

Вариационный метод исследования спектральной задачи о собственных колебаниях жидкости в соосных конических резервуарах *

И.А. Луковский, А.В. Солодун

*Институт математики НАН Украины, Киев;
lukovsky@imath.kiev.ua, solodun@imath.kiev.ua*

Розвинуто варіаційний метод побудови наближеного розв'язку спектральної задачі, що описує вільні коливання ідеальної рідини в резервуарах складної геометрії у вигляді коаксіальних конусів із спільною вершиною. Побудова розв'язків еквівалентної варіаційної задачі базується на основі методу Рітца–Трефтца. Координатними функціями виступають побудовані в спеціальній криволінійній системі координат частинні розв'язки спектральної задачі в розділеному вигляді, які точно задовольняють граничні умови на твердих стінках резервуара. Знайдено власні частоти і форми коливань в розглядуваній порожнині в широкому діапазоні геометричних параметрів.

A variational method for constructing an approximate solution of spectral problem describing the natural sloshing modes of an ideal liquid in tanks of complex shape in the form of co-axial conical geometry with a joint pole is developed. Constructing solutions of an equivalent variational problem is based on the Ritz–Trefftz method. Special functions satisfying the non-slip condition on the rigid walls play the role of a functional basis. The basis is constructed in the curvilinear coordinate system by using the method of separation of spatial variables. Natural sloshing frequencies and modes are constructed for a wide range of the input geometric parameters.

* Работа выполнена при частичной поддержке НИР № 0112U001015, а также проектом № 03-01-12 совместных исследований НАН Украины и СО РАН

1 Введение

При проектировании конструкций, имеющих в своем составе значительные массы жидких грузов, возникает целый комплекс проблем, связанных с их прочностью и устойчивостью. На первый план здесь выступают проблемы определения частот и форм свободных колебаний жидкости, а также сил взаимодействия между стенками баков и жидкостью, играющих важную роль при составлении уравнений движения механической системы в целом и прогнозировании на их основе динамического поведения конструкции при воздействии на нее различных внешних возмущающих факторов (вибрационного, сейсмического и прочего происхождения). Традиционно эти проблемы сопровождают развитие авиационной и ракетно-космической техники. С ними приходится сталкиваться при создании танкеров для транспортировки нефтепродуктов и сжиженных газов, а также при исследовании прочности и устойчивости железнодорожных цистерн.

Первые исследования колебаний жидкости в конических баках были, по-видимому, выполнены в связи с необходимостью определения гидродинамических сил взаимодействия топлива с корпусом жидкостных ракет. Особое внимание при этом уделялось определению основных частот и форм свободных колебаний топлива, представляющих наибольший интерес в плане определения главного вектора и главного момента гидродинамических сил, приложенных к корпусу ракеты.

В последние годы исследования по динамике твердых тел с жидкостью пополнились новыми постановками задач в связи с проектированием новых наземных жидкостно-наполненных механических объектов в виде водонапорных башен, состоящих из цилиндрических резервуаров с коническим дном. Эти исследования направлены на обеспечение их надежного функционирования в экстремальных условиях, и в первую очередь, при возникновении воздействий сейсмического происхождения.

В общем случае не существует точных методов решения задачи о колебаниях жидкости в конических баках. Исключение составляют только отдельные случаи баков в форме “перевернутого” кругового конуса с некоторыми значениями угла полураствора θ_0 . На первый такой случай ($\theta_0 = 45^\circ$, $m = 1$) указал Левин [23] (здесь m обозначает число волн в окружном направлении). Позже в работе [2] были приведены другие случаи, для которых существуют точные решения этой

задачи по определению, как и в работе [23], только основной частоты и формы собственных колебаний жидкости. Как оказалось, эти случаи относятся к семейству баков с углом полураствора $\theta_0 = \arctan(\sqrt{m})$. В книгах [14, 15] упомянутые решения широко используются для независимого контроля численных результатов при определении частот и присоединенных масс жидкости приближенными методами для конических баков, разбитых сплошными радиальными перегородками на независимые отсеки.

Отметим здесь также, что в некоторых случаях удается использовать метод разделения переменных для решения задач о колебаниях жидкости в конических баках, оставаясь при этом в рамках гипотез линейной теории. Ограничиваясь малыми значениями угла конусности, в сферической системе координат соответствующие краевые задачи гидродинамики можно сформулировать при отождествлении плоской невозмущенной поверхности жидкости с мало отличающейся от нее сферической поверхностью как в случае “перевернутого” кругового конуса, так и в случае прямого кругового конуса со сферическим дном. Методом разделения переменных точные решения задачи удается представить через степенные функции и присоединенные функции Лежандра первого и второго рода. Впервые это было сделано Докучаевым [1], а позже Бауером [17]. Об особенностях применения этих результатов в теории движения тел с жидкостью речь идет в работах [1, 2, 14–17] и др. Соответствующие экспериментальные данные приведены в статьях Микишева и Дорожкина [13] и Бауэра [17] и др.

В 70-80-е годы XX-го столетия исследования по теории колебаний жидкости в конических баках снова активизировались в связи с рассмотрением аналогичных задач в нелинейной постановке [3, 6, 8, 18, 21, 25] и др. Для развития модальных методов решения нелинейных задач требовались качественно новые приближенные решения краевых задач линейной теории. Одно весьма обременительное требование, предъявляемое к этим решениям, связано с необходимостью точного выполнения условия неперетекания ($\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$) всюду на твердой стенке бака. Другое важное ограничение связано с необходимостью представления форм колебаний жидкости и производных от них в аналитическом виде. Решения с такими свойствами удастся построить вариационными методами с использованием специальных неконформных отображений, переводящих конические области в цилиндрические в подходящей криволинейной системе коор-

динат [3, 4, 6, 11, 25]. Опыт использования таких решений в задаче о колебаниях жидкости в неусеченных конических баках подтверждает высокую эффективность упомянутых численно-аналитических методов [4, 21].

Целый ряд исследований, относящихся к линейной теории колебаний жидкости в конических баках, выполнен в последние годы в связи с проектированием новых типов водонапорных башен [19, 20, 26, 27] и др. Предложенные здесь приближенные алгоритмы определения собственных частот и форм колебаний опираются, главным образом, на методы конечных и граничных элементов. Они оказались эффективными в этом классе линеаризованных задач, однако их использование в таком виде для решения нелинейных проблем о резонансных взаимодействиях в системе “твердое тело–жидкость” нам представляется проблематичным.

В настоящей работе обсуждается численно-аналитический метод определения частот и форм собственных колебаний жидкости в соосных конических баках, основанных на вариационных формулировках соответствующих краевых задач. В качестве координатных функций в вариационном методе Ритца–Трефтца используются специальные гармонические функции, найденные методом разделения переменных в специальной криволинейной системе координат. Метод численно реализован в широком диапазоне геометрических параметров соосных конусов. Результаты вычислительных экспериментов поданы в виде таблиц и графических зависимостей. Они доставляют полное представление о практической сходимости предложенного метода и границах его применимости. Приближенные решения найдены в аналитическом виде, пригодном для их использования при построении малоразмерных нелинейных модальных систем методами работ [3, 6, 10, 21, 24, 25], включая и случай соосных конических баков, разбитых сплошными радиальными перегородками на независимые отсеки.

