Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 4–5, 542–551

УДК 517.938.5

В. В. Шарко

(Институт математики НАН Украины, Киев)

Топологическая эквивалентность гармонических полиномов

sharko@imath.kiev.ua

Светлой памяти Промарза Меликовича Тамразова посвящается

Рассмотрен вопрос о топологической классификации функций, в частности, гармонических функций. Используя граф Кронрода–Риба, дано необходимое и достаточное условие того, что два гармонических полинома общего положения будут топологически эквивалентными.

1. Топологическая эквивалентность функций. Пусть X и Y — топологические пространства, а f и g — непрерывные отображения из X в Y.

Определение 1.1. *Непрерывные отображения f и g называются топологически эквививалентными, если существуют гомеоморфизмы $h : X \to X$ и $k : Y \to Y$ такие, что $k \cdot f = g \cdot h$.*

Очевидно, что это **отношение эквивалентности** на множестве непрерывных отображений из X в Y. Заметим, что выбор гомеоморфизмов h и k не является однозначным. Таким образом, если зафиксировать топологические пространства X и Y, то естественно возникают две задачи: описать множество классов непрерывных отображений из X в Y относительно введенного отношения эквивалентности; указать необходимые и достаточные условия того, что два непрерывных отображения f и g из X в Y будут топологически эквивалентными.

Эти задачи сложны и общий ответ не известен даже в случае $X = Y = R^1$. На эту тему имеется ряд работ, отметим некоторые из них: [1 — 7].

В дальнейшем, когда рассматриваются гомеоморфизмы $k, h : R^1 \to R^1$ для функций одной переменной, или $k : R^1 \to R^1$ для функций двух переменных, мы предполагаем, что эти гомеоморфизмы из определения 1.1 **сохраняют ориентацию**, т.е. задаются строго монотонно возрастающими функциями.

В работе [8] доказана следующая лемма.

Лемма 1.1. *Существует непрерывная функция* $f : [0,1] \to [0,1]$, *которая не является топологически эквивалентной никакой гладкой функции* $g : [0,1] \to [0,1]$.

Несложно показать, что если $f = P(x)$ — полином, то он топологически эквивалентен кусочно-линейной функции.

Теорема 1.1. *Для каждой кусочно-линейной функции* f, *заданной на* R^1 *и имеющей* m *локальных экстремумов, существует полином степени* $m+1$, *который топологически эквивалентен функции* f.

Доказательство непосредственно следует из результата, содержащегося в работе [9].

Известно [10], что существует конечное число топологически неэквивалентных полиномов степени $n > 1$ от $k > 0$ переменных, однако неизвестно их число и нет условий, дающих возможность установить, когда два полинома топологически эквивалентны.

Существуют полиномы разных степеней от двух переменных, которые топологически эквивалентны, например, полиномы $P(x) = x^2 + y^2$ и $Q(x) = x^4 + y^4$.

Рассмотрим вопрос о локальной топологической эквивалентности функции двух переменных в окрестности изолированной критической точки.

Пусть f — гладкая функция, заданная на плоскости. Точка m называется критической точкой функции f, если все частные производные f в этой точке равны нулю. Предположим, что m — изолированная критическая точка функции f. Выберем в окрестности точки m локальную систему координат (x, y), так чтобы точка m имела координаты $(0,0)$.

Известно [11], что функцию f из класса $C^\infty(N)$ в окрестности изолированной критической точки m, которая не является локальным экстремумом, **непрерывной** заменой координат можно привести:

а) к виду $f = \operatorname{Re} z^n + c$ $(n \geq 2)$, если топологический тип линий уровня $\Gamma = f^{-1}(c)$ при переходе через m изменяется $(z = x + iy)$.

Будем называть ее **существенной критической точкой** или **вырожденностью порядка** n;

б) либо к виду $f = \mathrm{Re}\, z$, если топологический тип линий уровня $\Gamma = f^{-1}(c)$ при переходе через m не изменяется (т.е. в этом случае от критической точки m можно вообще избавится). Будем называть ее **несущественной критической точкой**.

В случае, если точка m — локальный экстремум, то функцию f в окрестности точки m **непрерывной** заменой координат можно привести к виду $f = x^2 + y^2 + c$ или к виду $f = -x^2 - y^2 + c$.

