Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 4–5, 450–465

УДК 517.54

***Е. П. Долженко***

*(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия)*

# Модули непрерывности и производные конформных отображений

(Обзор результатов)

**eugen@ngcom.ru**

*Светлой памяти Промарза Меликовича Тамразова посвящается*

Первый раздел работы содержит оценки модулей непрерывности конформных отображений произвольной жордановой области на другую область такого же типа в зависимости от "качества" их границ. При этом качество жордановой кривой характеризуется её *модулем колебания*, а в случае конечности её длины — ещё и *модулем спрямляемости*. В разделе 2 вводится новая сугубо локальная характеристика *степени* гладкости гладкой граничной дуги области $G$ в заданной её точке $t$ и изучается поведения вблизи $t$ производной конформного отображения $G$ на единичный круг. В разделе 3 для конформных отображений $\varphi$ областей на круг утверждается дифференцируемость (по $z$) $\varphi$ на выпуклых и вогнутых достижимых граничных дугах, приводится критерий непрерывности $\varphi'$ в заданной точке дуги.

The first chapter of this work contains estimates of the moduli of continuity of conformal mappings of an arbitrary Jordan domain onto another domain of the same type. These estimates depend on a certain "quality" of the boundaries of the domains; this "quality" of a Jordan curve is characterized by its modulus of oscillation and in the case of finite length also by its modulus of rectifiability. In Chapter 2 we introduce a new local characteristic of the degree of smoothness of a smooth boundary arc of a domain $G$ at its point $t$ and study the behavior of the derivative of a conformal mapping of $G$ onto the unit disc in a neighborhood of $t$. In Chapter 3, for a conformal mapping $\varphi$ of a domain onto the unit disc we prove the differentiability of $\varphi$ in $z$ on convex and concave accessible boundary arcs and give a criterion of continuity of $\varphi'$ at a given point of the arc.

**1. Введение.** Теорема Б. Римана утверждает, что всякую расположенную на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ односвязную область $G$ с непустой границей $\partial G$, не вырожденной в единственную точку, можно с помощью некоторой однозначной и однолистной аналитической функции $w = f(z)$ комплексного переменного конформно отобразить на любую другую заранее заданную односвязную область $Q$ также с непустой и не вырожденной в точку границей $\partial Q$. Если при этом области $G$ и $Q$ ограничены и границы их суть жордановы контуры, то по теореме К. Каратеодори $f(z)$ непрерывно продолжается на $\partial G$ до гомеоморфизма замыкания $\overline{G}$ области $G$ на замыкание $\overline{Q}$ области $Q$. Эта замечательная теорема имеет чисто качественный характер, поскольку она не указывает каких-либо количественных зависимостей метрических свойств (скажем, *гладкостных* в каком-либо смысле) отображающей функции $f(z)$ от метрико-геометрических свойств кривых $\partial G$ и $\partial Q$. В случае обычной гладкости этих кривых вопрос о таких связях решают (при некоторых дополнительных условиях) известные теоремы О. Д. Келлога [1], С. Е. Варшавского [2, 3], С. Е. Варшавского и К. Поммеренке [4], Е. М. Дынькина [5] (подробнее об этом см. ниже начало раздела 2).

В [3] рассмотрены также конформные отображения $w = \psi(z)$ круга $D$ на односвязные области $Q$ с жордановыми спрямляемыми границами $L = \partial Q$ из более широкого класса кривых, чем гладкие. Именно, речь идет о таких кривых $L$, что для любых двух точек $w', w'' \in L$ длина $|L(w', w'')|$ кратчайшей дуги $L(w', w'')$ из двух дуг контура $L$ с концами в этих точках по величине соизмерима с

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант No. 11-01-00952a).

длиной хорды $[w', w'']$ этой дуги, то есть $|w' - w''| \le |L(w', w'')| \le \le c|w' - w''|$, где $c = c(L) > 1$ не зависит от $w'$ и $w''$ (такие кривые $L$ называют кривыми М. А. Лаврентьева, см. [3]). В этом случае для модуля непрерывности $\omega(\psi, \overline{D}, \delta)$ функции $\psi(z)$ на $\overline{D}$ в [3] получено неравенство $\omega(\psi, \overline{D}, \delta) \le B(\psi)\delta^\alpha$, где $B(\psi) > 0$ не зависит от $\delta \ge 0$, а $\alpha = 2/(c+1)^2$ $(0 < \alpha < 1/2)$.

**2. Отображения областей с произвольными жордановыми границами.** Все результаты этого раздела содержатся в работе автора [6].

В приводимых ниже теоремах качество произвольной жордановой кривой $L$ характеризуется её *модулем колебания* $d(L;\delta)$, а в случае спрямляемости $L$ — также и более узкой и чувствительной характеристикой — её *модулем спрямляемости* $m(L;\delta)$ (см. ниже п. 1.1.1.). Эти понятия введены автором в работах [7, 8] (см. также [9 — 11]). При этом "гладкость" отображающих функций характеризуется их обычными модулями непрерывности. Результаты настоящего раздела всегда содержательны в том смысле, что правые части приводимых в теоремах оценок для модулей непрерывности $\omega(\delta)$ рассматриваемых конформных отображений стремятся к нулю при $\delta \to 0$. Результатов такой общности до сих пор не было.

**2.1. Определения и обозначения.**

**2.1.1. Модуль колебания и модуль спрямляемости.** *Модулем колебания* $d(L;\delta)$ жордановой кривой $L$ (замкнутой или разомкнутой; в случае разомкнутой кривой $L$, то есть дуги, она может содержать или не содержать свои концы) назовем функцию

$$d(L;\delta) := \sup\{d(L;z,t) : z,t \in L, |z-t| \le \delta\} \quad (\delta \ge 0), \tag{1}$$

где $d(L;z,t)$ обозначает либо диаметр дуги кривой $L$ с концами $z$ и $t$ — в случае разомкнутой кривой $L$, либо меньший (точнее, не больший) из диаметров двух дуг кривой $L$ с концами $z$ и $t$ — в случае замкнутой кривой $L$. Очевидно, $d(L;\delta) \le \operatorname{diam}(L)$, где $\operatorname{diam}(L) := \sup\{|z-t| : z,t \in L\}$ — диаметр кривой $L$.

