Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 4–5, 432–441

УДК 517.96

С. В. Грищук

(Институт математики НАН Украины, Киев)

Степенные ряды в краевой задаче для моногенных функций бигармонической переменной в круге

gryshchuk@imath.kiev.ua

Светлой памяти Промарза Меликовича Тамразова посвящается

Розглядається крайова задача для моногенних функцій бігармонічної змінної, асоційована з основною бігармонічною задачею. Граничні умови підбираються так, щоб задача розв'язувалась у вигляді степеневого ряду за бігармонічною змінною. Досліджується моногенна гладкість одержуваного розв'язку.

Considered a boundary value problem for monogenic functions of biharmonic variable, associated with the main biharmonic problem. The boundary data are found such, that Problem is solvable in the form of the power series with respect to the biharmonic variable. There is investigated the monogenic smoothness of the found solution.

1. Моногенные функции в бигармонической плоскости. Ассоциативная, коммутативная над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ алгебра $\mathbb{B}$ второго ранга с единицей называется *бигармонической*, если в ней имеется *бигармонический* базис $\{e_1, e_2\}$, т.е. базис, удовлетворяющий условиям (см. [1, 2])

$$(e_1^2 + e_2^2)^2 = 0, \qquad e_1^2 + e_2^2 \neq 0\,. \tag{1}$$

В работе [2] показано, что бигармоническая алгебра $\mathbb{B}$ единственна и порождается небигармоническим базисом $\{1, \rho\}$, где ρ удовлетворяет соотношению $\rho^2 = 0$, и все бигармонические базисы найдены в явном виде.

Здесь и далее бигармонический базис $\{e_1, e_2\}$ имеет вид:

$$e_1 = 1, \quad e_2 = i - \frac{i}{2}\,\rho\,,$$

где i — мнимая комплексная единица.

Бигармоническая плоскость — это линейная оболочка $\mu := \{\zeta = x\,e_1 + y\,e_2 : x, y \in \mathbb{R}\}$ элементов e_1, e_2 над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Области D декартовой плоскости xOy поставим в соответствие конгруэнтную ей область $D_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 : (x, y) \in D\} \subset \mu$.

Поскольку произвольный элемент бигармонической плоскости, кроме нулевого, обратим, то производная функции, заданной в области бигармонической плоскости, определяется так же, как и в комплексной плоскости. Функцию $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ будем называть *моногенной* в области D_ζ, если в каждой точке $\zeta \in D_\zeta$ существует производная

$$\Phi'(\zeta) := \lim_{h\to 0,\, h\in\mu} \big(\Phi(\zeta + h) - \Phi(\zeta)\big)\, h^{-1}.$$

Все компоненты $U_k\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1,4}$, разложения

$$\Phi(\zeta) = U_1(x,y) + U_2(x,y)\, i + U_3(x,y)\, e_2 + U_4(x,y)\, ie_2, \quad \zeta = x + ye_2, \quad (2)$$

моногенной функции $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ в силу соотношений (1) удовлетворяют бигармоническому уравнению (см. [3 — 5]).

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) u(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in D\,.$$

В работе [1] получены необходимые и достаточные условия моногенности (аналоги условий Коши–Римана) функции бигармонической переменной. В работе [3] установлены основные аналитические свойства указанных моногенных функций, аналогичные соответствующим свойствам голоморфных функций комплексной переменной: интегральная теорема Коши и интегральная формула Коши, теорема Морера, теорема единственности, тейлоровские и лорановские разложения.

2. Краевая (1-3)-задача для моногенных функций. Рассмотрим краевую задачу о нахождении моногенной функции $\Phi : D_\zeta \to \mathbb{B}$, непрерывной в замыкании $\overline{D_\zeta}$ области D_ζ, по заданным на границе ∂D_ζ значениям первой и третьей компоненты разложения (2):

$$U_1(x,y) = u_1(\zeta)\,, \quad U_3(x,y) = u_3(\zeta) \qquad \forall\, \zeta = x + ye_2 \in \partial D_\zeta\,,$$

где u_1 и u_3 — заданные функции (такую задачу будем называть (1-3)-задачей).

