Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 4–5, 507–519

УДК 517.5

Е. А. Севостьянов

(Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк)

О необходимом и достаточном условии равностепенной непрерывности одного семейства отображений

esevostyanov2009@mail.ru

Светлой памяти Промарза Меликовича Тамразова посвящается

Настоящая работа посвящена изучению классов отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности. Доказано, что нормальные семейства открытых дискретных отображений, искажающих семейства кривых в $\mathbb{R}^n$ специальным образом, имеют логарифмический порядок роста в окрестности каждой точки, как только их характеристика квазиконформности удовлетворяет определённым ограничениям на рост.

1. Введение. Настоящая заметка посвящена изучению пространственных отображений, более общих, чем отображения с ограниченным искажением по Ю. Г. Решетняку (см. [1]).

Всюду далее m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$, M — конформный модуль семейства кривых (см., например, [2, разд. 6, гл. I]). В более ранней работе автора [3] были получены результаты об оценках искажения, равностепенной непрерывности и нормальности семейств отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, удовлетворяющих в точке $x_0 \in D$ оценкам вида

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_1, S_2, R\right)\right)\right) \leq \int\limits_{R} Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\; dm(x) \qquad (1)$$

для любого кольца $R = R(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$ и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr \geq 1\,.$$

Такие отображения будем называть *кольцевыми Q-отображениями* в точке x_0. При этом, случай $Q(x) \leq K \equiv const$ соответствует отображениям с ограниченным искажением (или квазирегулярным отображениям), а случай $Q(x) \equiv 1$ — случаю конформных отображений и аналитических функций; см. монографии [1] и [4], а также [5, теорема 1] по этому поводу. В работе [3] найдены условия на функцию Q, обеспечивающие равностепенную непрерывность (нормальность) семейств отображений вида (1), не принимающих значения множества положительной ёмкости. Указанные условия являются достаточными, но не являются необходимыми условиями равностепенной непрерывности семейств отображений. В частности, семейство отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$ вида (1) равностепенно непрерывно в точке $x_0 \in D$, если $\operatorname{cap} E > 0$ и $Q \in FMO(x_0)$ (см. [3, теорема 5.1]). Определение и примеры функций $\varphi : D \to \mathbb{R}$ класса FMO в точке x_0 см., например, в [6].

Данная работа посвящена поиску условий, при которых семейство отображений указанного выше вида равностепенно непрерывно и которые являлись бы не только достаточными, но и необходимыми условиями. При этом, условие на функцию Q (например, условие типа FMO) фиксируется и рассматривается вопрос о равностепенной непрерывности в точке соответствующего семейства отображений. Следует заметить, что подобные исследования являются продолжением результатов Р. Миньйович для случая ограниченных функций Q (R. Miniowitz, 1982 г.; см. [7, теорема 1]), см. также [8, теорема 4.3, гл. II] для квазиконформных отображений на плоскости.

В дальнейшем в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$ используется *сферическая (хордальная) метрика* $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, где π – стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \quad h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}\,, \quad x \neq \infty \neq y\,.$$

Всюду далее равностепенная непрерывность (нормальность) семейства отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ понимается в смысле метрики h.

Основной результат, доказанный автором по этому поводу, может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 1. *Семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в точке $x_0 \in D$ таких, что $Q \in FMO(x_0)$, равностепенно непрерывно в точке $x_0 \in D$ тогда и только тогда, когда при некоторых $p = p(n, Q) > 0$, $C_n > 0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0) > 0$ и всех $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$ выполнено неравенство*

$$h(f(x), f(x_0)) \le C_n \left\{ \frac{1}{\log \frac{1}{|x-x_0|}} \right\}^p . \tag{2}$$

Отметим ещё одну подробность. Как было показано в работе [9, теорема 5.1 и следствие 5.5], (см. также [10, теоремы 7.5 и 7.6, следствия 7.10 — 7.12]), для нормальности (равностепенной непрерывности) семейств гомеоморфизмов, удовлетворяющих оценке (1) при $Q \in FMO(x_0)$ для всех $x_0 \in D$ достаточно, чтобы это семейство не принимало два фиксированных значения в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Аналогичное утверждение неверно для отображений, не являющихся гомеоморфизмами даже при $Q(x) \equiv 1$, как показывает пример аналитических функций на плоскости $f_m(z) = z^m$, $m \in \mathbb{N}$, в области $D = B(0, 2) \backslash \{0\}$ (все отображения семейства являются 1–отображениями и не принимают значения 0 и ∞ в указанной области). Результат Р. Миньйович утверждает, что для равностепенной непрерывности (нормальности) семейств отображений в случае ограниченных $Q \le K$ и $n \ge 2$ достаточно, чтобы семейство отображений не принимало $l + 1$ различных значений, где натуральное число l вполне определяется коэффициентом квазиконформности K и размерностью пространства n (см., например, [7, теорема 4]). В изучаемом нами случае неограниченных функций Q конечного числа не принимаемых значений, вообще говоря, не достаточно.