Для спрямляемых жордановых кривых $L$ в [7] введена ещё одна характеристика их "качества" — *модуль спрямляемости* $m(L;\delta)$:

$$m(L;\delta) := \sup\{m(L;z,t) : z,t \in L, |z-t| \le \delta\} \quad (\delta \ge 0), \tag{2}$$

где $m(L; z, t)$ обозначает либо длину дуги $L(z, t) \subset L$ с концами $z$, $t$ в случае разомкнутой кривой $L$, либо меньшую (точнее, не большую) из длин двух дуг кривой $L$ с концами $z$, $t$ в случае замкнутой кривой $L$. Для общности записи будем считать $m(L; \mathrm{diam}(L)) = +\infty$ в случае ограниченной неспрямляемой жордановой кривой $L$.

**2.1.2. Классы $J(g)$ и $J_0(g)$, $J(g, \varepsilon)$ и $J_0(g, \varepsilon)$ жордановых кривых.** Пусть функция $g(x)$ определена и не убывает при $x \geq 0$ (она может иметь положительные разрывы-скачки), $g(x) \geq x$ при всех $x \geq 0$, $g(0) = g(0+) = 0$. Через $J(g)$ и $J(g, \varepsilon)$ ($\varepsilon = \mathrm{const} > 0$) обозначим семейства всех жордановых кривых $L$ (замкнутых и разомкнутых, с концами и без них), для которых выполнение неравенства $d(L; \delta) \leq$ $\leq g(\delta)$ (см. (1)) требуется соответственно при всех $\delta \geq 0$ или же *лишь при* $\delta \in [0, \varepsilon]$. Аналогично, $L \in J_0(g)$ либо $L \in J_0(g, \varepsilon)$ в зависимости от того, выполнение неравенства $m(L; \delta) \leq g(\delta)$ (см. (2)) требуется для всех $\delta \geq 0$ или же лишь для $\delta \in [0, \varepsilon]$. Очевидно, что каждый из этих 4-х классов кривых не сузится, если $g(x)$ заменить какой-либо функцией $g_1(x) \geq g(x)$ (при всех $x \geq 0$) с теми же общими свойствами, что и у $g(x)$. Очевидно также, что $J_0(g) \subset J(g)$, $J_0(g, \varepsilon) \subset$ $\subset J(g, \varepsilon)$, при этом с ростом $\varepsilon$ классы $J(g, \varepsilon)$, $J_0(g, \varepsilon)$ не расширяются и $J(g) = \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} J(g, \varepsilon)$, $J_0(g) = \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} J_0(g, \varepsilon)$. Спрямляемые жордановы дуги и контуры $\Gamma$ называются дугами и контурами Лаврентьева (или лаврентьевскими, см. Введение) с постоянной $c \geq 1$, если они принадлежат классу $J_0(g)$ при $g(x) \leq cx$ (для всех $x \geq 0$). Если при некотором $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$ и $c = \mathrm{const} \geq 1$ имеем $\Gamma \in J_0(g, \varepsilon)$ при $g(x) \leq cx$ для всех $x \in [0, \varepsilon]$, то кривую $\Gamma$ назовём *обобщенно лаврентьевской* (с постоянной $c$ и параметром $\varepsilon$).

Важно отметить, что *каждая жорданова кривая $L$ принадлежит некоторому классу $J(g)$ и всем классам $J(g, \varepsilon)$ с некоторым $g$.* В качестве $g(x)$ можно взять, например, функцию $g(x) \equiv d(L; x)$ при $x \in [0, \mathrm{diam}(L)]$, $g(x) \equiv d(L; \mathrm{diam}(L)) + (x - d(L; \mathrm{diam}(L)))^+$ при $x \geq \mathrm{diam}(L)$ (здесь, как обычно, $a^+ := 0$ при $a \leq 0$, $a^+ := a$ при $a \geq 0$). Все требуемые свойства этой функции $g(x)$ отражают очевидные свойства модулей колебания кривых $L$. Аналогично, *каждая спрямляемая жорданова кривая $L$ принадлежит некоторому классу $J_0(g)$ и всем классам $J_0(g, \varepsilon)$ с этим $g$.*

О причинах введения классов $J(g, \varepsilon)$ и $J_0(g, \varepsilon)$ см. [6]. В связи с этим сделаем ещё одно замечание: *если $L$ — замкнутая спрямляемая* *жорданова кривая, и при некотором постоянном* $c > 1$ *верно неравенство* $m(L;\delta) \le c\delta$ *для любого* $\delta \ge 0$*, то* $c \ge \pi/2$*, а равенство* $c = \pi/2$ *возможно лишь в случае, если* $L$ *— окружность.* Это же означает, что зависящие от $c$ оценки для модулей непрерывности конформных отображений круга $D$ на области с жордановыми спрямляемыми границами класса $J_0(g)$ при $g(x) \le cx$ могут работать лишь при $c \ge \pi/2$. Введение свободных от такого недостатка классов $J(g,\varepsilon)$ и $J_0(g,\varepsilon)$ вызвано, в частности, и этим тоже.

Введем некоторые обозначения, используемые ниже. Пусть $G$ — односвязная область комплексной плоскости с границей $\partial G$, $\Gamma$ — ограниченная открытая достижимая из $G$ жорданова дуга ее границы (в частности, может быть $\Gamma = \partial G$). Напомним, что жорданова кривая $\Gamma$ — разомкнутая (иначе говоря, дуга с концами или без них, то есть дуга замкнутая или открытая соответственно) или замкнутая кривая (то есть контур) на границе области $G$ называется достижимой из $G$, если найдется такая односвязная область $\Omega = \Omega(G,\Gamma) \subset G$ с жордановой границей $\partial\Omega$, что $\partial\Omega \cap \partial G = \overline{\Gamma}$.

Далее, пусть $w = \varphi(z)$ — некоторое однолистное конформное отображение этой области на единичный круг $D$, $w = \psi(z)$ — обратное однолистное конформное отображение единичного круга $D$ на эту область ($\psi(z) \equiv \varphi^{-1}(z)$, $z \in D$), $\gamma := \varphi(\Gamma) \subset C := \partial D$.