Рассмотрим в окрестности нуля U плоскости R^2 с координатами (x, y) функцию $f = \mathrm{Re}\, z^n + c$ ($n \geq 2$, $z = x + iy$). Очевидно, что линия уровня $\Gamma = f^{-1}(c)$ функции f в окрестности U содержит критическую точку o и состоит из $2n$ интервалов, пересекающихся в точке o или, как мы будем в дальнейшем говорить, $2n$ ребер, выходящих из одной вершины. Каждая соседняя пара ребер образует сектор, во внутренности которого функция f принимает значение больше c или меньше c (будем называть в дальнейшем соответственно белый или черный сектор). Таким образом, в U будет $2n$ последовательно чередующихся белых и черных секторов.

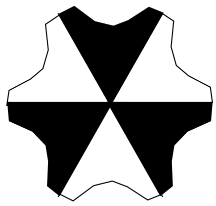

Рис. 1: **Окрестность критической точки функции** $f = \mathrm{Re}\, z^n + c$ ($n = 3$).

Когда $n = 2$, то такая критическая точка называется невырожденной. Гладкая функция f на плоскости называется функцией Морса, если все ее критические точки невырожденые, т.е. для каждой критической точки существует окрестность, в которой f имеет вид невырожденной квадратичной формы. Число минусов этой квадратичной формы называется индексом критической точки [12].

Известно [12], что вырожденную критическую точку функции f можно путем малых возмущений функции f превратить в объединение конечного числа невырожденных критических точек (распад вырожденной особенности). В случае функции $f = \operatorname{Re} z^n$ $(n > 2)$ малое возмущение можно выбрать так: $f_1 = \operatorname{Re}(z - \varepsilon_1) \dots (z - \varepsilon_n)$, где действительные числа $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ при $i \neq j$. Вырожденная особенность порядка n распалась в объединение $n-1$ невырожденных критических точек индекса 1.

Наоборот, пусть в окрестности нуля U плоскости R^2 с координтами (x, y) задана функция Морса $f = f(x, y)$, у которой в точности $n-1$ критических точек $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$ индекса 1 таких, что $f(m_i) = 0$ для $i = 1, 2, \dots, n-1$. Тогда в окрестности U найдется путь l гомеоморфный отрезку, который содержит начало координат вместе с критическими точками $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$ и гладкое отображение $h : U \to U$ такое, что $h(l) = 0, h = Id$ вне некоторой ε-окрестности $V \subset U$ пути l, так что функция $g = f \circ h^{-1}$ топологически эквивалентна в U функции $\operatorname{Re} z^n$.

2. Графы Кронрода–Риба функций, заданных на некомпактных поверхностях. Пусть f — гладкая функция с изолированными критическими точками, заданная на некомпактной поверхности N. Мы предполагаем, что все критические точки функции f — изолированные и лежат во внутренности поверхности N, а на связных компонентах края N функция f принимает постоянные значения. Мы также предполагаем, что число компонент края поверхности N конечно.

Определение 2.1. *Скажем, что функция $f : N \to R$ удовлетворяет условию $\mathfrak{F}(k)$, если для каждого значения $a \in R$ число компонент связности множества $f^{-1}(a)$ не превышает k.*

Рассмотрим произвольную компоненту связности линии уровня $f^{-1}(a)$ функции f, которую часто называют слоем. Если a — регулярное значение функции f, то слоем будет либо гладко вложенная в поверхность N окружность, либо гладко вложенная в N прямая линия. В случае, когда a — критическое значение, то слоем будет замкнутое множество, гомеоморфное либо окружности, либо прямой, либо некомпактному графу, у которого четный порядок вершин, больший двух [13]. Если рассмотреть все слои функции f, то получим разбиения поверхности N в объединение слоев, т.е. на N возникает слоение с особенностями. Принадлежность точки поверхности слою является отношением эквивалентности и, вводя естественную фактор-топологию в множество слоев, получаем фактор-множество. Это фактор-множество будет гомеоморфно одномерному симплициальному комплексу, которое будет обозначаться через $\Gamma_{K-R}(f)$.

Определение 2.2. *Граф $\Gamma_{K-R}(f)$ называется графом Кронрода–Риба функции f.*

По поводу этого определения см. [13 — 15]. Вершинам графа $\Gamma_{K-R}(f)$ соответствуют связные компоненты линий уровня, на которых находятся критические точки функции. Вершины порядка 1 соответствуют локальным экстремумам функции f. Если присутствуют вершины порядка два, то поверхность N — неориентируемая. Очевидно, что функция f каноническим образом задает функцию f_{K-R} на ее графе Кронрода–Риба $\Gamma_{K-R}(f)$. Значение f_{K-R} в точке $x \in \Gamma_{K-R}(f)$ равно значению f на компоненте связности линии уровня, соответствующей точке x .