Эта задача впервые рассмотрена в работе [6], где описана ее связь с основной бигармонической задачей и задачами теории упругости (см. также [7]). В [6] предложена схема редукции (1-3)-задачи к интегро-дифференциальным уравнениям, при этом условия разрешимости задачи не исследовались. В работе [7] решения (1-3)-задачи для полуплоскости и для круга получены в явном виде с использованием некоторых бигармонических аналогов интеграла Шварца, при этом показано, что (1-3)-задача для полуплоскости безусловно разрешима, а для (1-3)-задачи для круга установлены необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

В данной работе устанавливаются условия на заданные функции u_1, u_3 (в виде условий на коэффициенты их рядов Фурье), достаточные для разрешимости (1-3)-задачи для круга $D_\zeta \equiv \mathcal{D}_R := \{\zeta \in \mu : \|\zeta\| < R\}$ произвольного радиуса $R > 0$ в форме абсолютно и равномерно сходящегося в $\overline{\mathcal{D}_R}$ степенного ряда по ζ.

При нахождении решения краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных в виде ряда используются разложения в ряд Фурье граничных функций (см. работы [8 — 12] для уравнений с лапласианом в главной части и работы [13 — 16] для бигармонического уравнения). В частности, для задачи Дирихле для круга (см. [8, с.605] или [9, с.119]) получено решение в виде ряда, который с точностью до коэффициентов, зависящих от расстояния от точки круга до начала координат, совпадает с рядом Фурье граничной функции на окружности.

Пусть функция $f : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = f(2\pi)$, представима в виде ряда Фурье:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)\,, \tag{3}$$

где $a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\theta) \cos k\theta \, d\theta$ при $k = 0, 1, \ldots$ и $b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\theta) \sin k\theta \, d\theta$ при $k = 1, 2 \ldots$.

Будем говорить, что функция (3) принадлежит классу $\mathcal{F}_\alpha$ при $\alpha > 0$, если существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|a_k| \le \frac{M}{k^{2+\alpha}}, \quad |b_k| \le \frac{M}{k^{2+\alpha}}, \qquad k = 1, 2, \dots . \tag{4}$$

В частности, если функция $f^{(n)}(\theta)$ при $n \ge 2$ удовлетворяет условиям Дирихле, то коэффициенты ряда (3) удовлетворяют оценкам (4) при $\alpha = n - 1$ (см. [15, с.185]) и, следовательно, функция (3) принадлежит классу $\mathcal{F}_{n-1}$.

Введя полярные координаты (r, θ): $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, представим заданные на $\partial\mathcal{D}_R$ функции u_1, u_3 (1-3)-задачи в виде функций переменной $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\tilde{u}_m(\theta) := u_m(R\cos\theta + R\sin\theta\, e_2)\,, \qquad m = 1, 3. \tag{5}$$

Далее, предполагая, что $\tilde{u}_1, \tilde{u}_3 \in \mathcal{F}_\alpha$, представляем функции $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_3$ в виде равномерно и абсолютно сходящихся при $\theta \in [0, 2\pi]$ рядов Фурье:

$$\tilde{u}_1(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)\,, \tag{6}$$

$$\tilde{u}_3(\theta) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k' \cos k\theta + b_k' \sin k\theta)\,. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть заданные функции* (6), (7) *принадлежат классу* $\mathcal{F}_\alpha$. *Тогда* (1-3)*-задача для круга* $\mathcal{D}_R$ *разрешима тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\int_0^{2\pi} \Big(\tilde{u}_1(\theta)\sin\theta - \tilde{u}_3(\theta)\cos\theta\Big)\, d\theta = 0. \tag{8}$$

Решение задачи (1-3) *представляется формулой*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \zeta^k, \tag{9}$$

где $C_k = c_k + c_k^{(0)}\rho$, *при этом*

$$c_0 = a + ib, \quad c_1 = \frac{1}{2R}\,(a_1 + b_1') + ic,$$

$$c_k = \frac{1}{R^k}\Big(a_k + b_k' + i\big(a_k' - b_k\big)\Big), \quad k = 2, 3, \dots ,$$

$$c_0^{(0)} = \frac{1}{4}\left(a_0 - 2a_2 - 2b_2' - 2a\right) + i\frac{1}{4}\left(2b_2 - 2a_2' - a_0'\right),$$

$$c_1^{(0)} = \frac{1}{4R}\left(a_1 - 3a_3 - 3b_3' - b_1'\right) + i\frac{1}{4R}\left(3b_3 - 3a_3' - 2b_1\right),$$

$$c_k^{(0)} = \frac{1}{4R^k}\Big(ka_k + (k-2)\,b_k' - (k+2)\left(a_{k+2} + b_{k+2}'\right)\Big) +$$

$$+i\frac{1}{4R^k}\Big((k-2)\,a_k' - k\,b_k + (k+2)\left(b_{k+2} - a_{k+2}'\right)\Big), \qquad k = 2, 3, \ldots$$