Если функция $y = u(x)$ определена и строго возрастает при $x \ge 0$ (она может быть разрывной), $u(0) = u(0+) = 0$, $u(x) \ge x$, то обратная к $u(x)$ функция $x = u^{-1}(y)$ $(y \ge 0)$ непрерывна (разрыву-скачку величины $h = h(x_0) > 0$ функции $y = u(x)$ в некоторой точке $x_0 > 0$ соответствует отрезок длины $h$ постоянства функции $x = u^{-1}(y)$). Фиксируем некоторое число $a > 0$ и положим (см. [7, 8, 6])

$$U(a;x) = U(u,a;x) := \int\limits_a^x \frac{dy}{u^{-1}(y)}\,, \quad U(x) := U(u,1;x)\ (x > 0)\,.$$

**Замечание.** Легко видеть, что на интервале $(0,+\infty)$ функция $y = U(a;x)$ определена, непрерывна, выпукла вверх и строго возрастает от $U(a;0) := -\infty$ до $U(a;+\infty) := +\infty$. Обратная же к $U(a;x)$ функция $U^{-1}(a;y)$ определена, непрерывна, положительна и выпукла вниз на $(-\infty,+\infty)$, строго возрастает на $[-\infty,+\infty]$ от $U^{-1}(a;-\infty) := 0$ до $U^{-1}(a;+\infty) := +\infty$ (её график похож на график функции $x = ae^y$), $U^{-1}(a;0) = a$.

Приводимые ниже функции $d_g(x)$ и $m_g(x)$ связаны с решениями двух экстремальных геометрических задач, см. лемму 2.1 и [6]. Так же, как по функции $u(x)$ построена $U(a;x)$, по функциям $d_g(x)$ и $m_g(x)$ строим функции $D_g(a;x)$ и $M_g(a;x)$:

$$d_g(x) := \frac{\pi^2}{4}\, g^2(\sqrt{x}) + \frac{x}{2}\,, \quad D_g(a;x) := \int\limits_a^x \frac{dy}{d_g^{-1}(y)}\,,$$

$$m_g(x) := \frac{1}{4}(g(\sqrt{x}) + \sqrt{x})^2, \quad M_g(a;x) := \int\limits_a^x \frac{dy}{m_g^{-1}(y)}\,.$$

По сказанному об $U^{-1}(a;y)$, функции $D_g^{-1}(a;y)$ и $M_g^{-1}(a;y)$ при $y \in$ $\in (-\infty,+\infty)$ непрерывно строго возрастают, положительны и выпуклы вниз, стремятся к 0 при $y \to -\infty$ и стремятся к $+\infty$ при $y \to +\infty$. Аналогично получается функция

$$\alpha(c) := \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arcctg}(4B(c)), \tag{3}$$

где $B(c) = c^2\,(\beta(c) - \sin\beta(c))/(2\beta^2(c)) \quad (B(1)=0)$, а $\beta(c)$ — решение уравнения $\beta/2 = c\,\sin(\beta/2)$ $(\beta(c) \in [0,\pi])$ (см. равенство (2.8) в работе [6]). Заметим, что функция $\alpha(c)$ при $c \in [1,+\infty)$ непрерывно строго убывает от $\alpha(1)=1$ до 0 и $\alpha(c) \to 1+$ при $c \to 1+$.

### 2.2. Отображения жордановых областей на круг.

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — односвязная ограниченная область плоскости $\mathbb{C}$ с жордановой границей $\Gamma \in J(g,\varepsilon)$, $w=\varphi(z)$ — однолистное конформное отображение этой области на единичный круг $D$. Тогда*

$$\omega(\varphi,\overline{G},\delta) \le A_1\,\sqrt{g(\delta)} \qquad \forall\,\delta \ge 0,$$

*где $A_1$ не зависит от $\delta$.*

**Следствие 1.1.** *Если граница $\Gamma$ ограниченной жордановой области $G$ принадлежит классу $J(g,\varepsilon)$ с $g(x) \le cx^k$ $\forall\,x \in [0,\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, $c > 0$ и $k \in (0,1]$ — некоторые постоянные, то для модуля непрерывности любого однолистного конформного отображения $w = \varphi(z)$ области $G$ на единичный круг $D$ верно неравенство*

$$\omega(\varphi,\overline{G},\delta) \le A\delta^{k/2} \quad \forall\,\delta \ge 0,$$

*где $A$ не зависит от $\delta$.*

**2.3. Отображения круга на жордановы области.**

**Теорема 2.** *Пусть* $w = \psi(z)$ — *однолистное конформное отображение единичного круга* $D$ *на ограниченную область* $G$ *с жордановой границей* $\Gamma \in J(g, \varepsilon)$. *Тогда*

$$\omega(\psi, \overline{D}, \delta) \le B\, g\left(\sqrt{D_g^{-1}(\log \delta)}\right) \quad (\delta \ge 0), \tag{4}$$

*где* $B$ *не зависит от* $\delta$.

**Следствие 2.1.** *Если в условиях теоремы* 2 *имеем* $\partial G \in J(g, \varepsilon)$ *с* $g(x) \le cx^k$ *при* $0 < x \le \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, $c > 1$ *и* $k \in (0, 1]$ *постоянны*), *то при* $0 \le \delta \le 2$ *справедливы неравенства:*

(a) $\omega(\psi, \overline{D}, \delta) \le A\, \delta^{n(c)}$ *с* $n(c) = 2/(\pi^2 c^2 + 2)$ *при* $k = 1$;

(b) $\omega(\psi, \overline{D}, \delta) \le N/(1+|\log \delta|)^{\nu(k)}$ *с* $\nu(k) = k^2/(2-2k)$ *при* $0 < k < 1$.
*Здесь положительные* $A$ *и* $N$ *не зависят от* $\delta$.