Определение 2.3. *Функция f_{K-R} , заданная на графе Кронрода–Риба $\Gamma_{K-R}(f)$, называется $[K–R]$-образом функции f, заданной на поверхности N.*

Граф Кронрода–Риба допускает **ориентацию**, т.е. расстановку стрелок на ребрах, которые указывают направление, в котором функция f_{K-R} возрастает.

Заметим, что не всякий граф будет графом Кронрода–Риба для некоторой гладкой функции с изолированными критическими точками на поверхности [15].

Лемма 2.1. *Пусть на плоскости R^2 задана гладкая функция f, удовлетворяющая условию $\mathfrak{F}(k)$. Тогда ее граф Кронрода–Риба $\Gamma_{K-R}(f)$ гомеоморфен дереву.*

Доказательство. Предположим противное: пусть граф Кронрода–Риба $\Gamma_{K-R}(f)$ имеет цикл γ. Очевидно, что γ гомеоморфен окружности. Рассмотрим каноническую проекцию $\pi : R^2 \to \Gamma_{K-R}(f)$. Легко видеть, что существует вложение $j : \gamma \to R^2$ такое, что $\pi \cdot j = Id$. Замкнутая кривая $j(\gamma)$ по теореме Жордана ограничивает в R^2 область D, которая гомеоморфна кругу. Обозначим сужение функции f на $j(\gamma)$ через $\overline{f}$. Поскольку функция $\overline{f}$ продолжается во внутрь области D, то найдется линия уровня функции f, которая соединяет две разные точки a и b, лежащие на $j(\gamma)$. Но поскольку $\pi(a)$ и $\pi(b)$ — разные точки на цикле γ, то это означает, что точки a и b принадлежат разным компонентам связности функции f. Полученное противоречие доказывает справедливость леммы.

Определение 2.4. *Пусть граф Δ состоит из $2n$ ребер a_i, которые инцидентны вершине x. Спином в вершине x (обозначается $\lessdot x$) называется циклический порядок $(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{2n}}, a_{i_1})$ на ребрах a_i.*

Определение 2.5. *Пусть у графа Δ порядок каждой вершины четный и больше двух. Спином графа Δ называется задание спина в каждой его вершине. Граф Δ с заданным на нем спином называется спин-графом и обозначается $\lessdot\Delta$.*

Ясно, что на одном и том же графе можно различными способами задать спин.

Определение 2.6. *Пусть $\lessdot\Delta_1$ и $\lessdot\Delta_2$ — два спин-графа. Изоморфизм графов φ: $\lessdot\Delta_1 \to \lessdot\Delta_2$ сохраняет спины, если он сохраняет циклический порядок на ребрах в каждой вершине.*

Пусть на плоскости задана функция f, удовлетворяющие условию $\mathfrak{F}(k)$ и такая, что на ее линии уровня лежит не более одной критической точки, топологически эквивалентной $\operatorname{Re} z^n$ $(n \geqq 2)$. Если зафиксировать ориентацию плоскости, то в каждой вершине графа Кронрода–Риба $\Gamma_{K-R}(f)$ естественным образом **возникает спин** (см. рис. 1).

Определение 2.7. *Пусть на гладкой поверхности N заданы две функции f и g, удовлетворяющие условию $\mathfrak{F}(k)$ и такие, что на их линиях уровня лежит не более одной критической точки, топологически эквивалентной* $\operatorname{Re} z^n$ $(n \geqq 2)$. Предположим, что f_{K-R} и g_{K-R} — их $[K\text{-}R]$-образы на спин-графах $\lessdot\Gamma_{K-R}(f)$ и $\lessdot\Gamma_{K-R}(g)$. Скажем, что f и g $[K\text{-}R]$-эквивалентны, если их $[K\text{-}R]$-образы f_{K-R} и g_{K-R} эквивалентны, т.е. существует сохраняющий спин изоморфизм $s : \lessdot\Gamma_{K-R}(f) \to \lessdot\Gamma_{K-R}(g)$ и гомеоморфизм $t : R^1 \to R^1$ такие, что $t \cdot f_{K-R} \cdot s^{-1} = g_{K-R}$.

Несложно доказать, что если две гладкие и удовлетворяющие условию $\mathfrak{F}(k)$ функции f и g, которые заданы на поверхности N, являются топологически эквивалентными, то f и g будут $[K\text{-}R]$-эквивалентными.