и a, b, c *— произвольные действительные постоянные.*

Доказательство. Используем представление моногенной функции $\Phi : \mathcal{D}_R \longrightarrow \mathbb{B}$ через две аналитические функции F, F_0 комплексной переменной $z = x + iy \in D_z := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \zeta = x + e_2 y \in \mathcal{D}_R\}$ (см. [3 — 5]):

$$\Phi(\zeta) = F(z)e_1 - \left(\frac{iy}{2}\,F'(z) - F_0(z)\right)\rho \qquad \forall\,\zeta = x + ye_2 \in \mathcal{D}_R. \qquad (10)$$

Используем также представление функций F и F_0 степенными рядами:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad F_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(0)} z^k\,, \qquad (11)$$

где коэффициенты c_k и $c_k^{(0)}$ подлежат определению.

После подстановки выражений (11) в равенство (10) будем иметь

$$\Phi(\zeta) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\left(z^k - \frac{ik}{2} y\, z^{k-1}\rho\right) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(0)} z^k \rho\,. \qquad (12)$$

Используя полярные координаты (r, θ) и соотношения $z = x + iy = r\exp\{i\theta\}$, $y = r\sin\theta = r\frac{\exp\{i\theta\} - \exp\{-i\theta\}}{2i}$, переписываем равенство (12) в виде

$$\Phi(\zeta) = c_0 + c_0^{(0)}\rho + \sum_{k=1}^{\infty} r^k\Big(c_k + c_k^{(0)}\rho\Big)\exp\{ik\theta\} -$$

$$-\frac{\rho}{4}\sum_{k=1}^{\infty} r^k k c_k\Big(\exp\{ik\theta\} - \exp\{i(k-2)\theta\}\Big). \qquad (13)$$

Подставляя выражение

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, r^k c_k \exp\{i(k-2)\theta\} = rc_1 \exp\{-i\theta\} + 2r^2 c_2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)\, r^{k+2} c_{k+2} \exp\{ik\theta\}, \qquad \rho = 2 + 2ie_2$$

в равенство (13) и используя при этом равенство $\rho = 2 + 2ie_2$ и обозначения $\alpha_k := \operatorname{Re} c_k$, $\beta_k := \operatorname{Im} c_k$, $\alpha_k^{(0)} := \operatorname{Re} c_k^{(0)}$, $\beta_k^{(0)} := \operatorname{Im} c_k^{(0)}$, получаем следующие выражения компонент U_1, U_3 разложения (2) искомой функции $\Phi(\zeta)$:

$$U_1(r\cos\theta, r\sin\theta) = \alpha_0 + 2\alpha_0^{(0)} + \alpha_2 r^2 + \frac{1}{2}\alpha_1 r\cos\theta + \frac{1}{2}\beta_1 r\sin\theta +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(2\alpha_k^{(0)} + \alpha_k\left(1 - \frac{k}{2}\right) + \alpha_{k+2}\left(1 + \frac{k}{2}\right) r^2\right)\cos k\theta -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(2\beta_k^{(0)} + \beta_k\left(1 - \frac{k}{2}\right) + \beta_{k+2}\left(1 + \frac{k}{2}\right) r^2\right)\sin k\theta\,, \tag{14}$$

$$U_3(r\cos\theta, r\sin\theta) = -2\beta_0^{(0)} - \beta_2 r^2 - \frac{1}{2}\beta_1 r\cos\theta + \frac{1}{2}\alpha_1 r\sin\theta -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(2\beta_k^{(0)} - \frac{k}{2}\,\beta_k + \beta_{k+2}\left(1 + \frac{k}{2}\right) r^2\right)\cos k\theta -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(2\alpha_k^{(0)} - \frac{k}{2}\,\alpha_k + \alpha_{k+2}\left(1 + \frac{k}{2}\right) r^2\right)\sin k\theta\,. \tag{15}$$

Будем искать коэффициенты c_k, $c_k^{(0)}$ рядов (11) в предположении, что эти ряды и ряд $yF'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kc_k y z^{k-1}$ равномерно и абсолютно сходятся на окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$. Следствием этого предположения является то, что ряды (14), (15) также равномерно и абсолютно сходятся на указанной окружности и справедливы равенства

$$U_m(R\cos\theta, R\sin\theta) = \tilde{u}_m(\theta) \qquad \forall\,\theta \in [0, 2\pi]\,, \quad m = 1, 3\,.$$