2 Постановка задачи

Рассмотрим безвихревые волновые движения идеальной несжимаемой жидкости, частично заполняющей покоящийся абсолютно жёсткий бак, образованный двумя соосными коническими полостями с общей вершиной, как показано на рис. 1. Здесь через угол θ_0 обозначен угол полураствора внешнего конуса, а через θ_1 — внутреннего. Век-

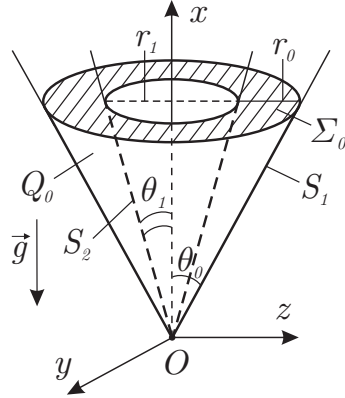


Рис. 1: Гидростатическое положение жидкости в вертикальных круговых соосных конических баках.

тор ускорения сил гравитации \vec{g} направлен вниз вдоль оси конуса. Гидростатическое положение жидкости под действием сил тяжести совпадает с областью Q_0 , изображенной на рисунке. Смачиваемые боковые стенки сосуда S ($S = S_1 \cup S_2$) обозначены через S_1 (внешняя) и через S_2 (внутренняя), а невозмущенная (гидростатическая) свободная поверхность жидкости — через Σ_0 . Начало декартовой системы координат $Oxyz$ размещено в вершине конуса O , причём ось Ox направлена вертикально вверх.

В качестве характерного линейного размера выбран радиус внешнего конуса r_0 . Соотношение δ между радиусом внешнего и внутреннего конуса ($\delta = r_1/r_0 = \tan \theta_1 / \tan \theta_0$) становится геометрической характеристикой бака. В частности, предел $r_1 \rightarrow r_0$ влечёт к нулевому объёму бака, а при $r_1 \rightarrow 0$ бак стремится к простой конической полости.

Как известно [5, 7], линеаризованная задача о малых свободных колебаниях жидкости в покоящемся сосуде имеет следующий вид:

$$\Delta \phi = 0 \text{ в } Q_0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 \text{ на } S, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + gf = 0 \text{ на } \Sigma_0, \quad (1)$$

при дополнительном условии $\int_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} dS = 0$, где $\phi(x, y, z, t)$ — потенциал скоростей, $x = f(y, z, t)$ — уравнение возмущенной свободной поверхности, $\vec{\nu}$ — орт внешней нормали к границе S и g — ускорение

сил тяжести. Кроме этого, общая постановка эволюционной краевой задачи (1) предполагает подчинения ее решений начальным условиям

$$f(y, z, t_0) = F_0(y, z), \quad \frac{\partial f}{\partial t}(y, z, t_0) = F_1(y, z), \quad (2)$$

где некоторые известные функции F_0 и F_1 задают начальное отклонение свободной поверхности жидкости и распределение скоростей на ней в начальный момент времени $t = t_0$.

Путем дифференцирования последнего условия по t два условия на Σ_0 задачи (1) обычно заменяют одним уравнением вида

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

и сводят задачу (1) к рассмотрению следующей краевой задачи:

$$\Delta \phi = 0 \text{ в } Q_0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \text{ на } \Sigma_0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 \text{ на } S. \quad (4)$$

3 Задача о собственных колебаниях и соответствующая ей спектральная задача

Особый практический интерес представляет задача о собственных гармонических колебаниях жидкости.

Собственные колебания жидкости (стоячие волны) описываются в этом случае решениями задачи (1) вида

$$\phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) \exp(i\sigma t), \quad i^2 = -1, \quad (5)$$

причем частота собственных колебаний σ и соответствующая ей форма (мода) $\varphi(x, y, z)$ определяются как решения следующей спектральной задачи:

$$\Delta \varphi = 0 \text{ в } Q_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varkappa \varphi \text{ на } \Sigma_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ на } S, \quad \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS = 0, \quad (6)$$

где параметр \varkappa , именуемый в этом классе задач частотным параметром, определяется соотношением

$$\varkappa = \sigma^2 / g. \quad (7)$$

Для задачи на собственные значения (6) существует бесконечная последовательность собственных значений \varkappa_n

$$0 < \varkappa_1 \leq \varkappa_2 \leq \dots \leq \varkappa_n \leq \dots$$

сходящаяся на бесконечности ($\varkappa_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$), и каждому собственному значению \varkappa_n соответствует конечное число собственных функций $\varphi_n(x, y, z)$ [7, 15].

Система собственных функций φ_n задачи (6) вместе с константой образует на невозмущенной свободной поверхности Σ_0 полную систему функций. Это свойство играет в теории колебаний жидкости фундаментальную роль.

Задача на собственные значения с параметром в граничном условии (6) допускает соответствующую эквивалентную ей вариационную формулировку, связанную с функционалом

$$K(\varphi) = \frac{\int_{Q_0} (\nabla \varphi)^2 dQ}{\int_{\Sigma_0} \varphi^2 dS}, \quad (8)$$

определенном на классе функций $\varphi \in W_2^1(Q_0)$ при дополнительном условии $\int_{\Sigma_0} \varphi dS = 0$.

В соответствии с общей схемой, изложенной в работах [7, 15], вариационная задача на минимум для функционала (8) позволяет последовательно определить все собственные числа и собственные функции задачи (6), обладающих свойствами обобщенных решений в смысле интегрального соотношения

$$\int_{Q_0} (\nabla \varphi_n, \nabla \eta) dQ - \varkappa_n \int_{\Sigma_0} \varphi_n \eta d\Sigma_0 = 0 \quad (9)$$

при любой функции $\eta \in W_2^1(Q)$.

В соответствии с общей схемой Ритца–Трефтца для первого собственного значения \varkappa_1 и собственной функции φ_1 имеем

$$\varkappa_1 = \min F(\varphi), \quad \varphi \in W_2^1(Q) \quad (10)$$

при условии $\int_{\Sigma_0} \varphi^2 d\Sigma_0 = 1$; для последующих собственных значений

$$\varkappa_n = \min F(\varphi), \quad \varphi \in W_2^1(Q) \quad (11)$$

при условии $\int_{\Sigma_0} \varphi^2 d\Sigma_0 = 1$ и дополнительных условиях ортогональности $\int_{\Sigma_0} \varphi \varphi_k d\Sigma_0 = 0$ ($k = 1, \dots, n - 1$).

К решению вариационной задачи применим метод Ритца. Систему координатных функций выбираем в пространстве $W_2^1(Q)$ при условии полноты и линейной независимости ее элементов. Приближенные решения ищем в виде линейной комбинации

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^q a_k w_k, \quad w_k \in W_2^1(Q). \quad (12)$$

Для определения коэффициентов a_k из условия минимума функционала $K(\varphi)$ (8) получаем систему Ритца

$$\sum_{k=1}^q a_k (\alpha_{ik} - \varkappa \beta_{ik}) = 0, \quad i, k = 1, \dots, q, \quad (13)$$

где

$$\alpha_{ik} = \int_{Q_0} (\nabla w_i, \nabla w_k) dQ, \quad \beta_{ik} = \int_{\Sigma_0} w_i w_k d\Sigma_0. \quad (14)$$

Приближенные значения собственных чисел \varkappa_n определяем из уравнения

$$\det |\alpha_{ik} - \varkappa \beta_{ik}| = 0, \quad (15)$$

которое представляет собой необходимое условие разрешимости системы линейных алгебраических уравнений (13).

Модальные методы нелинейной теории требуют от аналитического приближенного решения задачи (6) типа (12) точного удовлетворения уравнения Лапласа и условий Неймана на стенках сосуда. Кроме того, это решение должно удовлетворять этим свойствам и за пределами невозмущенной области Q_0 .

Эффективное построение такого типа решений предложено в работах [4, 7, 11] и частично реализовано в [21, 22, 25]. В другой нашей работе [9] при помощи вариационного метода были определены основные собственные частоты и собственные функции $\varphi_i^{(1)}$ (ψ_{1n}) колебания жидкости в срезанных конических баках. Другие типы систем координатных функций и их применение при решении краевых задач (6) вариационным методом в случае полостей конической формы подробно представлены в работах [1, 4, 22].