3. Гармонические полиномы. Полиномы, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими. Для гармонического полинома $P = P(x, y)$ существует комплексный полином $\mathbf{P}(z)$ такой, что $P(x, y) = \operatorname{Re}\mathbf{P}(z)$. Если $P(x, y) = \operatorname{Re}\mathbf{P}(z)$ и $Q(x, y) = \operatorname{Im}\mathbf{P}(z)$, то критические точки полинома $\mathbf{P}(z)$ совпадают с критическими точками $P = P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Кроме того, в окрестностях критических точек гармонические полиномы $P = P(x, y)$ и $Q(x, y)$ топологически эквивалентны. Однако в R^2 они могут быть топологически неэквивалентными. В качестве примера рассмотрим сопряженные гармонические полиномы $P(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 3x$ и $Q(x, y) = -y^3 + 3x^2y - 3y$. Они имеют по две невырожденные критические точки, координаты которых $(\pm 1, 0)$. Для $P(x, y)$ эти критические точки лежат на разных линиях уровня, а для $Q(x, y)$ они лежат на одной линии уровня. Следовательно $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ топологически неэквивалентны.

Известно, что критические точки гармонической функции двух переменных $f(x, y)$ — всегда изолированные и, как уже отмечалось, в окрестности критической точки **непрерывной** заменой координат $f(x, y)$ можно привести к виду $f = \operatorname{Re} z^n + c$ $(n \geq 2)$. Если c — критическое значение гармонической функции $f(x, y)$, заданной в R^2, то линия уровня $f(x, y) = c$ гомеоморфна бесконечному дереву, вложенному в R^2. Каждая вершина этого дерева имеет четную валентность и между вершинами дерева и критическими точками $f(x, y)$, лежащими на этой линии уровня, имеется биекция. Число вершин может быть не более чем счетным. Этот факт следует из принципа максимума и локального представления гармонической функции в окрестности критической точки.

У гармонического полинома $P = P(x, y)$ число компонент связности любой линии уровня всегда конечное и линии уровня регулярного значения гомеоморфны числовой прямой.

Вершинам графа $\Gamma_{K-R}(P)$ соответствуют связные компоненты линий уровня, на которых лежат критические точки полинома.

Лемма 3.1. *Гармонические полиномы от двух переменных разных степеней всегда топологически неэквивалентны.*

Доказательство. Очевидно, что если два гармонические полинома $P_1(x, y)$ и $P_2(x, y)$ будут топологически эквивалентными, то число критических точек у них одинаковое и степени вырожденности соответствующих критических точек совпадают. Если $\mathbf{P}(z)$ — комплексный полином степени n с критическими точками $z_1, z_2, \ldots, z_k$ кратности $l_1, l_2, \ldots, l_k$, то имеет место формула Римана–Гурвица

$$2n - 2 = \sum_{\nu=1}^{\nu=k} l_\nu \,.$$

Предположим противное: пусть два гармонических полинома $P_1(x,y)$ и $P_2(x,y)$ разных степеней будут топологически эквивалентными. Рассмотрим сопряженные им гармонические полиномы $Q_1(x,y)$ и $Q_2(x,y)$. Формула Римана–Гурвица, примененная к комплексным полиномам $\mathbf{P}_1(z) = P_1(x,y) + iQ_1(x,y)$ и $\mathbf{P}_2(z) = P_2(x,y) + iQ_2(x,y)$, дает противоречие, что доказывает лемму.

Лемма 3.2. *Графы Кронрода–Риба гармонических полиномов разных степеней не изоморфны.*

Доказательство. Предположим противное: пусть два гармонических полинома $P_1(x,y)$ и $P_2(x,y)$ разных степеней будут топологически эквивалентными. Тогда их графы Кронрода–Риба $\Gamma_{K-R}(P_1(x,y))$ и $\Gamma_{K-R}(P_2(x,y))$ будут изоморфными. Это означает, что у них одинаковое число вершин и одинаковое число ребер, входящих в соответствующие вершины. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_s$ — вершины графа $\Gamma_{K-R}(P_1(x,y))$, а $w_1, w_2, \ldots, w_s$ — вершины графа $\Gamma_{K-R}(P_2(x,y))$.