2. Вспомогательные утверждения. Основные определения и обозначения, используемые ниже, могут быть найдены в работе [3].

Хордальным диаметром множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ называется величина $h(E) = \sup\limits_{x, y \in E} h(x, y)$. Всюду далее ω_{n-1} обозначает площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$. Конденсатором $E = (A, C)$ называется пара множеств, где A открыто и C — компактное подмножество A. Следующие леммы в несколько более слабой форме были доказаны в работе [3], см. леммы 3.2, 3.3.

Лемма 1. *Пусть* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$ — *открытое дискретное кольцевое* Q*-отображение в точке* $x_0 \in D$. *Предположим, что для некоторых чисел* $\varepsilon_0 \in (0, \mathrm{dist}\,(x_0, \partial D))$, $\varepsilon_0' \in (0, \varepsilon_0)$ *и семейства неотрицательных измеримых по Лебегу функций* $\{\psi_\varepsilon(t)\}$, $\psi_\varepsilon : (\varepsilon, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$, *выполнено условие*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi_\varepsilon^n(|x - x_0|)\, dm(x) \leq F(\varepsilon, \varepsilon_0) \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0')\,, \quad (3)$$

где $F(\varepsilon, \varepsilon_0)$ — *некоторая функция и*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_\varepsilon(t) dt < \infty \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0')\,. \quad (4)$$

Тогда

$$\mathrm{cap}\, f(E) \leq F(\varepsilon, \varepsilon_0)/I^n(\varepsilon, \varepsilon_0) \qquad \forall\, \varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0')\ , \quad (5)$$

где $E = (A,\, C)$, $A = B\,(x_0, r_0)$, $C = \overline{B(x_0, \varepsilon)}$, $r_0 = \mathrm{dist}\,(x_0,\, \partial D)$.

Доказательство. Рассмотрим конденсатор $E = (A, C)$, где A и C такие же, как в формулировке леммы. В случае $D := \mathbb{R}^n$ полагаем $A := \mathbb{R}^n$. Заметим, что пара множеств $f(E) = (f(A), f(C))$ также является конденсатором ввиду открытости и непрерывности отображения f (определение конденсатора и ёмкости конденсатора см., например, [4, разд. 10, гл. II]). Если $\mathrm{cap}\, f(E) = 0$, доказывать нечего. Пусть $\mathrm{cap}\, f(E) \neq 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\infty \notin f(A)$.

Пусть Γ_E — семейство всех кривых вида $\gamma : [a,\, b) \to A$, таких что $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \varnothing$ для произвольного компакта $F \subset A$, где $|\gamma| = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, t \in [a, b) : \gamma(t) = x\}$ — носитель кривой γ. Известно, что $\mathrm{cap}\, E = M(\Gamma_E)$ (см., например, [4, предложение 10.2, гл. II]). Для конденсатора $f(E)$ рассмотрим семейство кривых $\Gamma_{f(E)}$. Заметим также, что каждая кривая $\gamma \in \Gamma_{f(E)}$ имеет максимальное поднятие при отображении f, лежащее в A с началом в C, см. [4, следствие 3.3, гл. II] (определение максимального поднятия кривой при отображении см. там же). Пусть Γ^* — семейство всех максимальных поднятий кривых $\Gamma_{f(E)}$ при отображении f с началом в C. Заметим, что $\Gamma^* \subset \Gamma_E$ (см. детали доказательства леммы 3.2 в [3]). Кроме того, заметим, что $\Gamma_{f(E)} > f(\Gamma^*)$ и, следовательно,

$$M\left(\Gamma_{f(E)}\right) \leq M\left(f(\Gamma^*)\right)\ . \quad (6)$$

Рассмотрим множества $S_\varepsilon = S(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = \varepsilon\}$, $S_{\varepsilon_0} = S(x_0, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| = \varepsilon_0\}$, где ε_0 — из условия леммы и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$. Всюду ниже полагаем $R(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x-x_0| < r_2\}$. Заметим, что, поскольку $\Gamma^* \subset \Gamma_E$, то $\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, R(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)\right) < \Gamma^*$ и, следовательно, $f(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, R(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)\right)) < f(\Gamma^*)$. Значит,

$$M\left(f(\Gamma^*)\right) \le M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, R(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)\right)\right)\right) . \tag{7}$$