4 Гармонический базис в специальной криволинейной системе координат

Решения спектральной задачи, связанной со свободными колебаниями жидкости в покоящемся баке в форме осесимметрических соосных конусов, определим ниже вариационным методом, базирующимся на специальной системе координатных функций, полученной в специальной криволинейной системе координат x_1, x_2, x_3 . Путем введения

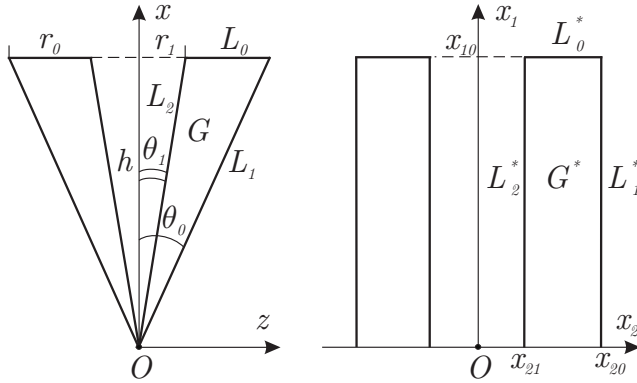


Рис. 2: Исходная и трансформированная области меридионального сечения коаксиальной конической полости.

неконформного преобразования [3, 6, 9, 11, 21], связывающего декартовы переменные x, y, z с новыми переменными x_1, x_2, x_3 формулами

$$x = x_1, \quad y = x_1 x_2 \cos x_3, \quad z = x_1 x_2 \sin x_3, \quad (16)$$

удается исходную область Q_0 , занятую жидкостью, преобразовать в системе (x_1, x_2, x_3) в область Q_0^* в форме прямого кругового цилиндра ($0 \leq x_1 \leq x_{10}$, $x_{21} \leq x_2 \leq x_{20}$, $0 \leq x_3 \leq 2\pi$); область G^* в плоскости меридионального сечения Ox_1x_2 (рис. 2) при этом представляет собой прямоугольник со сторонами $h = x_{10}$, 0 , $x_{21} = \tan \theta_1$ и $x_{20} = \tan \theta_0$ (здесь радиус невозмущенной свободной поверхности равен единице).

Осевая симметрия полости позволяет сформулировать основные краевые задачи (6) в плоскости меридионального сечения, представив предварительно искомые решения $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ в разделенном виде

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \psi_m(x_1, x_2) \frac{\sin m x_3}{\cos m x_3}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Перейдем, следуя работам [3, 6, 7, 12, 15], от трехмерной задачи (6) к m -параметрическому семейству спектральных задач относительно $\psi_m(x_1, x_2)$ в области G^*

$$p \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x_1^2} + 2q \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x_1 \partial x_2} + s \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x_2^2} + d \frac{\partial \psi_m}{\partial x_2} - m^2 c \psi_m = 0 \quad \text{в } G^*, \quad (18)$$

$$p \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} + q \frac{\partial \psi_m}{\partial x_2} = \varkappa_m p \psi_m \quad \text{на } L_0^*, \quad (19)$$

$$s \frac{\partial \psi_m}{\partial x_2} + q \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} = 0 \quad \text{на } L_1^* + L_2^*, \quad (20)$$

$$|\psi_m(x_1, 0)| < \infty, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (21)$$

$$\int_{x_{21}}^{x_{20}} \psi_0 x_2 dx_2 = 0, \quad (22)$$

где $G^* = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq x_{10}, x_{21} \leq x_2 \leq x_{20}\}$, $p = x_1^2 x_2$, $q = -x_1 x_2^2$, $s = x_2(x_2^2 + 1)$, $d = 1 + 2x_2^2$, $c = 1/x_2$, а L_0^*, L_1^*, L_2^* — части границы области G^* .

Можно показать, что решения спектральной задачи (18)–(22) совпадают с экстремальными точками функционала

$$\mathcal{J}(\psi_m) = \int_{G^*} \left[p \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} \right)^2 + 2q \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_2} + s \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{m^2}{x_2} \psi_m^2 \right] dx_1 dx_2 / \int_{L_0^*} p \psi_m^2 dx_2 \quad (23)$$

на пробных функциях, удовлетворяющих (21).

Рассмотрим вопрос о выборе координатных функций, связанных с решением спектральных задач типа (18)–(22) вариационным методом в зависимости от геометрии рассматриваемой здесь области G^* . В отличие от областей конической формы, не подверженных разбиению на подобласти, для области G^* , изображенной на рис. 2, решение краевой задачи (18)–(22) может иметь особенность на всей оси симметрии, за исключением точки O . Поэтому в координатную систему, кроме w_n^m , включаются также функции w_n^{*m} , которые имеют особенности, допускаемые областью.

Для рассматриваемого здесь типа конических областей установлены [6, 7, 12, 15] два типа частных решений уравнения (18), представленных в пространстве параметров x_1, x_2 в разделенном виде

$$\psi_{mk}(x_1, x_2) = x_1^{\nu_{mk}} T_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2), \quad \hat{\psi}_{mk}(x_1, x_2) = x_1^{\nu_{mk}} \hat{T}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2), \quad (24)$$

причем $\nu_{mk} \geq m$. Первый тип решений (24), регулярный в вершине конуса, возникает в случае конических областей, включающих и вершину конуса. Как было показано в работе [4], функция $T_{\nu}^{(m)}$ определяется как решение краевой задачи с параметром ν в уравнении и в граничном условии

$$x_2^2(1+x_2^2)T_{\nu}^{\prime\prime(m)} + x_2(1+2x_2^2-2\nu x_2^2)T_{\nu}^{\prime(m)} + [\nu(\nu-1)x_2^2 - m^2]T_{\nu}^{(m)} = 0, \quad (25)$$

$$T_{\nu}^{\prime(m)}(x_{20}) = \nu \frac{x_{20}}{1+x_{20}^2} T_{\nu}^{(m)}(x_{20}) \quad (26)$$

при выполнении условия ограниченности решения $|T_{\nu}^{(m)}(0)| < \infty$. Эта задача имеет нетривиальное решение лишь для счетного числа $\nu = \nu_{mn} > 0$ ($m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$).

Как следует из работ [4, 21], решения уравнений (25) тесно связаны с функциями Лежандра первого и второго рода, а набор $\nu = \nu_{mn}$ ($m = 0, 1, \dots; n = 1, 2, \dots$) является общим для обоих семейств решений (24). Действительно, произведя сначала замену переменных

$$\mu = (1+x_2^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (27)$$

а затем используя подстановки $y(\mu) = \mu^{\nu} T(\mu)$, вместо (25) получим известное дифференциальное уравнение

$$(1-\mu^2)y''(\mu) - 2\mu y'(\mu) + \left[\nu(\nu+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right] y(\mu) = 0, \quad (28)$$

решениями которого действительно являются присоединенные функции Лежандра первого рода $y(\mu) = P_{\nu}^{(m)}(\mu)$ и второго рода $y(\mu) = Q_{\nu}^{(m)}(\mu)$.

Далее, произведя аналогичные операции в однородных краевых

условиях (26) и введя замену $\mu = \cos \theta$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial P_\nu^{(m)}(\cos \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_1} - \frac{\partial Q_\nu^{(m)}(\cos \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} - \frac{\partial Q_\nu^{(m)}(\cos \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_1} - \frac{\partial P_\nu^{(m)}(\cos \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad (29)$$

являющемуся общим трансцендентным уравнением для определения параметров ν_{mn} ($m \geq 0, n \geq 1$).