Подставляя в эти равенства соответственно выражения (14), (6) и (15), (7), а затем приравнивая коэффициенты при $\cos k\theta$ и $\sin k\theta$ из левых и правых частей равенств, получаем систему уравнений для нахождения неизвестных α_k , β_k , $\alpha_k^{(0)}$, $\beta_k^{(0)}$:

$$\alpha_0 + 2\alpha_0^{(0)} + \alpha_2 R^2 = \frac{a_0}{2}, \tag{16}$$

$$R\left(2\alpha_1^{(0)} + \alpha_1 + \frac{3}{2}\,\alpha_3\, R^2\right) = a_1, \tag{17}$$

$$R^k\left(2\alpha_k^{(0)} + \alpha_k\left(1 - \frac{k}{2}\right) + \alpha_{k+2}\left(1 + \frac{k}{2}\right) R^2\right) = a_k, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{18}$$

$$-R\left(2\beta_1^{(0)} + \frac{3}{2}\,\beta_3\, R^2\right) = b_1, \tag{19}$$

$$-R^k\left(2\beta_k^{(0)} + \beta_k\left(1 - \frac{k}{2}\right) + \beta_{k+2}\left(1 + \frac{k}{2}\right) R^2\right) = b_k, \ \ k = 2, 3, \ldots, \tag{20}$$

$$-2\beta_0^{(0)} - \beta_2\, R^2 = \frac{a_0'}{2}, \tag{21}$$

$$-R\left(2\beta_1^{(0)} + \frac{3}{2}\,\beta_3\, R^2\right) = a_1', \tag{22}$$

$$-R^k\left(2\beta_k^{(0)} - \frac{k}{2}\,\beta_k + \beta_{k+2}\left(1 + \frac{k}{2}\right) R^2\right) = a_k', \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{23}$$

$$-R\left(2\alpha_1^{(0)} - \alpha_1 + \frac{3}{2}\,\alpha_3\, R^2\right) = b_1', \tag{24}$$

$$-R^k\left(2\alpha_k^{(0)} - \frac{k}{2}\,\alpha_k + \alpha_{k+2}\left(1 + \frac{k}{2}\right) R^2\right) = b_k', \quad k = 2, 3, \ldots . \tag{25}$$

Из равенств (19), (22) следует, что необходимым условием разрешимости системы уравнений (16) — (25) является равенство коэффициентов Фурье: $a_1' = b_1$, которое, очевидно, равносильно равенству (8). Покажем, что при выполнении этого условия система уравнений (16) — (25) разрешима.

Из равенств (17), (24) находим

$$\alpha_1 = \frac{1}{2R}\left(a_1 + b_1'\right), \tag{26}$$

из равенств (18), (25) находим

$$\alpha_k = \frac{a_k + b'_k}{R^k}\,, \qquad k = 2, 3, \ldots\,, \tag{27}$$

а из равенств (20), (23) —

$$\beta_k = \frac{a'_k - b_k}{R^k}\,, \qquad k = 2, 3, \ldots\,. \tag{28}$$

Поскольку равенства (16) — (25), не содержат ни β_0, ни β_1, то β_0 и β_1 могут быть произвольными действительными числами, которые обозначим соответственно через b и c.

После подстановки выражений (27) в (25) получаем равенства

$$\alpha_k^{(0)} = \frac{1}{4R^k}\Big(ka_k + (k-2)\,b'_k - (k+2)\,\big(a_{k+2} + b'_{k+2}\big)\Big), \quad k = 2, 3, \ldots\,,$$

а после подстановки выражений (28) в (23) — равенства

$$\beta_k^{(0)} = \frac{1}{4R^k}\Big((k-2)\,a'_k - k\,b_k + (k+2)\,\big(b_{k+2} - a'_{k+2}\big)\Big), \quad k = 2, 3, \ldots\,.$$

После подстановки выражения (26) и выражения (27) для α_3 в (24) находим

$$\alpha_1^{(0)} = \frac{1}{4R}\,(a_1 - 3a_3 - 3b'_3 - b'_1)\,,$$

после подстановки выражения (28) для β_3 в (19) находим

$$\beta_1^{(0)} = \frac{1}{4R}\,(3b_3 - 3a'_3 - 2b_1)\,,$$

а после подстановки выражения (28) для β_2 в (21) —

$$\beta_0^{(0)} = \frac{1}{4}\,(2b_2 - 2a'_2 - a'_0)\,.$$

Наконец, учитывая, что α_0 и $\alpha_0^{(0)}$ входят только в уравнение (16), в котором α_2 определено равенством (27), заключаем, что

$$\alpha_0^{(0)} = \frac{1}{4}\,(a_0 - 2a_2 - 2b'_2 - 2a)\,, \qquad \alpha_0 = a,$$

где a — произвольное действительное число.

