Збірник праць Ін-ту математики НАН України   2013, том 10, N 4–5, 526–531

УДК 517.53

Ю. Ю. Трохимчук, В. М. Сафонов

(Институт математики НАН Украины, Киев)

(Национальный университет пищевых технологий, Киев)

О множестве второй категории счетных уровней непрерывных отображений

Светлой памяти Промарза Меликовича Тамразова посвящается

В работе рассматриваются непрерывные отображения областей эвклидовых пространств с множеством счетных уровней всюду второй категории. Доказано, что в случае нульмерности указанные отображения обладают плотным множеством точек локального гомеоморфизма.

This paper considers continuous mappings of domains of Euclidean spaces with a set of countable levels of the second category. We proved that in the case of zero-dimensionality, these mappings have a dense set of points of local homeomorphism.

Если на отрезке $[a, b]$ нам задана функция $f(x)$, то уровнем ее называют каждое множество $\varepsilon_y = \{x : f(x) = y\}$, $m = \min f(x) \leq y \leq \max f(x) = M$. Для непрерывной f уровни ее представляют собой замкнутые множества в $[a, b]$, конечные или бесконечные.

Знание многих свойств совокупности всех уровней функции позволяет часто охарактеризовать ее структурные особенности.

Назовем мощность $\operatorname{card} \varepsilon_y = n(y)$ индикатрисой Банаха или кратностью значения y. Классическая теорема Банаха утверждает, что если функция $n(y)$ суммируема на отрезке $[m, M]$, то функция $f(x)$ — ограниченной вариации на $[a, b]$; или еще: если $n(y)$ почти всюду на $[m, M]$ конечна (условие T_1 Банаха), то функция $f(x)$ является суперпозицией двух непрерывных функций, из которых внутренняя имеет ограниченную вариацию, а внешняя возрастает и абсолютно непрерывна [1].

Уже знаменитый пример Пеано непрерывной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \leq t \leq 1$, отображающей отрезок $[0,1]$ на весь квадрат $[0,1]^2$, показывает, что существуют непрерывные функции $f(x)$, у которых все уровни не только бесконечные, но и несчетные (мощности континуума). Существуют функции, у которых все уровни даже совершенны (не содержат изолированных точек).

Конечно, особый интерес представляют собой счетнократные функции, а также счетнократные отображения областей евклидовых пространств.

Известная теорема [2] утверждает, что каждое счетнократное отображение $f : D \to \mathbb{R}^n_1$, $D \subset \mathbb{R}^n$, обладает всюду плотным множеством точек локального гомеоморфизма.

Оказывается, что счетную кратность этого отображения можно предполагать лишь на некотором подмножестве всюду второй категории на $f(D)$.

Доказательству этого утверждения и посвящена наша статья.

Как обычно, обозначим n-мерное евклидово пространство через $\mathbb{R}^n$. Пусть D — область n-мерного евклидова пространства и $f : D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Введем следующие понятия.

Определение 1. *Точка $x_0 \in D$ называется точкой взаимной однозначности f, если $f^{-1}f(x_0) = x_0$.*

Рассмотрим полный прообраз $f^{-1}f(x_0)$ произвольной точки $x_0 \in \in D$, который также будем называть уровнем отображения f.

Определение 2. *Отображение f называется нульмерным, если каждый его уровень является нульмерным, то есть $\dim f^{-1}f(x_0) = 0$ для любого $x_0 \in D$.*

Докажем теперь такое утверждение.

Теорема 1. *Пусть D — замкнутая область n-мерного евклидова пространства и $f : D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное нульмерное отображение, причем множество его счетных уровней всюду второй категории. Тогда существует всюду плотное открытое множество $\mathcal{O} \subset D$ точек локального гомеоморфизма f.*

Доказательство. Рассмотрим множества D и $f(D)$ в прямоугольных декартовых системах координат $Ox_1x_2 \dots x_n$ и $Oy_1y_2 \dots y_n$, выбранных в соответствующих евклидовых пространствах.

Известно, что всякое множество первой категории содержится в некотором F_σ–множестве первой категории. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что множество e счетных уровней отображения f есть G_δ–множеством в $f(D)$.

Возьмем пространство Бэра $N_{f(D)}$ — множество всех иррациональных точек в образе $f(D)$. Тогда пересечение $E = N_{f(D)} \bigcap e$ является G_δ–множеством второй категории. Поскольку полный прообраз нигде не плотного множества является нигде не плотным множеством, то $f^{-1}(f(D) \backslash E)$ — множество первой категории. Следовательно, $f^{-1}(E)$ является G_δ–множеством второй категории в области D.

Рассмотрим теперь прямое произведение $R^n \times E$, которое есть G_δ–множеством в пространстве R^{2n}. Из предшествующего следует, что G_δ–множество $\varepsilon = (R^n \times E) \bigcap B_f$ является множеством второй категории на графике $B_f \subset R^{2n}$ отображения f.