В табл. 1 приведены первые три значения ν_{mn} ($m = 0, 1, 2, 3; n = 1, 2, 3$) для нескольких типичных углов θ_0 при шаге внутреннего угла конуса, равным одна шестая внешнего. Здесь первая колонка соответствует решениям трансцендентного уравнения (29) в случае $\theta_1 = 0$, что полностью соответствует представленным ранее решениям трансцендентного уравнения $(\partial P_\nu^{(m)}(\cos \theta) / \partial \theta)_{\theta=\theta_0} = 0$ работ [8, 9, 15, 21, 22].

Суммируя сказанное, получаем с точностью до множителя следующие нетривиальные решения задачи (18)–(22):

$$T_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2) = \frac{2^m m! (\nu_{mk} - m)!}{(\nu_{mk} + m)!} \left(\sqrt{1 + x_2^2} \right)^{\nu_{mk}} P_{\nu_{mk}}^m \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x_2^2}} \right), \quad (30)$$

$$\hat{T}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2) = \frac{2^m m! (\nu_{mk} - m)!}{(\nu_{mk} + m)!} \left(\sqrt{1 + x_2^2} \right)^{\nu_{mk}} Q_{\nu_{mk}}^{(m)} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x_2^2}} \right), \quad (31)$$

которые будут использованы ниже.

Для этих наборов функций установлены следующие рекуррентные соотношения [4]:

$$\begin{aligned} (\nu + m + 1) T_{\nu+1}^{(m)} &= (2\nu + 1) T_\nu^{(m)} - (\nu - m) T_{\nu-1}^{(m)} (1 + x_2^2), \\ x_2 \frac{dT_\nu^{(m)}}{dx_2} &= \nu T_\nu^{(m)} - (\nu - m) T_{\nu-1}^{(m)}, \\ (\nu + m + 1) x_2 T_\nu^{(m+1)} &= 2(m + 1) \left[(1 + x_2^2) T_{\nu-1}^{(m)} - T_\nu^{(m)} \right], \end{aligned} \quad (32)$$

Для базиса $\hat{T}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2)$ можно использовать те же рекуррентные формулы (32), нужно только вместо $T_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2)$ поставить функции $\hat{T}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2)$.

Отметим здесь также, что в работах [6, 25] приведены частные решения типа (24) при целых значениях индекса ν . Там же приведены примеры использования таких решений для построения приближенных решений спектральной задачи (18)–(20) в случае неусеченного конуса.

5 Вариационный метод решения спектральной задачи (18)–(20)

Основной сложностью методов, построенных по схеме Ритца–Трефтца, является выбор эффективного функционального базиса. Полнота известных наборов гармонических функций существенно зависит от геометрии области Q_0 . Универсальным полным семейством функций для любой звездной области Q_0 являются, как известно, лишь частные решения полиномиального типа [7].

Сформулируем теперь вариационный алгоритм Ритца–Трефтца решения спектральной задачи (18)–(20), исходя из вариационной формулировки задачи для квадратичного функционала (23).

В этом случае решение краевой задачи будем искать в виде

$$\psi_m(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^q a_k^{(m)} w_{k+m-1}^{(m)} + \sum_{k=1}^q a_k^{*(m)} w_{k+m-1}^{*(m)}. \quad (33)$$

В данном случае мы можем таким образом подобрать коэффициенты $a_k^{(m)}$ и $a_k^{*(m)}$, чтобы каждое из них удовлетворяло краевому условию на боковых стенках полости (20). Для этого необходимо подчинить их условию $\det(dT) = 0$, где dT определяется следующим образом:

$$dT = \begin{pmatrix} T_\nu'^{(m)}(x_{20}) - \nu a(x_{20}) T_\nu^{(m)}(x_{20}) & T_\nu'^{(m)}(x_{21}) - \nu a(x_{21}) T_\nu^{(m)}(x_{21}) \\ \hat{T}_\nu'^{(m)}(x_{20}) - \nu a(x_{20}) \hat{T}_\nu^{(m)}(x_{20}) & \hat{T}_\nu'^{(m)}(x_{21}) - \nu a(x_{21}) \hat{T}_\nu^{(m)}(x_{21}) \end{pmatrix};$$

здесь $a(x_2) = \frac{x_2}{1+x_2^2}$, а штрих в T_ν' обозначает производную по x_2 .

Тогда решение краевой задачи представим в виде

$$\psi_m(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^q a_k^{(m)} w_{k+m-1}^{(m)} = \sum_{k=1}^q a_k^{(m)} x_1^{\nu_{mk}} U_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2), \quad (34)$$

где

$$U_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2) = T_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2) - \mu_{mk} \hat{T}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2), \quad (35)$$

Таб. 1: Значения ν_{mk} для нескольких значений углов полураствора θ_0 .

$\theta_0 = \pi/6$						
$m \setminus \theta_1$	0	$\pi/36$	$\pi/18$	$\pi/12$	$\pi/9$	$5\pi/36$
$\nu_{0,1}$	6,8356480	7,3821399	8,8850638	11,720592	17,618002	35,548970
$\nu_{0,2}$	12,909109	14,363996	17,720461	23,616752	35,560182	71,524583
$\nu_{0,3}$	18,938173	21,442271	26,651988	35,578777	53,540276	107,51640
$\nu_{1,1}$	3,1195157	2,9323569	2,5518628	2,2046122	1,9342746	1,7257674
$\nu_{1,2}$	9,7115789	9,0476500	9,5993685	12,061503	17,783792	35,614958
$\nu_{1,3}$	15,820297	15,302238	18,057407	23,779803	35,641574	71,557450
$\nu_{2,2}$	5,4928250	5,4744304	5,2614253	4,7872018	4,2850716	3,8662638
$\nu_{2,3}$	12,372043	12,138166	11,539455	13,046839	18,273510	35,812222
$\nu_{2,4}$	18,583016	17,928629	19,059312	24,264250	35,884744	71,655960
$\nu_{3,3}$	7,7524423	7,7510444	7,6819751	7,2917338	6,6413213	6,0249486
$\nu_{3,4}$	14,918042	14,880735	14,176650	14,581158	19,066045	36,138704
$\nu_{3,5}$	21,246148	21,031848	20,702705	25,057027	36,286745	71,819849
$\theta_0 = \pi/4$						
$m \setminus \theta_1$	0	$\pi/24$	$\pi/12$	$\pi/8$	$\pi/6$	$5\pi/24$
$\nu_{0,1}$	4,4054031	4,7688889	5,7687669	7,6565098	11,585192	23,536013
$\nu_{0,2}$	8,4473570	9,4168517	11,653207	15,582634	23,543403	47,518074
$\nu_{0,3}$	12,463841	14,133282	17,605512	23,555728	35,529041	71,512058
$\nu_{1,1}$	1,9999760	1,8758952	1,6255844	1,4006335	1,2288398	1,0993008
$\nu_{1,2}$	6,3337445	5,8906854	6,2576877	7,8952623	11,704151	23,584467
$\nu_{1,3}$	10,396620	10,050641	11,885639	15,697585	23,602006	47,542229
$\nu_{2,2}$	3,6332387	3,6209929	3,4795270	3,1679924	2,8438296	2,5789990
$\nu_{2,3}$	8,1372938	7,9812458	7,5823019	8,5831851	12,055007	23,729258
$\nu_{2,4}$	12,259198	11,822830	12,575292	16,038788	23,777023	47,614622
$\nu_{3,3}$	5,2014271	5,2004954	5,1545429	4,8971035	4,4754272	4,0842084
$\nu_{3,4}$	9,8746685	9,8497965	9,3809733	9,6494439	12,621249	23,968718
$\nu_{3,5}$	14,064527	13,921644	13,702439	16,596122	24,066136	47,735037
$\theta_0 = \pi/3$						
$m \setminus \theta_1$	0	$\pi/18$	$\pi/9$	$\pi/6$	$2\pi/9$	$5\pi/18$
$\nu_{0,1}$	3,1957222	3,4674443	4,2152511	5,6283104	8,5716126	17,531097
$\nu_{0,2}$	6,2196322	6,9460922	8,6220159	11,567548	17,536443	35,515604
$\nu_{0,3}$	9,2290654	10,480705	13,083916	17,545526	26,524378	53,510409
$\nu_{1,1}$	1,4679773	1,3752776	1,1904450	1,0282683	0,90823933	0,82133212
$\nu_{1,2}$	4,6541273	4,3215634	4,5964068	5,8206993	8,6708326	17,572858
$\nu_{1,3}$	7,6903875	7,4307452	8,8052486	11,661026	17,585545	35,536446
$\nu_{2,2}$	2,7525882	2,7433527	2,6372535	2,4083317	2,1776379	1,9966508
$\nu_{2,3}$	6,0404223	5,9230999	5,6246683	6,3723023	8,9627678	17,697575
$\nu_{2,4}$	9,1109119	8,7834595	9,3471402	11,938075	17,732099	35,598902
$\nu_{3,3}$	4,0000000	3,9992921	3,9645575	3,7735679	3,4713838	3,2028114
$\nu_{3,4}$	7,3884014	7,3696801	7,0184339	7,2210712	9,4318842	17,903586
$\nu_{3,5}$	10,498378	10,391041	10,227900	12,389331	17,973905	35,702758