Из соотношений (6) и (7) следует, что

$$M\left(\Gamma_{f(E)}\right) \le M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, R(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)\right)\right)\right)$$

и, таким образом, согласно [4, предложение 10.2, гл. II]

$$\operatorname{cap} f(E) \le M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon\,, S_{\varepsilon_0}, R(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)\right)\right)\right) . \tag{8}$$

Рассмотрим семейство измеримых функций $\eta_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t)/I(\varepsilon, \varepsilon_0)$, $t \in (\varepsilon, \varepsilon_0')$. Заметим, что для всех таких $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$ выполнено равенство $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta_\varepsilon(t)\, dt = 1$. Тогда по определению кольцевого Q-отображения в точке x_0 для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon\,, S_{\varepsilon_0}, R(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)\right)\right)\right) \le$$
$$\le \frac{1}{I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)} \int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi_\varepsilon^n(|x - x_0|)\ dm(x)\,. \tag{9}$$

Наконец, из соотношений (3), (8) и (9) следует соотношение (5).

Лемма 2. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, такое что $D' = f(D) \subset B(0, r)$, при этом $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(0, r)\right) \ge \delta > 0$. Предположим, что для некоторых чисел $p \le n$, $\varepsilon_0 \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial D))$, $\varepsilon_0' \in (0, \varepsilon_0)$ и семейства неотрицательных измеримых по Лебегу функций $\{\psi_\varepsilon(t)\}$, $\psi_\varepsilon : (\varepsilon, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$, выполнено условие*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi_\varepsilon^n(|x-x_0|)\, dm(x) \le K \cdot I^p(\varepsilon, \varepsilon_0) \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0')\,, \tag{10}$$

где величина $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$ определена в (4). Тогда

$$h(f(x), f(x_0)) \le \frac{\alpha_n}{\delta}\, \exp\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(|x - x_0|, \varepsilon_0)\} \tag{11}$$

для всех $x \in B(x_0, {\varepsilon_0}')$, *где* $\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$ — *некоторая постоянная, зависящая только от* n, *и*

$$\alpha_n = 2\lambda_n^2, \qquad \beta_n = \left(\frac{\omega_{n-1}}{K}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \qquad \gamma_{n,p} = 1 - \frac{p-1}{n-1}\,. \tag{12}$$

Доказательство. Заметим, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$

$$\operatorname{cap} f(E) \le K\, I^{p-n}\,(\varepsilon, \varepsilon_0)\;. \tag{13}$$

Действительно, соотношение (13) вытекает непосредственно из (5) и (10) при $F(\varepsilon, \varepsilon_0) := K\, I^p(\varepsilon, \varepsilon_0)$.

Далее, поскольку $f(A) \subset B(0, r)$, в силу леммы 2.2 из [3], примененной к конденсатору $f(E)$, будем иметь

$$\operatorname{cap} f(E) \ge \frac{\omega_{n-1}}{\left\{\log \frac{2\lambda_n^2}{h(f(C))h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(0,r)\right)}\right\}^{n-1}}\,, \tag{14}$$

где $\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$. Поскольку по условию $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(0,r)\right) \ge \delta$, из (13) и (14) имеем

$$h\left(f(C)\right) \le \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\left\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(\varepsilon, \varepsilon_0)\right\}, \tag{15}$$

где $\alpha_n = 2\lambda_n^2$, $\beta_n = (\omega_{n-1}/K)^{\frac{1}{n-1}}$, $\gamma_{n,p} = (n-p)/(n-1)\,.$

Пусть теперь $x \in D$ такое, что $|x - x_0| = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0'$. Тогда $x \in \overline{B\,(x_0,\, \varepsilon)}$ и $f(x) \in f\left(\overline{B\,(x_0,\, \varepsilon)}\right) = f(C)$ и из (15) получаем оценку

$$h\left(f(x),\, f(x_0)\right) \le \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\left\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(|x - x_0|, \varepsilon_0)\right\} \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0')\,. \tag{16}$$

В силу произвольности $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$, соотношение (16) имеет место во всём шаре $B(x_0, \varepsilon_0')$. Лемма доказана.