Таким образом, установлено, что все коэффициенты c_k, $c_k^{(0)}$ рядов (11) вычисляются по указанным в формулировке теоремы формулам. Отсюда с учетом условия $\tilde{u}_1, \tilde{u}_3 \in \mathcal{F}_\alpha$ следует, что существуют постоянные M_1 и M_2 такие, что

$$|c_k| \le \frac{M_1}{R^k}\frac{1}{k^{2+\alpha}}\,, \qquad |c_k^{(0)}| \le \frac{M_2}{R^k}\frac{1}{k^{1+\alpha}}\,, \qquad k = 2, 3, \dots\,.$$

Из последних оценок очевидным образом следует равномерная и абсолютная сходимость на окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ рядов (11) и ряда $yF'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kc_k yz^{k-1}$, что делает обоснованными сделанные в ходе доказательства предположения относительно указанных рядов.

Для завершения доказательства остается заметить, что коэффициенты ряда (9) и рядов (11) связаны между собой соотношениями $C_k = c_k + c_k^{(0)}\rho$ при $k = 0, 1, \dots$.

Очевидно, что условие (8) совпадает с условием

$$\int\limits_{\partial\mathcal{D}_r} u_1\,dx + u_3\,dy = 0\,,$$

необходимость и достаточность которого для разрешимости (1-3)-задачи для круга установлена в работе [7].

Заметим, что при выполнении условий Теоремы 1 решение (9) (1-3)-задачи является моногенной функцией в некоторой окрестности замкнутого круга $\overline{\mathcal{D}_R}$.

Заметим также, что оценки вида (4) для коэффициентов Фурье заданных граничных функций (5) являются более слабыми ограничениями, чем условия, при которых соответствующие краевые задачи плоской теории упругости для круга решены в монографиях [14, с. 404] и [15, с. 189].

Автор признателен профессору С. А. Плаксе за внимание к работе, полезные советы и замечания.

Список литературы

[1] Ковалев В. Ф., Мельниченко И. П. *Бигармонические функции на бигармонической плоскости* // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1981. — № 8. — С. 25—27.

[2] Мельниченко И. П. *Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга* // Укр. мат. журн. — 1986. — **38**, № 2. — С. 252—254.

[3] Грищук С. В., Плакса С. А. *Моногенные функции в бигармонической плоскости* // Доп. НАН України. — 2009. — № 12. — С. 13—20.

[4] Грищук С. В., Плакса С. А. *Моногенные функции в бигармонической алгебре* // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 12. — С. 1587—1596.

[5] Plaksa S. A., Gryshchuk S. V., Shpakivskyi V. S. *Commutative algebras of monogenic functions associated with classic equations of mathematical physic* // Complex Analysis and Dynamical Systems IV. — Contemporary Mathematics. — 2011. — **553**. — Amer. Math. Soc., Providence, RI. — P. 245—258.

[6] Ковалев В. Ф. *Бигармоническая задача Шварца.* —Киев, 1986. — 19 с. — (Препр. / Ін-т математики АН УССР; 86.16).

[7] Gryshchuk S. V., Plaksa S. A. *Schwartz-type integrals in a biharmonic plane* // International J. of Pure and Applied Mathematics. — 2013. — **83**, № 1. — P. 193—211.

[8] Смирнов В. И. *Курс высшей математики.* — Том 2. — Москва: Наука, 1974. — 656 с.

[9] Джексон Д. *Ряды Фурье и ортогональные полиномы.* — Москва: Изд. иностр. лит-ры, 1948. — 260 с.

[10] Привалов И. И. *Ряды Фурье.* — Москва–Ленинград: Гос. техиздат, 1934. — 164 с.

[11] Толстов Г. П. *Ряды Фурье.* — Москва: Наука, 1980. — 384 с.

[12] Векуа И. Н., Рухадзе А. К. *Задача кручения кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем* // Изв. АН СССР. — 1933. — № 3. — С. 373—386.

[13] Лурье А. И. *Теория упругости.* — Москва: Наука, 1970. — 940 с.

[14] Партон В. З., Перлин П. И. *Методы математической теории упругости.* — Москва: Наука, 1981. — 688 с.

[15] Мусхелишвили Н. И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* — Москва: Наука, 1966. — 708 с.

[16] Каландия А. И. *Методы математической двумерной упругости.* — Москва: Наука, 1973. — 304 с.