a

$$\mu_{mk} = \frac{(\nu_{mk} + 1)\mu^{-1}P_{\nu_{mk}}^{(m)}(\mu) + (m - \nu_{mk} + 1)\mu^{-2}P_{\nu_{mk}+1}^{(m)}(\mu)}{(\nu_{mk} + 1)\mu^{-1}Q_{\nu_{mk}}^{(m)}(\mu) + (m - \nu_{mk} + 1)\mu^{-2}Q_{\nu_{mk}+1}^{(m)}(\mu)}$$

При этом функции $P_\nu^{(m)}(\mu)$ и $Q_\nu^{(m)}(\mu)$ являются присоединенными функциями Лежандра первого и второго рода соответственно.

Далее искомые частные решения краевой задачи (34) представим в нормированном виде

$$w_k^{(m)}(x_1, x_2) = N_k^{(m)} x_1^{\nu_{mk}} U_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2), \quad (36)$$

где $N_k^{(m)}$ – нормирующие множители, которые в дальнейшем выбираются из условия

$$\|w_k^{(m)}\|_{L_0^2}^2 = \int_{x_{21}}^{x_{20}} x_2 (w_k^{(m)}(x_{10}, x_2))^2 dx_2 = 1. \quad (37)$$

Явные формулы для подсчета этих нормирующих множителей имеют вид

$$N_k^{(m)} = \frac{1}{x_{10} \sqrt{\int_{x_{21}}^{x_{20}} x_2 [w_k^{(m)}(x_{10}, x_2)]^2 dx_2}}. \quad (38)$$

Заметим, что в случае $m = 0$ систему частных решений (34) необходимо, к тому же, переопределить по схеме

$$w_k^{(0)} = w_k^{(0)} - c_k^{(0)}, \quad (39)$$

где

$$c_k^{(0)} = \frac{2}{x_{20}^2 - x_{21}^2} \int_{x_{21}}^{x_{20}} x_2 w_k^{(0)}(x_{10}, x_2) dx_2, \quad (40)$$

чтобы условие сохранения объема (22) выполнялось автоматически. Приближенное решение вариационной задачи теперь будем искать в виде

$$\psi_m(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^q a_k^{(m)} w_{k+m-1}^{(m)}, \quad (41)$$

а для определения неизвестных постоянных $a_k^{(m)}$ воспользуемся необходимым условием экстремума функционала (23)

$$\frac{\partial \mathcal{J}_m}{\partial a_k^{(m)}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad (42)$$

приводящим к системе линейных однородных уравнений. Для определения частотных параметров \varkappa_m , как и выше, получаем матричное уравнение

$$\det \left(\{ \alpha_{ij}^{(m)} \} - \varkappa_m \{ \beta_{ij}^{(m)} \} \right) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, q, \quad (43)$$

где элементы матриц $\{ \alpha_{ij}^{(m)} \}$ и $\{ \beta_{ij}^{(m)} \}$ имеют следующий вид:

$$\alpha_{ij}^{(m)} = \int_{x_{21}}^{x_{20}} \left[\left(x_1^2 x_2 \frac{\partial w_{i+m-1}^{(m)}}{\partial x_1} - x_1 x_2^2 \frac{\partial w_{i+m-1}^{(m)}}{\partial x_2} \right) w_{j+m-1}^{(m)} \right]_{x_1=x_{10}} dx_2,$$

$$\beta_{ij}^{(m)} = x_{10}^2 \int_{x_{21}}^{x_{20}} x_2 \left(w_{i+m-1}^{(m)} w_{j+m-1}^{(m)} \right)_{x_1=x_{10}} dx_2.$$

Матричная спектральная задача (43) имеет q собственных значений, что соответствует количеству членов в разложении (41). Как обычно, для каждого фиксированного m собственные значения упорядочены в порядке возрастания.

6 Сходимость процесса Ритца

В табл. 2–4 показана типичная сходимость метода в случае V -образных соосных конических полостей с внешними углами полураствора $5^\circ \leq \theta_0 \leq 85^\circ$ при шаге внутреннего угла полураствора, равного одна шестая от внешнего. В общем случае бралось 15 базисных функций (36). Как видно из таблиц, пять–семь значащих цифр \varkappa_{m1} стабилизируются уже при $q = 7 \div 11$ базисных функций почти для всех собственных значений. Исключение составляет только случай $m = 0$, для которого количество значащих цифр меньше и варьируется от шести до трех в зависимости от величины объема жидкости. Следует обратить внимание, что в первой колонке каждой из таблиц приведены для контроля первые собственные значения \varkappa_{m1} при стремлении внутреннего конуса к нулевому объему (простая коническая полость), что будет в точности соответствовать результатам работ [11, 21]. Общей является тенденция ухудшения точности определения собственных значений \varkappa_{m1} при стремлении объема жидкости к нулю (θ_1 стремится к θ_0). Метод устойчиво сходится при всех конфигурациях соосных конических полостей, в т.ч. к \varkappa_{01} ; единственным

Таб. 2: Сходимость собственных значений \varkappa_{m1} для коаксиальных конических полостей с внешним углом полураствора $\theta_0 = \pi/6$.