**Теорема 3.** *Пусть* $w = \psi(z)$ — *однолистное конформное отображение единичного круга* $D$ *на ограниченную область* $G$ *со спрямляемой жордановой границей* $\Gamma \in J(g, \varepsilon)$, *при этом* $\Gamma \in J_0(h, \eta)$. *Тогда*

$$\omega(\psi, \overline{D}, \delta) \le B_1\, g\left(\sqrt{M_h^{-1}(\log \delta)}\right) \quad \forall\, \delta \ge 0 \tag{5}$$

(*в правой части этого неравенства вместо* $g$ *можно написать* $h$). *Если при этом* $h(x) \le cx$ *при всех* $x \in [0, \eta]$ (*то есть* $\Gamma$ *является обобщенно лаврентьевской кривой с постоянной* $c = \mathrm{const} \ge 1$ *и параметром* $\eta = \mathrm{const} > 0$), *то верно и существенно более сильное неравенство*

$$\omega(\psi, \overline{D}, \delta) \le B_2\, \delta^{\alpha(c)} \quad \forall\, \delta \ge 0\,.$$

*Здесь положительные* $B_1$, $B_2$ *не зависят от* $\delta \ge 0$, $\alpha(c)$ — *как в* (3).

**Замечание.** Отметим, что в неравенствах (4) и (5) множители $g\left(\sqrt{D_g^{-1}(1; \log \delta)}\right)$ и $g\left(\sqrt{M_h^{-1}(1; \log \delta)}\right)$ зависят от $g$, $h$ и $\delta$, но не зависят от $\psi$, в то время как коэффициенты $B$ и $B_1$ не зависят от $\delta$, но зато зависят от $\psi$.

**Следствие 3.1.** *Если при условиях теоремы* 3 *имеем включение* $\Gamma \in J_0(cx, \varepsilon)$ *с* $c = \mathrm{const} > 1$ (*то есть в случае лаврентьевской* $\Gamma$), *то верно неравенство* $\omega(\psi, \overline{D}, \delta) \le B_2\, \delta^{\alpha(c)}$ *при всех* $\delta \ge 0$ ($B_2 > 0$ *и не зависит от* $\delta$).

**Замечание.** Для сравнения отметим, что при условии $\Gamma \in J_0(cx, \varepsilon)$ с помощью методов работы С. Е. Варшавского [3] при условиях теоремы 3 доказывается соотношение $\psi \in \operatorname{Lip}\alpha$, где $\alpha = 2/(c+1)^2 < 1/2$ при всех $c > 1$.

**Следствие 3.2.** *Если при условиях теоремы* 3 *имеем включение* $\Gamma \in J_0(cx^k, \varepsilon)$ *с* $c = \text{const} > 1$ *и* $0 < k = \text{const} < 1$*, то верно неравенство* $\omega(\psi, \overline{D}, \delta) \le B_3\,(1 + |\log\delta|)^{-\nu(k)}$ *при* $\nu(k) = k^2/(2-2k)$ ($B_3 > 0$ *и не зависит от* $\delta \in [0, 2]$).

**2.4. Отображения жордановых областей друг на друга.**

**Теорема 4.** *Пусть* $w = f(z)$ *— однолистное конформное отображение ограниченной односвязной области* $G$ *с жордановой границей* $\partial G \in J(g, \varepsilon)$ *на ограниченную односвязную область* $Q$ *с жордановой границей* $\partial Q \in J(q, \eta)$ ($\varepsilon > 0$, $\eta > 0$)*. Тогда*

$$\omega(f, \overline{G}, \delta) \le A^*\, q\left(\sqrt{D_q^{-1}(2^{-1}\log\, g(\delta))}\right) \quad \forall\, \delta \ge 0.$$

*Если при этом* $\partial Q \in J_0(h, \vartheta)$*, то*

$$\omega(f, \overline{G}, \delta) \le B^*\, q\left(\sqrt{M_h^{-1}(2^{-1}\log\, g(\delta))}\right) \quad \forall\, \delta \ge 0,$$

*и если при этом* $h(x) \le cx\ \ \forall\, x \in [0, \vartheta]$ ($c > 1$, $\vartheta > 0$)*, то также и*

$$\omega(f, \overline{G}, \delta) \le C^*\,(g(\delta))^{\alpha(c)/2} \quad \forall\, \delta \ge 0.$$

*Здесь положительные* $A^*$, $B^*$, $C^*$ *не зависят от* $\delta$*, а* $\alpha(c)$ *— как в* (3).

**Следствие 4.1.** *Если при условиях теоремы* 4 *верны неравенства* $g(x) \le M\,x^m$ *и* $q(x) \le N\,x^n$*, где* $M$, $N > 0$ *и* $m$, $n \in (0, 1]$ *постоянны, то* $\omega(f, \overline{G}, \delta) \le E\delta^k$ *с* $k = m\,(\pi(N+1)\,)^{-2}$ *при* $0 < m \le 1$, $n = 1$ *и* $\delta \ge 0$; $\omega(f, \overline{G}, \delta) \le F\,(1 + |\log\delta|)^{-r}$ *с* $r = n^2/(2-2n)$ *при* $0 < m \le 1$, $0 < n < 1$ *и* $0 \le \delta \le \operatorname{diam}(G)$ ($\operatorname{diam}(G)$ *— диаметр области* $G$)*. Здесь положительные* $E$ *и* $F$ *не зависят от* $\delta$.

**2.5. Локальные формы теорем.**

**Теорема 5.** *Пусть* $G$ *— односвязная область плоскости* $\mathbb{C}$*,* $\Gamma$ *— ограниченная открытая достижимая жорданова дуга ее границы* $\partial G$*,* $\Gamma \in J(g, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$)*. Тогда любое однолистное конформное отображение* $w = \varphi(z)$ *области* $G$ *на единичный круг* $D$

*продолжается на замыкание дуги* $\Gamma$ *до гомеоморфизма* $\overline{\Gamma}$ *замыканию* $\bar{\gamma}$ *дуги* $\gamma = \varphi(\Gamma)$ *и гомеоморфизма множества* $G \cup \Gamma$ *множеству* $D \cup \gamma$*, причем,*

$$\omega(\varphi, \overline{\Gamma}, \delta) \le A_1 \sqrt{g(\delta)} \quad \forall\, \delta \ge 0. \tag{6}$$

*При этом для каждого компакта* $E \subset G \cup \Gamma$ *справедливо неравенство*

$$\omega(\varphi, E, \delta) \le A_1(E) \sqrt{g(\delta)} \quad \forall\, \delta \ge 0.$$

*Здесь конечные положительные величины* $A_1$ *и* $A_1(E)$ *не зависят от* $\delta$*.*

**Замечание.** При условиях теоремы 5, если $R$ — обычное (евклидово) расстояние точки $b = \varphi^{-1}(0)$ от дуги $\Gamma$, а число $r \in (0, \varepsilon]$ удовлетворяет неравенству $9g(r) < 2\pi R$, то

$$\omega(\varphi, \overline{\Gamma}, \delta) \le A_0(\varphi) \sqrt{g(\delta)}\, \forall\, \delta \in [0, r]; \quad A_0(\varphi) = 3K_\Lambda \sqrt{|\varphi'(b)|}\,,$$

$K_\Lambda$ — постоянная Лаврентьева (см. [12] или [6], §2, п. 2.3).