Мёбиусовым преобразованием $U : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ называют отображение, представляющее собой композицию конечного числа преобразований подобия и инверсий относительно сферы (см., например, [1, § 2.2, гл. I]). Отметим, что согласно теореме Лиувилля любое конформное отображение области D пространства $\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$, является сужением на D некоторого мёбиусова преобразования (см. соответствующий результат в [11] для класса C^1; см. также [4, теорема 2.5, гл. I]). При этом, для области $D := \overline{\mathbb{R}^n}$ указанный результат верен также и при $n = 2$ (см., например, [12]). Обратно, сужение каждого мёбиусова преобразования $U : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ на произвольную область $D \setminus \{\infty, U^{-1}(\infty)\}$, по определению, является конформным отображением, потому $M(U(\Gamma)) = M(\Gamma)$ для каждого мёбиусова отображения $U : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ и произвольного семейства кривых Γ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ (см. [2, теорема 8.1]).

Следующая лемма определяет характер локального поведения классов отображений с неограниченной характеристикой (в смысле соотношения (1)), являющихся равностепенно непрерывными (нормальными) семействами отображений.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}_Q$ — некоторое семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в точке x_0, $n \geq 2$. Предположим, что найдутся числа $p < n$, $\varepsilon_0 \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial D))$, $\varepsilon_0' \in (0, \varepsilon_0)$ и неотрицательная измеримая по Лебегу функция $\psi : (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$, для которых выполнено условие вида (10), где $\psi_\varepsilon \equiv \psi$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$, функция $I(a, b)$ определена соотношением* (4) *и, кроме того, выполнено условие: $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда семейство $\mathfrak{F}_Q$ является равностепенно непрерывным в точке x_0 тогда и только тогда, когда найдутся $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x_0)$, $i = 1, 2$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$, такие, что для любого $f \in \mathfrak{F}_Q$ и всех $x \in B(x_0, \varepsilon_1)$ выполнена оценка*

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \alpha_n \exp\{-\widetilde{\beta_n} I^{\gamma_{n,p}}(|x - x_0|, \varepsilon_2)\}, \tag{17}$$

где $\widetilde{\beta_n} = \left(\frac{\omega_{n-1}}{2K}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, а α_n и $\gamma_{n,p}$ определены в соотношении (12).

Доказательство. Достаточность очевидна, поскольку из соотношения (17) при $p < n$ и условия $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$ немедленно следует равностепенная непрерывность семейства отображений $\mathfrak{F}_Q$. Докажем необходимость. Предположим, что семейство $\mathfrak{F}_Q$ равностепенно непрерывно в точке x_0. Тогда для произвольного $\sigma > 0$ найдётся $\Delta = \Delta(\sigma, x_0)$ такое, что

$$h(f(x), f(x_0)) < \sigma, \tag{18}$$

как только $|x - x_0| < \Delta$. Можно считать, что $\Delta < \varepsilon_0$. Для фиксированного отображения $f \in \mathfrak{F}_Q$ и точки $x_0 \in D$ определим мёбиусово преобразование $U : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, для которого

$$U(f(x_0)) = 0, \qquad h(U(f(x)), U(f(x_0))) = h(f(x), f(x_0)) \tag{19}$$

(такое преобразование существует, см., например, [2, теорема 12.2]). В силу сделанных перед леммой 3 замечаний отображение $v := U \circ f$ также является кольцевым Q-отображением в точке x_0, при этом из оценки (18) при достаточно малом значении σ и соотношений (19) вытекает, что при некотором $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(x_0) < \Delta$ и всех $x \in B(x_0, \varepsilon_2)$ выполнено неравенство: $|v(x)| \le 1$. Рассмотрим сужение отображения v на шар $B(x_0, \varepsilon_2)$, $g := v|_{B(x_0,\,\varepsilon_2)}$. Заметим, что так как $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, то $0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) < 2 \cdot I(\varepsilon, \varepsilon_2) < \infty$ при некотором $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_2)$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$. Тогда из условия (10) вытекает, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_2} Q(x)\,\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x) \le 2K\,I^p(\varepsilon, \varepsilon_2) \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_1)\,. \quad (20)$$

Однако, условие (20) совпадает с условием (10), где роль ε_0 играет ε_2, роль ε_0' играет ε_1, а роль K — новая постоянная $2K$. Необходимое заключение следует теперь из леммы 2, примененной к отображению g, и соотношений (19). Лемма доказана.