$q \setminus \theta_1$	0	$\pi/36$	$\pi/18$	$\pi/12$	$\pi/9$	$5\pi/36$
\varkappa_{01}						
5	3,3856957	3,5985167	4,1925541	5,3122047	7,6265733	14,623555
7	3,3856948	3,5985012	4,1923834	5,3113719	7,6232650	14,608941
9	3,3856947	3,5984976	4,1923429	5,3111547	7,6223123	14,604307
11	3,3856947	3,5984964	4,1923289	5,3110739	7,6219313	14,602321
13	3,3856947	3,5984959	4,1923228	5,3110371	7,6217471	14,601308
15	3,3856947	3,5984957	4,1923199	5,3110178	7,6216462	14,600727
\varkappa_{11}						
5	1,3043740	1,2560131	1,1425068	1,0129936	0,89003386	0,77810150
7	1,3043740	1,2560098	1,1425030	1,0129911	0,89003279	0,77810132
9	1,3043740	1,2560090	1,1425020	1,0129903	0,89003245	0,77810125
11	1,3043740	1,2560087	1,1425016	1,0129901	0,89003230	0,77810122
13	1,3043740	1,2560086	1,1425014	1,0129899	0,89003223	0,77810120
15	1,3043740	1,2560086	1,1425013	1,0129898	0,89003218	0,77810119
\varkappa_{21}						
5	2,2631497	2,2602643	2,2233449	2,1115223	1,9367364	1,7357694
7	2,2631497	2,2602623	2,2233333	2,1115087	1,9367300	1,7357684
9	2,2631497	2,2602617	2,2233302	2,1115048	1,9367279	1,7357680
11	2,2631497	2,2602615	2,2233290	2,1115032	1,9367270	1,7357678
13	2,2631497	2,2602614	2,2233285	2,1115025	1,9367266	1,7357678
15	2,2631497	2,2602613	2,2233283	2,1115021	1,9367264	1,7357677
\varkappa_{31}						
5	3,1802488	3,1801099	3,1725567	3,1145347	2,9499170	2,6933193
7	3,1802488	3,1801096	3,1725472	3,1145095	2,9499004	2,6933165
9	3,1802488	3,1801095	3,1725446	3,1145022	2,9498950	2,6933155
11	3,1802488	3,1801095	3,1725437	3,1144994	2,9498928	2,6933151
13	3,1802488	3,1801095	3,1725433	3,1144980	2,9498917	2,6933148
15	3,1802488	3,1801095	3,1725431	3,1144973	2,9498910	2,6933147

моментом является замедление сходимости при стремлении объема полости к нулю, что является типичной ситуацией при использовании такого приближенного метода. При этом количество стабилизируемых значащих цифр соответствует приведенным в работе [21] для неусеченных конусов. Гаврилюк и др. [21] связывали замедление сходимости для малых углов полураствора с несоответствием асимптотического поведения базиса вдоль вертикальной оси точному решению задачи, которое для цилиндрической полости (предельное положение) должно экспоненциально затухать.

Таб. 3: Сходимость собственных значений \varkappa_{m1} для коаксиальных конических полостей с внешним углом полураствора $\theta_0 = \pi/4$.

$q \setminus \theta_1$	0	$\pi/24$	$\pi/12$	$\pi/8$	$\pi/6$	$5\pi/24$
\varkappa_{01}						
5	2,9266002	3,0606448	3,4461218	4,1819351	5,7107516	11,152368
7	2,9266002	3,0605970	3,4455578	4,1789814	5,6987128	10,414492
9	2,9266002	3,0605861	3,4454090	4,1780763	5,6944797	10,317718
11	2,9266002	3,0605824	3,4453531	4,1776978	5,6925271	10,286044
13	2,9266002	3,0605809	3,4453274	4,1775084	5,6914719	10,271594
15	2,9266002	3,0605801	3,4453139	4,1774017	5,6908389	10,263719
\varkappa_{11}						
5	0,99999513	0,97407727	0,90694704	0,81639042	0,71487645	0,60853812
7	0,99999513	0,97406687	0,90692500	0,81636656	0,71486202	0,60852738
9	0,99999513	0,97406399	0,90691835	0,81635838	0,71485643	0,60852427
11	0,99999513	0,97406294	0,90691567	0,81635475	0,71485370	0,60852292
13	0,99999513	0,97406247	0,90691439	0,81635285	0,71485217	0,60852220
15	0,99999513	0,97406223	0,90691369	0,81635176	0,71485122	0,60852177
\varkappa_{21}						
5	1,7673770	1,7663761	1,7524018	1,6997148	1,5869314	1,4120060
7	1,7673770	1,7663727	1,7523676	1,6996390	1,5868653	1,4119475
9	1,7673770	1,7663716	1,7523571	1,6996131	1,5868397	1,4119307
11	1,7673770	1,7663712	1,7523528	1,6996016	1,5868273	1,4119235
13	1,7673770	1,7663710	1,7523508	1,6995956	1,5868203	1,4119196
15	1,7673770	1,7663709	1,7523497	1,6995921	1,5868160	1,4119173
\varkappa_{31}						
5	2,5049283	2,5048968	2,5030029	2,4844934	2,4056506	2,2117053
7	2,5049283	2,5048966	2,5029867	2,4844092	2,4055270	2,2115642
9	2,5049283	2,5048965	2,5029816	2,4843804	2,4054796	2,2115239
11	2,5049283	2,5048965	2,5029795	2,4843677	2,4054567	2,2115065
13	2,5049283	2,5048964	2,5029785	2,4843611	2,4054438	2,2114973
15	2,5049283	2,5048964	2,5029779	2,4843572	2,4054359	2,2114917

7 Сравнительный анализ

Величины собственных значений \varkappa_{mn} зависят от геометрических параметров бака — радиуса свободной поверхности r_0 и угла полураствора внешней θ_0 и внутренней $\theta_1(r_1)$ конических полостей.

Большинство численных экспериментов фокусировалось на расчете наиболее важных с практической точки зрения наименьших собственных значений \varkappa_{m1} , $m \geq 0$.

Расчеты по определению собственных значений \varkappa_{mn} , проиллюстрированные на рис. 3, показывают, что при стремлении θ_1 к θ_0 собственные значения стремятся к нулю; причем, к нулю они стремятся резко для очень больших θ_1 , почти равных θ_0 (подобно результатам

Таб. 4: Сходимость собственных значений \varkappa_{m1} для коаксиальных конических полостей с внешним углом полураствора $\theta_0 = \pi/3$.

$q \setminus \theta_1$	0	$\pi/18$	$\pi/9$	$\pi/6$	$2\pi/9$	$5\pi/18$
\varkappa_{01}						
5	2,2064634	2,2634204	2,4370594	2,7838046	3,5313045	5,8729206
7	2,2064634	2,2633352	2,4361373	2,7786798	3,5107239	5,7896017
9	2,2064634	2,2633383	2,4358542	2,7768267	3,5021182	5,7502304
11	2,2064634	2,2633321	2,4357366	2,7759581	3,4976262	5,7276821
13	2,2064634	2,2633294	2,4356784	2,7754836	3,4949595	5,7131867
15	2,2064634	2,2633279	2,4356484	2,7751692	3,4937109	5,7043866
\varkappa_{11}						
5	0,6776788	0,66801555	0,64035786	0,59463057	0,52868508	0,44006380
7	0,6776788	0,66799387	0,64027765	0,59449654	0,52857458	0,44003571
9	0,6776788	0,66798681	0,64024963	0,59444288	0,52852394	0,44002116
11	0,6776788	0,66798391	0,64023713	0,59441617	0,52849596	0,44001234
13	0,6776788	0,66798253	0,64023065	0,59440098	0,52847865	0,44000646
15	0,6776688	0,66798180	0,64022692	0,59439148	0,52846722	0,44000233
\varkappa_{21}						
5	1,2144318	1,2142396	1,2113156	1,1973653	1,1524324	1,0369535
7	1,2144318	1,2142375	1,2112673	1,1971635	1,1520964	1,0368128
9	1,2144318	1,2142366	1,2112495	1,1970825	1,1519444	1,0367406
11	1,2144318	1,2142361	1,2112413	1,1970421	1,1518610	1,0366971
13	1,2144318	1,2142359	1,2112369	1,1970191	1,1518097	1,0366683
15	1,2144318	1,2142358	1,2112344	1,1970049	1,1517751	1,0366472
\varkappa_{31}						
5	1,7320508	1,7320476	1,7318430	1,7292232	1,7105641	1,6151643
7	1,7320508	1,7320476	1,7318334	1,7291125	1,7101840	1,6148783
9	1,7320508	1,7320476	1,7318295	1,7290679	1,7100140	1,6147330
11	1,7320508	1,7320476	1,7318276	1,7290456	1,7099216	1,6146461
13	1,7320508	1,7320476	1,7318266	1,7290329	1,7098650	1,6145886
15	1,7320508	1,7320476	1,7318260	1,7290249	1,7098273	1,6145483

работы [9]), т.е. объем жидкости почти нулевой, что являет собой типичную физическую картину.