**Теорема 6.** *Пусть* $w = \psi(z)$ — *однолистное конформное отображение единичного круга* $D$ *на односвязную область* $G$*,* $\Gamma$ — *ограниченная открытая достижимая жорданова дуга границы этой области,* $\Gamma \in J(g, \varepsilon)$*,* $\gamma = \psi^{-1}(\Gamma)$*. Тогда для каждого компакта* $E \subset D \cup \gamma$ *верно неравенство*

$$\omega(\psi, E, \delta) \le B\, g\left(\sqrt{D_g^{-1}(\log \delta)}\right) \quad \forall\, \delta \ge 0. \tag{7}$$

*Если при этом* $\Gamma \in J_0(h, \eta)$ *при некотором* $\eta > 0$*, то также*

$$\omega(\psi, E, \delta) \le B_0\, g\left(\sqrt{M_h^{-1}(\log \delta)}\right) \quad \forall\, \delta \ge 0 \tag{8}$$

(*в правой части этого неравенства вместо* $g$ *можно взять* $h$)*. И если к тому же* $h(x) \le cx$ *при всех* $x \in [0, \eta]$ $(c = \mathrm{const} \ge 1)$*, то верно и существенно более сильное неравенство*

$$\omega(\psi, E, \delta) \le B_1\, \delta^{\alpha(c)} \quad \forall\, \delta \ge 0. \tag{9}$$

*Здесь положительные* $B$, $B_0$, $B_1$ *не зависят от* $\delta$*, а* $\alpha(c)$ — *как в* (3)*.*

**Замечание.** Неравенства (7) — (9), вообще говоря, не верны для компакта-дуги $E = \bar{\gamma}$ (сравните с неравенством (6) теоремы 5).

**Замечание.** Потребовав от достижимой жордановой дуги $\Gamma$ лишь ее спрямляемости, можно утверждать, что граничная функция $\psi(\zeta)$ $(\zeta \in \gamma)$ дифференцируема вдоль $\gamma$ почти в каждой точке этой дуги как функция с конечным полным изменением $\mathrm{Var}_\gamma(\psi) = |\Gamma|$. На самом деле при этом $f(z)$ дифференцируема еще и по $z \in D \cup \gamma$ также почти в каждой точке $\zeta_0 \in \gamma$. Более общо́, если $\psi(\zeta)$ $(\zeta \in \gamma)$ имеет в каждой точке $\zeta_0$ множества $E_n \subset \gamma$ дифференциал Пеано $n$-го порядка $(n \geq 1)$ по переменной $\zeta \in \gamma$ (это означает наличие соотношения $\psi(\zeta) - \psi(\zeta_0) = P(\zeta - \zeta_0) + o((\zeta - \zeta_0)^n)$ при $\zeta - \zeta_0 \to 0$, где $P(z)$ — полином степени $\leq n$), то почти в каждой точке $\zeta_0 \in E_n$ функция $\psi(z)$ имеет дифференциал Пеано того же порядка $n$ также и по переменной $z \in D \cup \gamma$ (см. [13]).

**Теорема 7.** *Пусть $G$ и $Q$ — односвязные ограниченные области комплексной плоскости, $\Gamma$ и $K$ — открытые достижимые жордановы дуги их границ соответственно, причём $\Gamma \in J(g, \varepsilon)$, $K \in J(q, \eta)$. Тогда если $w = f(z)$ — однолистное конформное отображение $G$ на $Q$, причём $K = f(\Gamma)$, то для любого компакта $E \subset G \cup \Gamma$ имеем неравенство*

$$\omega(f, E, \delta) \leq C^* \, q\left(\sqrt{D_q^{-1}(2^{-1} \log\, g(\delta))}\right) \quad \forall\, \delta \geq 0. \tag{10}$$

*Если при этом $K \in J_0(h, \vartheta)$, то*

$$\omega(f, E, \delta) \leq C_0^* \, q\left(\sqrt{M_h^{-1}(2^{-1} \log g(\delta))}\right) \quad \forall\, \delta \geq 0, \tag{11}$$

*и если к тому же $h(x) \leq cx$ при всех $x \in [0, \vartheta]$ $(c = \mathrm{const} \geq 1$, $\vartheta = \mathrm{const} > 0)$, то верно и более точное неравенство*

$$\omega(f, E, \delta) \leq C_1^* \cdot (g(\delta))^{\alpha(c)/2} \quad \forall\, \delta \geq 0. \tag{12}$$

*Здесь конечные положительные величины $C^*$, $C_0^*$, $C_1^*$ и $\alpha(c) \leq 1$ не зависят от $\delta$, величина $\alpha(c)$ та же, что и в (3).*

**Замечание.** Если дуга $\Gamma$ — ляпуновская, или обобщенно ляпуновская (см. ниже теоремы A и B раздела 2), то при условиях теоремы 7 справа в неравенствах (10), (11) можно убрать множитель $2^{-1}$, а в неравенстве (12) можно вместо $\alpha(c)/2$ взять $\alpha(c)$. Если же (обобщенно) ляпуновской является дуга $K$, то (12) запишется как $\omega(f, E, \delta) \leq C_2^* \sqrt{g(\delta)}$ $(\delta \geq 0)$. Наконец, если обе дуги $\Gamma$ и $K$ являются обобщенно ляпуновскими, то отображение $w = f(z)$ непрерывно дифференцируемо на $G \cup \Gamma$.