В дальнейшем нам также понадобится ещё одна лемма, которая является некоторой вариацией леммы 3.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}_Q$ — семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в точке x_0, $n \ge 2$. Предположим, что существует число $\widetilde{\varepsilon_0} \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial D))$, обладающее следующим свойством: для любого числа $\varepsilon_0 \in (0, \widetilde{\varepsilon_0})$ найдётся число $\varepsilon_0' \in (0, \varepsilon_0)$ и неотрицательная измеримая по Лебегу функция $\psi : (0, \widetilde{\varepsilon_0}) \to [0, \infty]$ такая, что*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty \qquad \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0') \quad (21)$$

и, кроме того, выполнено условие вида

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x-x_0|)\;dm(x) \le K\,I^p(\varepsilon, \varepsilon_0) \qquad \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0')\,. \quad (22)$$

Тогда, если семейство $\mathfrak{F}_Q$ является равностепенно непрерывным в точке x_0, то найдутся такие числа $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x_0)$, $i = 1, 2$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \widetilde{\varepsilon_0}$, что для всех $f \in \mathfrak{F}_Q$ и $x \in B(x_0, \varepsilon_1)$ выполнена оценка

$$h(f(x), f(x_0)) \le \alpha_n\, \exp\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(|x-x_0|, \varepsilon_2)\}\,, \quad (23)$$

где величины α_n, β_n и $\gamma_{n,p}$ определены в соотношении (12).

Доказательство. Предположим, что семейство $\mathfrak{F}_Q$ равностепенно непрерывно в точке x_0. Тогда для произвольного $\sigma > 0$ найдётся $\Delta = \Delta(\sigma, x_0)$ такое, что выполнено соотношение (18). Для фиксированного отображения f и точки $x_0 \in D$ определим мёбиусово преобразование $U : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, для которого выполнены равенства (19). В силу сделанных перед леммой 3 замечаний отображение $v := U \circ f$ также является кольцевым Q-отображением в точке x_0, при этом из оценки (18) при достаточно малом значении σ и соотношений (19) вытекает, что при некотором $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(x_0) < \Delta$ и всех $x \in B(x_0, \varepsilon_1)$ выполнено $|v(x)| \leq 1$. Рассмотрим сужение отображения v на шар $B(x_0, \varepsilon_2)$, $g := v|_{B(x_0,\varepsilon_2)}$. Заметим, что в силу условия (21) при некотором $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_2)$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ выполнено условие $0 < I(\varepsilon, \varepsilon_2) < \infty$. Тогда из (22) вытекает, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_2} Q(x)\, \psi^n(|x-x_0|)\; dm(x) \leq K\, I^p(\varepsilon, \varepsilon_2) \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_1)\,. \quad (24)$$

Однако, (24) совпадает с условием (10). Необходимое заключение следует теперь из леммы 2, примененной к отображению g, и равенств в (19). Лемма доказана.

Замечание 1. Заключения лемм 3 и 4 получены при различных предположениях и, вообще говоря, не сравнимы между собой. В частности, утверждение леммы 4 более точное, чем утверждение леммы 3, поскольку в правой части соотношения (23) постоянная $\beta_n = (\frac{\omega_{n-1}}{K})^{1/(n-1)}$ больше постоянной $\widetilde{\beta_n} = (\frac{\omega_{n-1}}{2K})^{1/(n-1)}$, стоящей в правой части соотношения (17). Однако, условия леммы 3 предполагают выполнение соотношений (4), (10) лишь при одном фиксированном ε_0, в то время как в лемме 4 такие условия должны быть выполнены при каждом достаточно малом ε_0 и одной и той же постоянной $K > 0$. Как мы увидим в следующем разделе, обе леммы имеют свои приложения к конкретным классам функций Q.

3. О необходимых и достаточных условиях равностепенной непрерывности семейств отображений. Основные результаты.