Возьмем далее бэровское пространство N_D — множество всех иррациональных точек области D. Тогда пересечение $N_D \bigcap f^{-1}(E)$ — G_δ–множество второй категории в области D.

Преобразуем оба бэровских пространства N_D и $N_{f(D)}$ соответственно в линейные бэровские пространства N_x и N_y, которые принадлежат оси Ox и оси Oy некоторой прямоугольной декартовой системы координат, выбранной в двумерном евклидовом пространстве R^2. Как известно [3], это можно осуществить с помощью двух взаимно однозначных и взаимно непрерывных преобразований.

Пусть $x_1 = g_1(x)$, $x_2 = g_2(x)$, $\ldots$, $x_n = g_n(x)$, $x = G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y_1 = h_1(y)$, $y_2 = h_2(y)$, $\ldots$, $y_n = h_n(y)$, $y = H(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ являются уравнениями, которые устанавливают эти два преобразования.

Ясно, что вместе взятые указанные уравнения определяют гомеоморфное отображение бэровского пространства N — множества всех иррациональных точек прямого произведения $D \times f(D)$ в бэровское пространство N_{xy} — множество всех иррациональных точек плоскости Oxy. При этом борелевское множество ε преобразуется в борелевское множество ε', расположенное на плоскости Oxy и такое, что каждая прямая, параллельная оси Ox, пересекает ε' самое большее в счетном множестве точек.

Принимая во внимание тот факт (см. [4]), что борелевское множество, состоящее только из точек конденсации, есть взаимно однозначным и непрерывным образом нульмерного пространства Бэра, из установленного выше следует (см. [3]), что $\varepsilon' = \bigcup_k L'_k$, где L'_k — борелевские множества, попарно без общих точек однозначные относительно оси Oy и расположенные на однозначных кривых $x = \omega_k(y)$ — графиках всюду определенных функций $\omega_k(y)$ классификации Бэра, причем каждая их этих кривых на плоскости Oxy лежит либо ниже, либо выше другой.

Отсюда имеем прообраз ε' — множество ε такое, что $\varepsilon = \bigcup_k L_k$, где множества $L_1, L_2, \ldots, L_k, \ldots$, будучи прообразами соответственно $L'_1, L'_2, \ldots, L'_k, \ldots$, есть борелевскими и попарно без общих точек множествами, однозначными относительно области $N_{f(D)}$. Поскольку ε является G_δ–множеством всюду второй категории на графике B_f непрерывного нульмерного отображения f, то на любой части графика $B' \subset B_f$ найдется открытая порция $\widetilde{B} \subset B'$, на которой одно из борелевских множеств $L_{\tilde{k}}$ будет не первой категории. Таким образом, $\widetilde{B} \bigcap L_{\tilde{k}}$ — множество второй категории на $\widetilde{B}$ по свойству Бэра и ясно, что $\widetilde{B} \bigcap L_k$ при $k \neq \tilde{k}$ есть множествами первой категории.

Пусть теперь D', $\widetilde{D}$ и e_k — ортогональные проекции множеств B', $\widetilde{B}$ и $\widetilde{B} \bigcap L_k$ на область D. Тогда $e_k \subset \widetilde{D} \subset D' \subset D$, причем $e_{\tilde{k}}$ и $f(e_{\tilde{k}})$ являются множествами всюду второй категории соответственно на $\widetilde{D}$ и $f(\widetilde{D})$. Покажем, что $f(e_{\tilde{k}}) \bigcap f(e_k) = \emptyset$, $k \neq \tilde{k}$.

Действительно, в противном случае найдутся точки $x' \in e_{\tilde{k}}$ и $x'' \in e_k$, $k \neq \tilde{k}$ такие, что $\tilde{y} = f(x') = f(x'') \in f(\widetilde{D})$, а также вследствие непрерывности нульмерного отображения f найдутся открытые окрестности $\tilde{V}$, U', U'' соответственно точек $\tilde{y}$, x', x'' такие, что U', $U'' \subset \widetilde{D}$, $U' \bigcap U'' = \emptyset$ и $V' = f(U') \bigcap f(U'') \subset \widetilde{V}$. Поскольку $U' \bigcap e_{\tilde{k}}$, $U'' \bigcap e_{\tilde{k}}$, $V' \bigcap f(e_{\tilde{k}})$ — множества второй категории соответственно в U', U'', V', то $f(U' \bigcap e_{\tilde{k}}) \bigcap f(U'' \bigcap e_{\tilde{k}}) \neq \emptyset$. Это приводит к противоречию с тем, что множество $\widetilde{B} \bigcap L_{\tilde{k}}$ однозначно относительно образа $f(\widetilde{D})$.

Из предыдущего следует, что проекция $e_{\tilde{k}}$ — всюду плотное множество точек взаимной однозначности отображения f в открытой области $\widetilde{D}$. Тогда, как известно (см. [2]), в силу нульмерности f есть гомеоморфизмом на $\widetilde{D} \subset D$.