**3. Некоторые частные случаи областей.** Результаты этого раздела (кроме теорем A — C) получены совместно с С. В. Колесниковым. Сейчас они готовятся к печати в Вестнике Московского университета, серия 1 (Математика. Механика).

Приведем некоторые обозначения, которые нам понадобятся ниже.

Всюду в этом разделе $\Gamma$ — ограниченная открытая жорданова дуга границы $\partial G$ односвязной области $G$, достижимая из $G$ посредством некоторой односвязной жордановой области $\Omega(G, \Gamma) \subset G$ (см. выше п. 1.1.2; возможно, что $\Gamma = \partial G$); $z = z(s)$ — натуральное уравнение кривой $\Gamma$ в случае ее спрямляемости, $\vartheta(s) = \vartheta(\Gamma, s)$ — угол положительного направления касательной к гладкой кривой $\Gamma$ в точке $z(s)$ с положительным направлением действительной оси комплексной плоскости, $\omega(\vartheta, \Gamma, \delta)$ — модуль непрерывности функции $\vartheta(s)$. Как и выше, $\varphi$ — однолистное конформное отображение некоторой односвязной области $G$ комплексной плоскости на единичный круг $D$, $\psi = \varphi^{-1}$ — обратое отображение.

Приведем формулировки ранее опубликованных теорем, условия которых обеспечивают непрерывную дифференцируемость конформных отображений $w = \psi(z)$ круга $D$ на области $G$ с гладкими границами (продолженных по непрерывности на замыкание $\overline{D}$ круга $D$). Теоремы A и B приведены в осовремененных формулировках.

**Теорема A** (O. D. Kellogg [1]). *Если $G$ — односвязная ограниченная область с гладкой границей $\Gamma$ и функция $\vartheta(\Gamma, s)$ удовлетворяет условию* $\mathrm{Lip}\,\alpha$ *при некотором $\alpha \in (0, 1)$ (такие жордановы кривые $\Gamma$ — как замкнутые, так и разомкнутые — называют кривыми Ляпунова или ляпуновскими кривыми), то всякое однолистное конформное отображение $w = \psi(z)$ единичного круга $D$ на область $G$ непрерывно продолжается на $\overline{D}$ до гомеоморфизма $w = \psi(z)$ замкнутого круга $\overline{D}$ на $\overline{G}$ и продолженная функция $w = \psi(z)$ непрерывно дифференцируема на $\overline{D}$, а $\psi'(z)$ удовлетворяет на $\overline{D}$ условию* $\mathrm{Lip}\,\alpha$ *с тем же $\alpha$ и при этом $\psi'(z) \neq 0$.*

Отсюда легко следует, что при условиях теоремы A обратная к $w = \psi(z)$ функция $z = \varphi(w)$ непрерывно дифференцируема на $\overline{G}$, а $\varphi'(w)$ удовлетворяет на $\overline{G}$ условию $\mathrm{Lip}\,\alpha$ с тем же $\alpha$ и при этом $\varphi'(w) \neq 0$ на $\overline{G}$.

Непосредственным обобщением теоремы О. Д. Келлога является следующая

**Теорема B** (S. E. Warschawski [3]). *Если граница* $\Gamma$ *области* $G$ *удовлетворяет условию*

$$\int_0^2 \frac{\omega(\vartheta, \Gamma, v)}{v}\, dv < \infty$$

(*такие жордановы кривые* $\Gamma$ — *как замкнутые, так и разомкнутые — называют обобщенно ляпуновскими, или кривыми Дини–Ляпунова*), *то всякое однолистное конформное отображение* $w = \psi(z)$ *круга* $D$ *на область* $G$*, непрерывно продолженное на* $\overline{D}$*, непрерывно дифференцируемо на* $\overline{D}$*, причем*

$$\omega(\psi', \overline{D}, \delta) \leq C(\psi, \Gamma) \left( \int_0^\delta \frac{\omega(\vartheta, \Gamma, v)}{v}\, dv + \delta \int_\delta^2 \frac{\omega(\vartheta, \Gamma, v)}{v^2}\, dv \right),$$

*где* $C(\psi, \Gamma)$ *не зависит от* $\delta \in (0, 2]$.

Более слабое достаточное условие для непрерывности функции $\psi'(w)$ на замыкании $D$ (с более слабым заключением о величине модуля непрерывности этой функции) были получены К. Поммеренке и С. Е. Варшавским [4].

Нам понадобятся следующие определения. Пусть $\Gamma$ — спрямляемая жорданова кривая (замкнутая, или же разомкнутая с концами или без них), $\Gamma(z_1, z_2)$ — дуга кривой $\Gamma$ с концами $z_1, z_2 \in \Gamma$ в случае разомкнутой кривой $\Gamma$, либо, в случае замкнутости $\Gamma$, — та из двух дуг кривой $\Gamma$ с концами $z_1, z_2$, длина которой не превосходит длины другой дуги кривой $\Gamma$ с теми же концами $z_1, z_2$. При $\delta \geq 0$ положим

$$A(z_1, z_2) := \sup_{z \in \Gamma(z_1, z_2)} \left\{ \sqrt{\frac{|z_1 - z| + |z_2 - z|}{|z_1 - z_2|} - 1} \right\},$$

$$\eta(\Gamma, \delta) := \sup \left\{ A(z_1, z_2) : \ z_1, z_2 \in \Gamma, \ |z_1 - z_2| \leq \delta \right\}.$$

**Теорема C** (Ch. Pommerenke, S. E. Warschawski [4]). *Если*

$$\int_0^1 \frac{\eta(\Gamma, v)}{v}\, dv < \infty,$$

*то* $\psi(w)$ *непрерывно дифференцируема на* $\overline{D}$, $\psi'(w) \neq 0$ *и*

$$|\log \psi(w_1) - \log \psi(w_2)| \leq M \int_0^{\delta^{1-\varepsilon}} \frac{\eta(\Gamma, v)}{v}\, dv + M(\varepsilon) \delta^{\varepsilon/6}$$

$(0 < \varepsilon < 1/2, \ 0 < \delta \leq 1)$.