Доказательство теоремы 1 основано на специальном выборе функции ψ в лемме 2. Полагаем $\psi(t) := \frac{1}{t \log 1/t}$. Пусть $\varepsilon_0 < e^{-1}$ произвольно. Тогда в сделанных выше обозначениях

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt = \log \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}\ ,$$

при этом условие $I(\varepsilon,\varepsilon_0)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$ проверяется непосредственно, а условие (10) при $p=1$ выполнено в силу [6, следствие 2.3] (см. также [10, лемма 6.1, гл. 6]). Условие (2) вытекает из (11) при выбранной функции ψ. Теорема доказана.

Пусть $Q: D\to[0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, тогда $q_{x_0}(r)$ обозначает среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $|x-x_0|=r$:

$$q_{x_0}(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{|x-x_0|=r}Q(x)\,dS\,,$$

где dS — элемент площади поверхности S. На основе леммы 4 получаем следующие утверждения.

Теорема 2. *Семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f: D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ в точке $x_0\in D$ таких, что при некотором $\varepsilon_0=\varepsilon_0(x_0)\in(0,\operatorname{dist}(x_0,\partial D))$ выполнено условие*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0}\frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}=\infty, \tag{25}$$

равностепенно непрерывно в точке $x_0\in D$ тогда и только тогда, когда при некотором $\varepsilon_0'<\varepsilon_0$, $\varepsilon_0'>0$, и всех $x\in B(x_0,\varepsilon_0')$ выполнено соотношение:

$$h(f(x),f(x_0))\le\alpha_n\,\exp\left\{-\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}, \tag{26}$$

где α_n — постоянная из формулировки леммы 3.

Доказательство. Достаточность непосредственно вытекает из условий (25) и (26). Докажем необходимость. При достаточно малых ε рассмотрим функцию

$$\psi(t)\quad=\quad\left\{\begin{array}{rr}1/[tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)]\,, & t\in(\varepsilon,\varepsilon_0),\\ 0\,, & t\notin(\varepsilon,\varepsilon_0)\,,\end{array}\right.$$

а функцию $I(\varepsilon,\varepsilon_0)$ определим равенством $I(\varepsilon,\varepsilon_0):=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt$. В силу условия (25) для каждого достаточно малого $\varepsilon_0>0$ найдётся $\varepsilon_0'\in$

$(0, \varepsilon_0)$ такое, что $I(\varepsilon, \varepsilon_0) > 0$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$. Кроме того, $I(\varepsilon, \varepsilon_0) < \infty$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ (см. [13, замечание 3]). Наконец, заметим, что функция ψ удовлетворяет также соотношению (22) при $p = 1$ и $K = \omega_{n-1}$, поскольку несложный подсчёт показывает, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\, \psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) = \omega_{n-1}\, I(\varepsilon, \varepsilon_0)\,.$$

Необходимость следует теперь из леммы 4. Теорема доказана.

Из теоремы 2 непосредственно вытекает следующее

Следствие 1. *Семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в точке $x_0 \in D$ таких, что при некотором $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial D))$*

$$q_{x_0}(r) \le C \left(\log \frac{1}{r}\right)^{n-1} \qquad \forall\, r \in (0, \varepsilon_0)\,,$$

равностепенно непрерывно в точке $x_0 \in D$ тогда и только тогда, когда при некотором $\varepsilon_0' < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0' > 0$, и всех $x \in B(x_0, \varepsilon_0')$ выполнено соотношение

$$h(f(x), f(x_0)) \le \frac{M}{\log \frac{1}{|x-x_0|}}\,,$$

где M — некоторая постоянная, зависящая только от размерности пространства n и точки x_0.

В заключение раздела приведём следующий, на наш взгляд, важный результат, являющийся (в некотором смысле) продолжением и уточнением теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, и $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Для каждой функции $Q : D \to [1, \infty]$, $Q \in L^1_{loc}(D)$ такой, что $\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} < \infty$, найдётся семейство равномерно ограниченных кольцевых Q-гомеоморфизмов в точке x_0, не являющееся равностепенно непрерывным в точке x_0.*

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать $D = \mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ и $x_0 = 0$. Определим последовательность отображений $f_m : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$f_m(x) = \frac{x}{|x|} \rho_m(|x|)\,, \qquad f_m(0) := 0\,,$$