Итак, в области $D' \subset D$ имеются точки локального гомеоморфизма отображения f. В силу произвольности D' отсюда и следует утверждение теоремы.

Пусть далее V — какое-либо открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве. Рассмотрим непрерывное нульмерное отображение $f : V \to R^n$ с множеством счетных уровней второй категории.

Возьмем какую-нибудь замкнутую область $D \subset V_i$ в любой из компонент открытого множества $V = \bigcup_i V_i$. По предыдущей теореме отображение f обладает всюду плотным в D открытым множеством $\mathcal{O} \subset D$ точек локального гомеоморфизма. Вследствие произвольности выбора $D \subset V$ получим открытое всюду плотное множество точек локального гомеоморфизма f и на самом множестве V.

Таким образом, доказанную выше теорему можно без особого труда перенести на случай произвольного открытого множества, учитывая его структуру.

Теорема 2. *Пусть V — произвольное открытое множество n-мерного евклидова пространства и непрерывное нульмерное отображение $f : V \to R^n$ имеет множество счетных уровней всюду второй категории. Тогда существует открытое всюду плотное в V множество $\mathcal{O}$ точек локального гомеоморфизма отображения f.*

Оказывается, что в случае многообразий одинаковой размерности утверждения предшествующих двух теорем можно переформулировать следующим образом.

Теорема 3. *Если $f : M^n \to N^n$ — непрерывное нульмерное отображение двух многообразий, которое имеет множество счетных уровней всюду второй категории, то существует всюду плотное открытое множество $\mathcal{O}$ точек локального гомеоморфизма f.*

Что касается одномерного случая, то заключение теоремы 1 сводится к существованию всюду плотной на заданном сегменте конечной или счетной последовательности интервалов без общих точек, в каждом из которых отображение является строго монотонным.

В связи с этим необходимо отметить следующий факт. Оказывается, что каждый уровень является бесконечным для подавляющего большинства (в смысле категории Бэра) среди всех непрерывных функций, заданных на одном и том же сегменте. Но прежде, чем привести этот небезинтересный результат [5], напомним некоторые обозначения и понятия.

В полном метрическом пространстве $\mathbb{R}$ множество B называется резидуальным, если оно является дополнением к множеству первой категории в $\mathbb{R}$, то есть дополнением к счетному объединению нигде не плотных множеств $A_n : B = \mathbb{R} \setminus \bigcup_n A_n$, и счетное пересечение резидуальных множеств есть также резидуальным. Если множество резидуально, то оно — всюду второй категории.

Далее пусть $C[0,1]$ есть метрическое пространство всех непрерывных функций $f(x)$ на сегменте $[0,1]$ с заданной естественной нормой $\|f(x)\| = \max_x |f(x)|$; $n(y,f)$ — индикатриса Банаха, то есть заданная на сегменте $[m, M]$, где $m = \min_x f(x)$, $M = \max_x f(x)$, функция, значения которой — число корней уравнения $f(x) = y$. Если множество этих корней бесконечно, то $n(y,f) = +\infty$.

Теперь имеем возможность сформулировать обещанное утверждение.

Теорема 4. *Для всех функций $f(x)$ из некоторого резидуального множества в $C[0,1]$ и каждого y, $\min_x f(x) < y < \max_x f(x)$, индикатриса Банаха $n(y,f) = +\infty$.*

Следует заметить, что подобные соображения имеют место также по отношению к функциям гёльдеровского пространства $C_0^\beta[0,1]$, $0 < \beta < 1$. Здесь $C_0^\beta[0,1]$ есть замыкание пространства непрерывно дифференцируемых функций $C^1[0,1]$ относительно нормы $\|f\|_\beta = \|f\| + \sup_{x,y} |f(x) - f(y)|/|x-y|^\beta$.

Таким образом, в этом направлении укажем еще одно утверждение, дополняющее предыдущую теорему.

Теорема 5. *Подмножество $B \subset C_0^\beta[0,1]$, $0 < \beta < 1$, функций $f(x)$, для которых $n(y,f) = +\infty$ при каждом y, $\min_x f(x) < y < \max_x f(x)$, является резидуальным множеством в $C_0^\beta[0,1]$.*

Список литературы

[1] Сакс С. *Теория интеграла.* — Москва: Изд-во иностр. лит., 1949. — 495 с.

[2] Трохимчук Ю. Ю. *Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности.* — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. — 539 с.

[3] Лузин Н. Н. *Лекции об аналитических множествах и их приложениях.* — Москва: ГИТТЛ, 1953. — 360 с.

[4] Куратовский К. *Топология: В 2-х томах.* — Москва: Мир, 1966. — Т. 1. — 595 с.

[5] Sawyer S. *Some topological properties of the function $n(y)$* // Proc. Amer. Math. Soc. — 1967. — **18**. — P. 35—40.