Привлекая такие понятия, как квазиконформные отражения, наименьшие уклонения функций от полиномов заданной степени, а также функциональные классы Бесова, Е. М. Дынькин [5] получил ряд теорем, в различных направлениях обобщающих теоремы A и B.

Введем ещё некоторые обозначения. Пусть $t \in \Gamma$, $D(t,r)$ — круг радиуса $r > 0$ с центром $t$; всюду ниже требуется существование такого $R_0 = R_0(G,\Gamma,t)$, что при $r \in (0,R_0]$ окружность $C(t,r) := \partial D(t,r)$ пересекается с $\Gamma$ ровно в двух точках и не имеет других пересечений с $\partial\Omega(G,\Gamma)$; ту из двух открытых дуг окружности $C(t,r)$ ($r \in (0,R_0]$), которая целиком лежит в области $\Omega(G,\Gamma)$, обозначим через $\Gamma(t,r)$.

Через $l(t,r)$ обозначим длину дуги $\varphi(\Gamma(t,r))$ и положим $G(t,r) = \Omega(G,\Gamma) \cap D(t,r)$. Положим

$$p(t,r) = 1 - \sqrt{\frac{\mathrm{mes}_2\, D(t,r)/2}{\mathrm{mes}_2\, G(t,r)}}\,, \quad F(t,R) = \frac{2}{\pi R^2} \iint\limits_{G(t,R)} |\varphi'(x+iy)|dxdy\,.$$

**Теорема 8.** *Если $t \in \Gamma$, $z \in \Omega(G,\Gamma)$ и $|z-t| \le R_0/2$, то имеем неравенство*

$$|\varphi(z) - \varphi(t)| \le 2\pi F(t,R_0) H(t,R_0;|z-t|)\,|z-t|,$$

$$H(t,R_0;u) := \exp\left\{2\int_{2u}^{R_0} \frac{p(t,r)}{r}\,dr\right\}.$$

**Следствие 8.1.** *Если при условиях теоремы 8 интеграл $\int_R^{R_0} (p(t,r)/r)\,dr$ ограничен сверху при $R \in (0,\, R_0]$, то*

$$|\varphi(z) - \varphi(t)| \le K|z-t|,$$

*где $z \in \Omega(G,\Gamma) \cup \Gamma$, $|z-t| < R_0/2$, а положительное число $K$ не зависит от $z$.*

**Теорема 9.** *Пусть жорданова кривая $\Gamma$ является гладкой, $t \in \Gamma$, $I(t,R) := \int_R^{R_0} (p(t,r)/r)\,dr$, $R \in (0,R_0]$. Тогда*

1) *если существует конечный предел $\lim\limits_{R\to 0+} I(t,R)$, то функция $\varphi'(z)$ имеет в точке $t$ конечный угловой предел;*

2) *если функция $\varphi'(z)$ имеет в точке $t$ отличный от нуля конечный угловой предел, то существует и предел $\lim\limits_{R\to 0+} I(t,R) > -\infty$.*

*Следовательно, при условии ограниченности интеграла $I(t,R)$ на полуинтервале $(0,\, R_0]$, функция $\varphi'(z)$ имеет в точке $t$ конечный угловой предел в том и только том случае, когда существует предел $\lim\limits_{R\to 0+} I(t,R)$.*

Из теоремы 8 следует

**Теорема 10.** *Если при некотором $a > 0$ интеграл $\int_R^a (p(t,r)/r)\,dr$ равномерно ограничен сверху при $t \in \Gamma$ и $R \in (0,a]$, то для каждой фиксированной точки $t \in \Gamma$ существует некоторая ее односторонняя окрестность $D(t,R) \cap \Omega(G,\Gamma)$ в которой функция $\varphi'(z)$ ограничена. Если при этом $\Gamma = \partial G$, то функция $\varphi'(z)$ ограничена в $G$.*

**4. Отображения выпуклых областей.** Результаты этого раздела, как и предыдущего, получены совместно с С. В. Колесниковым. Они опубликованы в работе [14].

Следующие две теоремы дают условия существования и локальной ограниченности, а также непрерывности производных конформных отображений $w = \varphi(z)$ областей $G$ на единичный круг $D$ и обратных отображений $z = \psi(w)$ круга $D$ на область $G$ в точках достижимых дуг $\Gamma \subset \partial G$ и дуг $\gamma = \varphi(\Gamma) \subset \partial D$. Всюду ниже $\Gamma$ является либо выпуклой, либо вогнутой относительно $\Omega(G,\Gamma)$ (см. п. 1.1.1) и не обязательно гладкой. Обозначим через $\nu$ меру Стилтьеса–Бореля на $\Gamma$, порожденную функцией $\vartheta(\zeta)$ (см. начало этого раздела). Очевидно, что в случае выпуклости достижимой дуги $\Gamma$ эта мера неотрицательна, а в случае вогнутости — неположительна. Определим потенциал $U_\nu(z)$ на плоскости $\mathbb{C}$ равенством

$$U_\nu(z) := \int_\Gamma \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\nu(\zeta).$$

**Теорема 11.** *Если открытая достижимая дуга $\Gamma$ границы области $G$ выпукла или вогнута относительно $G$, то функция $\varphi(z)$ имеет в каждой точке $\zeta \in \Gamma$ конечную или бесконечную производную $\varphi'(\zeta)$ относительно $\Omega(G,\Gamma) \cup \Gamma$, равную угловому пределу функции $\varphi'(z)$ в точке $\zeta$, а функция $\psi(w)$ имеет конечную или бесконечную производную $\psi'(\omega)$ в каждой точке $\omega \in \gamma$ относительно $D \cup \gamma$, равную угловому пределу функции $\psi'(w)$ в точке $\omega$. При этом в случае выпуклости дуги $\Gamma$ относительно $G$, функция $\varphi'(z)$ локально ограничена на множестве $\Omega(G,\Gamma) \cup \Gamma$, а в случае ее вогнутости — локально ограничена на множестве $D \cup \gamma$ функция $\psi'(w)$.*

Построен пример такой выпуклой ограниченной области $G_0$ с гладкой границей $\Gamma_0$, что функция $w = \varphi(z)$, конформно отображающая $G_0$ на единичный круг $D$, имеет ограниченную производную на $\overline{G_0}$, разрывную в некоторой точке $\zeta_0 \in \Gamma_0$.