где

$$\rho_m(r) = \exp\left\{-\int\limits_r^1 \frac{dt}{tq_{0,m}^{1/(n-1)}(t)}\right\}, \quad q_{0,m}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int\limits_{|x|=r} Q_m(x)\,dS\,,$$

$$Q_m(x) \quad = \quad \left\{\begin{array}{ll} Q(x), & |x| > 1/m\ , \\ \ \ 1\ , & |x| \le 1/m\,. \end{array}\right.$$

Заметим, что каждое из отображений f_m, $m = 1, 2, \dots$, является кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке $x_0 = 0$. Действительно, при произвольном $r \in (0, 1)$ имеем $f_m(S(0, r)) = S(0, R_m)$, где

$$R_m := \exp\left\{-\int\limits_r^1 \frac{dt}{tq_{0,m}^{1/(n-1)}(t)}\right\}.$$

Заметим, что

$$f_m(\Gamma(S(0,r_1), S(0,r_2), R(r_1,r_2,0))) = \\ = \Gamma(S(0,R_{1,m}), S(0,R_{2,m}), R(R_{1,m},R_{2,m},0))\,,$$

где $R_{i,m} := \exp\left\{-\int\limits_{r_i}^1 \frac{dt}{tq_{0,m}^{1/(n-1)}(t)}\right\}$, $i = 1, 2$. Согласно [2, п. 7.5],

$$M(f_m(\Gamma(S(0,r_1), S(0,r_2), R(r_1,r_2,0)))) = \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{tq_{0,m}^{1/(n-1)}(t)}\right)^{n-1}} \le$$

$$\le \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}\right)^{n-1}}\,.$$

Следовательно, отображение f_m — кольцевой Q-гомеоморфизм в нуле, см., например, [9, теорема 2.1]. Заметим, что $|f_m(x)| \le 1$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и, таким образом, семейство отображений $\{f_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$ равномерно ограничено. Кроме того, для произвольной последовательности x_m такой, что $|x_m| = 1/m$, $m = 1, 2, \dots$, имеем $|f_m(x_m)| \ge \sigma$, где σ не зависит от m. Окончательно, для некоторого числа σ и произвольного элемента последовательности $1/(m-1)$, $m = 2, 3, \dots$, найдётся $x_m \in \mathbb{B}^n$ и элемент семейства отображений $f_m \in \{f_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$ такие, что $|x_m - 0| < 1/(m-1)$ и в то же время $|f_m(x_m) - f_m(0)| \ge \sigma$. Таким образом, семейство отображений $\{f_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$ не является равностепенно непрерывным в нуле. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Решетняк Ю. Г. *Пространственные отображения с ограниченным искажением.* — Новосибирск: Наука, 1982. — 285 с.

[2] Väisälä J. *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings.* Lecture Notes in Math. — **229**. — Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971. — 144 p.

[3] Севостьянов Е.А. *Теория модулей, ёмкостей и нормальные семейства отображений, допускающих ветвление* // Укр. мат. вестник. — 2007. — **4**, № 4. — С. 582—604.

[4] Rickman S. *Quasiregular mappings.* Results in Mathematic and Related Areas. — **(3), 26**. — Berlin: Springer–Verlag, 1993. — 213 p.

[5] Полецкий Е. А. *Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений* // Мат. сб. — 1970. — **83**, № 2. — С. 261—272.

[6] Игнатьев А., Рязанов В. *Конечное среднее колебание в теории отображений* // Укр. мат. вестник. — 2005. — **2**, № 3. — С. 395—417.

[7] Miniowitz R. *Normal families of quasimeromorphic mappings* // Proc. Amer. Math. Soc. — 1982. — **84**, № 1. — P. 35—43.

[8] Lehto O., Virtanen K. *Quasiconformal Mappings in the Plane.* — New York etc.: Springer, 1973. — 258 p.

[9] Рязанов В. И., Севостьянов Е. А. *Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов* // Сиб. мат. журн. — 2007. — **48**, № 6. — С. 1361—1376.

[10] Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *Moduli in Modern Mapping Theory.* — New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009. — 367 p.

[11] Hartman P. *On isometries and on a theorem of Liouville* // Math. Z. — 1958. — **69**. — P. 202—210.

[12] Mostow G. D. *Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms* // Inst. Hautes Études Sci. Publ. math. — 1968. — **34**. — P. 53—104.

[13] Севостьянов Е. А. *О точках ветвления отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности* // Сиб. мат. журн. — 2010. — **51**, № 5. — С. 1129—1146.