наука, 1978. — 288 с.
- [6] *Розин Л.А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. — Л.: Изд. Ленингр. университета, 1978. — 223 с.
- [7] *Фещенко С.Ф., Луковский И.А., Рабинович Б.И., Докучаев Л.В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. — Киев: Наук. думка, 1969. — 250 с.
- [8] *Барняк М.Я.* Модифікація варіаційного методу в задачі про власні коливання ідеальної рідини в посудині // Проблеми динаміки та стійкості багатомірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — 2, № 1. — С. 46-63.
- [9] *Троценко В.А.* Колебания жидкости в подвижных полостях с перегородками. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2006. — 320 с.
- [10] *Мижлишев Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — М.: Машиностроение, 1968. — 532 с.
- [11] *Троценко В.А. Троценко Ю.В.* Применение метода Ритца к расчету свободных поперечных колебаний составного стержня // Проблеми динаміки та стійкості багатомірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — 8, № 2. — С. 244-257.
- [12] *Троценко Ю.В.* Колебания упругих конструкций, содержащих подвесные резервуары с жидкостью // Проблеми динаміки та стійкості багатомірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — 8, № 2. — С. 258-275.
- [13] *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. — М.: Гостехиздат, 1951. — Т. 1. — 467 с.
- [14] *Комаренко О.Н, Троценко В.А.* Варіаційний метод розв'язування задач трансмісії з головною умовою спряження // Укр. мат. журн. — 1999. — 51, № 2. — С. 762-775.