На рис. 3 отображено графически несколько зависимостей наименьших собственных значений \varkappa_{m1} относительно внутреннего угла полураствора θ_1 (или r_1) для соосных полостей с несколькими типичными исследуемыми (см. табл. 2–4) внешними углами полураствора θ_0 .

Установлено, что с увеличением величины угла полураствора θ_0 собственные значения для V-конуса уменьшаются (рис. 3). Величины собственных значений \varkappa_{m1} ($m = 0, 1, 2, 3$) соотносятся как

$$\varkappa_{01} > \varkappa_{31} > \varkappa_{21} > \varkappa_{11}.$$

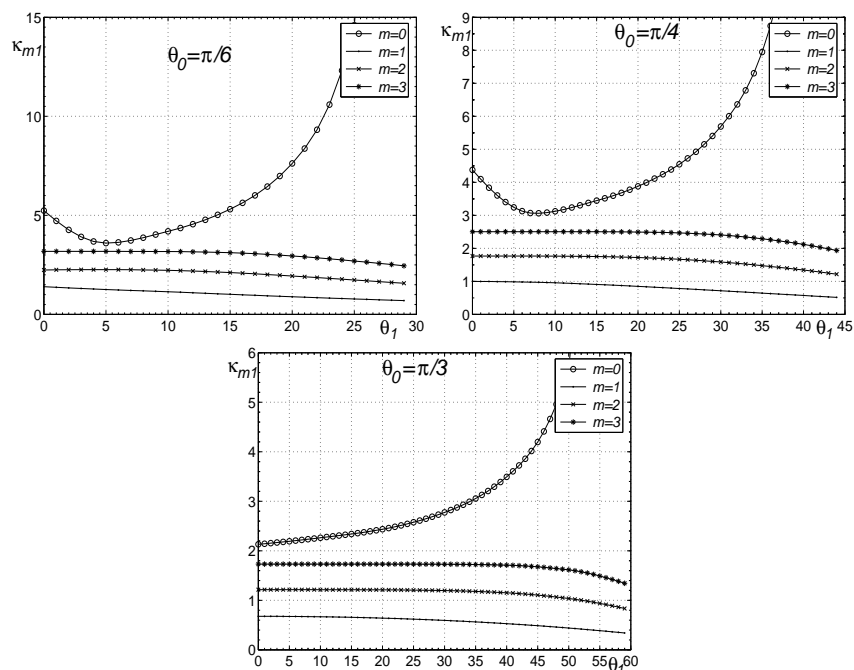


Рис. 3: Значения κ_{m1} для нескольких типичных коаксиальных конических полостей ($\theta_0 = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$) относительно величины угла полураствора внутреннего конуса θ_1 .

Причем при стремлении объема полости к нулевому собственные значения стремятся к нулю и лишь для $m = 0$ частота стремится к бесконечности.

Значения низших собственных частотных параметров κ_{11} для V-образных соосных конусов являются важными для расчета реальных водонапорных башен. Они приведены в табл. 5 и 6 ($\delta = k \setminus \theta_0$). По горизонтали в таблицах отложено угол полураствора внешнего конуса θ_0 , а по вертикали угол полураствора внутреннего конуса, вычисляемый по формуле $\theta_1 = (k\theta_0)/6$ и определяемый через k . Реальную размерную величину собственной частоты σ_{mn} можно получить, вос-

пользовавшись формулой

$$\sigma_{mn}^2 = \frac{g \varkappa_{mn}(\theta_0, \theta_1)}{r_0} \quad (44)$$

и данными из табл. 5, 6, где g , r_0 и r_1 — размерные.

Таб. 5: Значения низших собственных частотных параметров \varkappa_{11} .

δ	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
1	1,6687	1,5920	1,5124	1,4298	1,3443	1,2560	1,1648	1,0708	0,9741
2	1,4807	1,4180	1,3529	1,2854	1,2152	1,1425	1,0670	0,9885	0,9069
3	1,3030	1,2490	1,1928	1,1346	1,0747	1,0130	0,9495	0,8841	0,8164
4	1,1600	1,1096	1,0570	1,0025	0,9468	0,8900	0,8324	0,7741	0,7149
5	1,0341	0,9965	0,9441	0,8899	0,8343	0,7781	0,7215	0,6650	0,6085

Таб. 6: Значения низших собственных частотных параметров \varkappa_{11} .

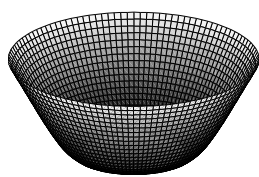
δ	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°
1	0,8746	0,7726	0,6680	0,5611	0,4520	0,3409	0,2283	0,1145
2	0,8218	0,7330	0,6402	0,5432	0,4419	0,3363	0,2268	0,1143
3	0,7460	0,6722	0,5944	0,5116	0,4227	0,3269	0,2238	0,1142
4	0,6546	0,5927	0,5285	0,4608	0,3879	0,3074	0,2168	0,1139
5	0,5523	0,4962	0,4400	0,3832	0,3248	0,2630	0,1940	0,1105

В соответствии с полученными величинами собственных частотных параметров \varkappa_{mn} мы можем построить и соответствующие поверхностные моды (17)

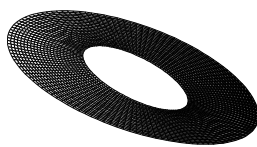
$$\phi_m(x_1, x_2, x_3) = \varkappa_{mn} \psi_{mn}(x_{10}, x_2) \frac{\sin m x_3}{\cos m x_3} + h_0 \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (45)$$

На рис. 4 отображено графически типичная форма основных поверхностных мод $\phi_{mn}(x_1, x_2, x_3)$, рассмотренных в задаче. В качестве иллюстративного примера выбран коаксиальный конуса со следующей геометрией: внешний угол полураствора равен $\theta_0 = 45^\circ$; внутренний угол полураствора равен $\theta_1 = 22.5^\circ$. На рисунке по порядку отображены следующие стоячие волны: а) для собственной частоты σ_{01} ; б) для собственной частоты σ_{11} ; в) для собственной частоты σ_{21} ; г) для собственной частоты σ_{31} . При этом $\sigma_{mn}^2 = g \varkappa_{mn}/r_0$, где наименьшие собственные значения \varkappa_{m1} для исследуемых соосных полостей взяты из таблиц 2-4.

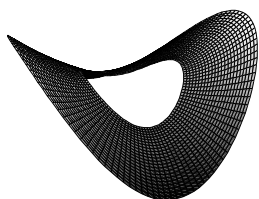
Также производилось сравнение величин собственных значений в некоторых предельных случаях. Сравнение производилось с результатами работ [6] по соосным цилиндрическим полостям при стремлении в нашем случае глубины жидкости конической полости к



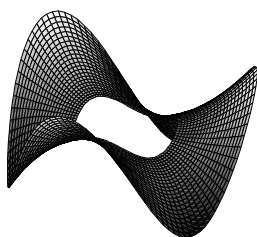
а) Стоячая волна для σ_{01} .



б) Стоячая волна для σ_{11} .



в) Стоячая волна для σ_{21} .



г) Стоячая волна для σ_{31} .