**Следствие 11.1.** *Если область $G$ ограничена и выпукла, то конформное отображение $w = \varphi(z)$ её на круг имеет ограниченную производную $\varphi'(z)$ на $\overline{G}$ (так что, в частности, функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию Липшица $\mathrm{Lip}\,1$), причём в точках $\zeta \in \partial G$ $\varphi'(\zeta)$ совпадает с пределом $\varphi'(z)$, когда $z$ стремится к $\zeta$ из $G$ по путям, некасательным к $\partial G$. При этом в некоторых точках $\zeta \in \partial G$ функция $\varphi'(z)$ $(z \in \overline{G})$ может иметь разрыв.*

**Теорема 12.** *При выпуклости достижимой дуги $\Gamma \subset \partial G$ относительно области $\Omega(G, \Gamma)$ (возможно $\Gamma = \partial G = \partial\Omega(G, \Gamma)$) функция $\varphi'(z)$ непрерывна относительно $\Omega(G, \Gamma) \cup \Gamma$ в некоторой точке $\zeta_0 \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $-\infty < U_\nu(\zeta_0) \leq +\infty$ и потенциал $U_\nu(z)$ непрерывен в этой точке вдоль $\Gamma$. При вогнутости же достижимой дуги $\Gamma$ относительно области $\Omega(G, \Gamma)$ (очевидно, $\Omega(G, \Gamma) \neq G$) функция $\psi'(w)$ непрерывна по $w \in D \cup \gamma$ в точке $\omega_0 = \varphi(\zeta_0) \in \gamma$ тогда и только тогда, когда $-\infty \leq U_\nu(\zeta_0) < +\infty$ и потенциал $U_\nu(z)$ непрерывен в точке $\zeta_0$ вдоль $\Gamma$.*

**Следствие 12.1.** *В случае выпуклости достижимой дуги $\Gamma$ относительно области $G$ множество $E(\Gamma, \varphi') \subset \Gamma$ всех точек непрерывности функции $\varphi'(z)$ относительно $G \cup \Gamma$ таково, что множество $\Gamma \setminus E(\Gamma, \varphi')$ имеет первую категорию по Бэру на $\Gamma$. В случае же вогнутости достижимой дуги $\Gamma$ множество $E(\gamma, \psi') \subset \gamma$ всех точек непрерывности функции $\psi'(w)$ относительно $D \cup \gamma$ таково, что множество $\gamma \setminus E(\gamma, \psi')$ имеет первую категорию по Бэру на $\gamma$ (в частности, $E(\gamma, \psi')$ и $E(\Gamma, \varphi')$ являются множествами второй категории на каждой поддуге дуг $\Gamma$ и $\gamma$ соответственно).*

**Следствие 12.2.** *Пусть $G_1$ и $G_2$ — односвязные области на плоскости $\mathbb{C}$, $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ — их открытые достижимые граничные дуги, определяемые жордановыми подобластями $\Omega_1 = \Omega(G_1, \Gamma_1) \subset G_1$ и $\Omega_2 = \Omega(G_2, \Gamma_2) \subset G_2$ соответственно, причем, $\Gamma_1$ выпукла относительно $G_1$, а $\Gamma_2$ вогнута относительно $G_2$. Тогда, если функция $w = f(z)$ однолистно и конформно отображает $G_1$ на $G_2$ при условии $\Gamma_2 = f(\Gamma_1)$, то ее производная $f'(z)$ существует и локально ограничена на множестве $G_1 \cup \Gamma_1$.*

## Список литературы

[1] Kellogg O. D. *Harmonic functions and Green's integral* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1912. — **13**. — P. 109—132.

[2] Warschawski S. E. *On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1935. — **38**, № 2. — P. 310—340.

[3] Warschawski S. E. *On differentiability at the boundary in conformal mapping* // Proc. Amer. Math. Soc. — 1961. — **12**, № 4. — P. 614—620.

[4] Pommerenke Ch., Warschawski S. E. *On the quantitative boundary behavior of conformal maps* // Comment. Math. Helvetici. — 1982. — **57**. — P. 107—129.

[5] Дынькин Е. М. *Неаналитический принцип симметрии и конформные отображения* // Алгебра и анализ. — 1993. — **5**, № 3. — С. 119—142.

[6] Долженко Е. П. *Оценки модулей непрерывности конформных отображений областей вблизи их достижимых граничных дуг* // Мат. сб. — 2011. — **202**, № 12. — С. 57—106.

[7] Долженко Е. П. *Замечания о модуле непрерывности конформного отображения круга на жорданову область* // Мат. заметки. — 1996. — **60**, № 2. — С. 176—184.

[8] Долженко Е. П. *О конформных отображениях жордановых областей* // Вестник Московск. ун-та. Математика. Механика. — 1999. — № 3. — С. 66—68.

[9] Dolzhenko E. P. *On modules of continuity of conformal mappings of arbitrary Jordan domains* // J. Math. Sci. (New York). — 2002. — **108**, № 3. — P. 411—419.

[10] Долженко Е. П. *О степени "гладкости" конформных отображений жордановых областей с негладкими границами* // Комплексный анализ и теория потенциала: Тр. Украинск. мат. конгресса, 2001, Киев. — 2003. — С. 25—34.

[11] Долженко Е. П. *О граничной гладкости конформных отображений областей с негладкими границами* // Докл. АН. — 2007. — **415**, № 2. — С. 155—159.

[12] Лаврентьев М. А. *О непрерывности однолистных функций в замкнутых областях* // Докл. АН СССР. — 1936. — **4**, № 5. — С. 207—209.

[13] Долженко Е. П. *Гладкость гармонических и аналитических функций в граничных точках области* // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1965. — **29**, № 5. — С. 1069—1084.

[14] Долженко Е. П., Колесников С. В. *О поведении конформных отображений областей вблизи их выпуклых граничных дуг* // Мат. заметки. — 2011. — **90**, № 4. — С. 501—516.