Обозначим через $n(v_i)$ $\big(n(w_i)\big)$ число ребер, входящих в вершину v_i $\big(w_i\big)$. Положим

$$N(\Gamma_{K-R}(P_1(x,y)) = \sum_{j=1}^{j=s} n(v_j), \quad N(\Gamma_{K-R}(P_2(x,y)) = \sum_{j=1}^{j=s} n(w_j).$$

По нашему предположению

$$N(\Gamma_{K-R}(P_1(x,y)) = N(\Gamma_{K-R}(P_2(x,y))\,.$$

Число ребер, входящих в каждую вершину v графа Кронрода–Риба, легко вычислить, используя степень вырожденности критических точек, которые соответствуют вершине v. Построив комплексные полиномы так, как в доказательстве предыдущей леммы, и, используя формулу Римана–Гурвица, можно получить, что $N(\Gamma_{K-R}(P_1(x,y))$ не равно $N(\Gamma_{K-R}(P_2(x,y))$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Гармонический полином называется гармоническим полиномом общего положения, если на его линии уровня лежит не более одной критической точки. Очевидно, что гармонический полином общего положения $P(x,y)$ порождает ориентированный спин-граф $\triangleleft\Gamma_{K-R}(P(x,y))$.

Теорема 3.2. *Гармонические полиномы $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ общего положения будут топологически эквивалентными тогда и только тогда, когда они $K-R$-эквивалентные.*

Доказательство. *Необходимость.* Очевидно, что если полиномы $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ топологически эквивалентны, то они $K-R$ эквивалентны.

Достаточность. Рассмотрим непересекающиеся замкнутые окрестности U_i и V_i критических линий уровней полиномов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, целиком состоящих из линий уровней. Построим ориентированные спин-графы Кронрода–Риба $\lhd\Gamma_{K-R}(P(x, y))$ и $\lhd\Gamma_{K-R}(Q(x, y))$. Пусть $s : \lhd\Gamma_{K-R}(f) \to \lhd\Gamma_{K-R}(g)$ — изоморфизм, сохраняющий спин. Этот изоморфизм дает возможность построить гомеоморфизмы h_i между окрестностностями U_i и V_i, которые переводят линии уровня полинома $P(x, y)$ в линии уровня полинома $Q(x, y)$. Несложно заметить, что гомеоморфизмы h_i можно продолжить до гомеоморфизма h всей плоскости переводящий линии уровня полинома $P(x, y)$ в линии уровня полинома $Q(x, y)$. Теорема доказана.

Замечание 3.1. *Заметим, что в работе* [8] *в определении* 2 *пропущено условие на спин.*

Работа выполнена в рамках целевой программы НАН Украины “Розробка математичних моделей та чисельно-аналітичних методів сучасних задач фізико-технічних і медико-біологічних наук і інформаційних технологій” НДР № 3-12-20

Список литературы

[1] Арнольд В. И. *Topological classification of Morse polynomials* // Differential equations and topology. I, Collected papers. In commemoration of the centenary of the birth of Academician Lev Semenovich Pontryagin. — Tr. Mat. Inst. Steklova. — 2010. — **268**. — P. 40—55.

[2] Кудрявцева Е. А. *О реализации гладких функций на поверхностях в виде функций высоты* // Мат. сб. — 1999. — **190**, № 1. — С. 29—88.

[3] Максименко С. И. *Классификация m-функций на поверхностях* // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 8. — С. 1129—1135.

[4] Ошемков А. А. *Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей* // ТР. МИРАН. — 1994. — **205**. — С. 131—140.

[5] Шарко В. В. *Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях* // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 5. — С. 687—700.

[6] Шарко В. В. *Функции на поверхностях. I* // Некоторые вопросы современной математики. Праці Ін-ту математики НАН України. — Т. 25. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. — С. 408—434.

[7] Nicolaescu L. *Counting Morse functions on the 2-sphere* // Compositioj Math. — 2008. — **144**. — P. 1081—1106.

[8] Шарко В. В. *Топологическая классификация функций* // Доп. НАН України. — 2013. — № 4. — С. 23—25.

[9] Thom R. *L'equivalence d'une founction differentiable et d'un polynome* // Topology. — 1965. — **2**, № 3. — P. 297—307.

[10] Fukuda T. *Tupes topologiques des polynomes* // Publications mathematiques de l'I.H.E. — 1976. — **46**. — P. 87—106.

[11] Prishlyak A. O. *Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface* // Topology and its Applications. — 2002. — **119**. — P. 257—267.

[12] Милнор Дж. *Теория Морса.* — Москва: Мир, 1965. — 184 с.

[13] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. *Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем.* — Москва: Наука, 1997. — 352 с.

[14] Кронрод А. С. *О функциях двух переменных* // Успехи мат. наук. — 1950. — **5**, № 1. — С. 24—134.

[15] Sharko V. V. *About Kronrod-Reeb graph of fuction on a manifold* // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2006. — **12**, № 4. — P. 389—396.