Рис. 4: Вид основных поверхностных мод $\phi_{mn}(x_1, x_2, x_3)$ (45) для случая коаксиального конуса с внешним углом полураствора $\theta_0 = 45^\circ$ и внутренним углом полураствора $\theta_1 = 22,5^\circ$.

бесконечности. Геометрическая характеристика соосных цилиндров δ выражается через соотношение радиусов цилиндров выражением $\delta = R_0/R_1$. Здесь радиус внешнего цилиндра обозначался через R_0 , а внешнего — через R_1 . В нашем случае такое соотношение δ примет вид $\delta = r_1/r_0 = \tan \theta_1 / \tan \theta_0$. Тогда взаимосвязь “цилиндрическая–коническая” полость можно представить в виде $\delta \rightarrow (\theta_0, \theta_1)$. К примеру, для геометрии соосных цилиндров $\delta = 0,4$ и $\delta = 0,6$ соответствующая приближенная геометрия соосных конусов для случая $m = 1$ будет следующая:

$$\delta = 0,4 \rightarrow (\theta_0, \theta_1) = (45^\circ, 21^\circ 48' 5''),$$

$$\delta = 0,6 \rightarrow (\theta_0, \theta_1) = (45^\circ, 30^\circ 57' 50'').$$

Сравнивая вычисленные наимизшие собственные значения для обоих

полостей, получаем следующие величины:

$$\chi_{11}^{cyl} = 0,70201, \quad \chi_{11}^{con} = 0,70138,$$

$$\chi_{11}^{cyl} = 0,82648, \quad \chi_{11}^{con} = 0,82539,$$

что представляет достаточно хорошее совпадение и подтверждение достоверности настоящей методики.

8 Выводы

Рассмотрен численно-аналитический метод расчета собственных частот и форм для соосных конических баков, основанный на вариационном алгоритме Ритца–Трефтца. Метод базируется на неконформном преобразовании области, приводящим к частичному разделению переменных задачи, что позволяет построить эффективную координатную систему функций, восходящую к функциям Лежандра первого и второго рода.

Численные данные этой работы сравниваются с результатами работ [1, 17], полученными для конических полостей с малым углом раствора. Удовлетворительное согласование результатов наблюдается для широкого диапазона полостей, за исключением лишь случая малого объема жидкости Q_0 .

Результаты работы предполагается использовать для развития нелинейной модальной теории для случая соосных конических баков. Луковский [6] указал пути обобщения этой теории для произвольных сосудов вращения, что было реализовано в работе Гаврилюка и др. [21] для усеченного V -образного конуса и в работе Луковского и др. [9] для усеченного V -образного конуса.

- [1] Докучаев Л.В. К решению краевой задачи о колебаниях жидкости в конических полостях // Прикл. матем. и механика, 1964. — 28, вып. 1. — С. 151–154.
- [2] Докучаев Л.В., Луковский И.А. Методы определения гидродинамических характеристик подвижного сосуда с перегородками // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1968. — №. 6. — С. 205–213.
- [3] Луковский И.А. Нелинейные колебания жидкости в полостях сложной геометрии. — Киев: Наук. думка, 1975. — 232 с.

- [4] *Луковский И.О.* До розв'язування спектральних задач лінійної теорії коливань рідини в конічних баках // Доповіді НАН України. Механіка. — 2002. — № 5. — С. 53–58.
- [5] *Луковский И.А.* Об одной математической модели волновых движений жидкости в резервуарах с наклонными стенками // Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2005. — Т. 2, № 1. — С. 227–253.
- [6] *Луковский И.А.* Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. — Киев: Наук. думка. — 2010. — 408 с.
- [7] *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. — Киев: Наукова думка, 1984. — 212 с.
- [8] *Луковский И.А., Билык А.Н.* Вынужденные нелинейные колебания жидкости в подвижных осесимметричных конических полостях // В кн.: Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости многомерных систем. — Киев: Институт математики АН УССР, 1985. — С. 12–26.
- [9] *Луковский И.А., Солодун А.В., Тимоха А.Н.* Собственные частоты колебаний жидкости в усеченных конических баках // Акустический вестник. — 2006. — 9, № 3. — С. 18–34.
- [10] *Луковский И.А., Тимоха А.Н.* Вариационные методы в нелинейной динамике ограниченного объема жидкости. — Киев: Институт математики НАНУ, 1995. — 400 с.
- [11] *Луковский И.А., Тимоха А.Н.* Модальное моделирование нелинейных плесканий жидкости в баках с невертикальными стенками. Методика неконформных отображений // Прикл. гидромеханика. — 2000. — 2 (74), № 4. — С. 32–47.
- [12] *Луковский И.А., Троценко В.А., Фещенко С.Ф.* Расчет динамических характеристик жидкости в подвижных полостях. — Киев: Академия наук УССР, 1968. — 265 с.
- [13] *Мижигин Г.Н., Дорожкин Н.Я.* Экспериментальные исследования свободных колебаний жидкости в контейнерах // Известия АН СССР. — 1961. — № 4. — С. 48–53.
- [14] *Мижигин Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненной жидкостью. — М.: Машиностроение, 1968. — 532 с.
- [15] *Фещенко С.Ф., Луковский И.А., Рабинович Б.И., Докучаев Л.В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. — Киев: Наук. думка, 1969. — 250 с.
- [16] *Abramson H.N.* NASA Space Vehicle Design Criteria (Structures). NASA SP-8009: Propellant slosh loads. August, 1968. — 48 p.

-
- [17] *Bauer H.F.* Sloshing in conical tanks// *Acta Mechanica*. — 1982. — 43 (3-4). — P. 185-200.
- [18] *Bauer H.F., Eidel W.* Non-linear liquid motion in conical container// *Acta Mechanica*. — 1988. — 73 (1-4). — P. 11-31.
- [19] *El Damatty A., Korol R.M., Tang L.M.* Analytical and experimental investigation of the dynamic response of liquid-filled conical tanks // *Proceedings of the World Conf. of Earthquake Engineering, New Zealand, 2000*. Paper No. 966, Topic No. 7, 8.
- [20] *Dutta S., Laha M.K.* Analysis of the small amplitude sloshing of a liquid in a rigid container of arbitrary shape using a low-order boundary element method // *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*. — 2000. — 47, Issue 9. — P. 1633-1648.
- [21] *Gavrilyuk I., Lukovsky I.A., Timokha A.N.* Linear and nonlinear sloshing in a circular conical tank// *Fluid Dynamics Research*. — 2005. — 37. — P. 399-429.
- [22] *Gavrilyuk I., Hermann M., Lukovsky I., Solodun O., Timokha A.* Natural Sloshing Frequencies in Truncated Conical Tanks// *Engineering Computations EC 1224*. — 2008. — **25**, No. 6. — P. 518-540.
- [23] *Levin O.* Oscillation of a Fluid in Rectilinear Conical Container// *AIAA J.* — 1963. — Vol. 2, No. 6. —P. 1447-1448.
- [24] *Lukovsky I.A.* Variational methods of solving dynamic problems for fluid-containing bodies // *Intern. Applied Mechanics*. — 2004. — 40, Issue 10. — P. 1092-1128.
- [25] *Lukovsky I.A., Timokha A.N.* Modal modeling of nonlinear fluid sloshing in tanks with non-vertical walls. Non-conformal mapping technique // *Intern. J. of Fluid Mechanics Research*. — 2002. — 29, Issue 2. — P. 216-242.
- [26] *Shrimali M.K., Jangid R.S.* Earthquake response of isolated elevated liquid storage steel tanks // *J. of Constructional Steel Research*. — 2003. — 59. — P. 1267-1288.
- [27] *Tang L.M.* Dynamic behavior of liquid-filled circular and conical tanks. Master Thesis, McMaster University Hamilton, Ontario, Canada, 1999. — 180 p.