Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 4–5, 557–564

УДК 517.5

Я. В. Заболотний

(Інститут математики НАН України, Київ)

Задача про обчислення максимуму добутку внутріщніх радіусів неперетинних областей на комплексній площині

yaroslavzabolotnii@mail.ru

Присвячена світлій пам'яті Промарза Меліковича Тамразова

Розглядається одна відома екстремальна задача про неперетинні області на комплексній площині.

We consider a well-known problem on nonoverlapping domains in the complex plane.

Одним з класичних напрямків розвитку геометричної теорії функцій комплексної змінної є розв'язання екстремальних задач на класах областей, що не перетинаються. Першим важливим результатом даної тематики була теорема Лаврентьєва [1]. Значний вклад в розвиток цього напрямку було зроблено багатьма авторами (див., наприклад, $[1-9]$). Зокрема, в роботі [5] було сформульовано наступну екстремальну задачу.

Задача 1. Довести, що максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \tag{1}$$

де B_0, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ $(n \geq 2)$ — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j в точці

a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0,n}$ і $0 < \gamma \leq n$ (див, наприклад, [5, 6]), досягається для деякої конфігурації областей, які мають n-кратну симетрію.

В даній роботі встановлено наступний результат.

Теорема 1. *Для довільного $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$ існує натуральне n_0 таке, що для $n \geq n_0$ і $0 \leq \gamma \leq n^{\alpha}$ виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq r^{\gamma}(D_0, a_0^0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k^0),$$

де B_0, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — попано неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j в точці a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0,n}$, причому знак рівності досягається, наприклад, для $a_k = a_k^0$, $B_k = D_k$, $k = \overline{0,n}$, де a_k^0, D_k — відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

В якості n_0 можна взяти $[e^{\frac{1}{(\frac{2}{3}-\alpha)^2}}] + 1$.

Доведення. Спочатку встановимо правильність теореми у випадку $\gamma = n^{\alpha}$ при фіксованому $\alpha \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ і $n \geq e^{\frac{1}{(\frac{2}{3}-\alpha)^2}}$.

Згідно з умовою задачі, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$. Припустимо для конкретності, що

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \cdots < \arg a_n < 2\pi.$$

Далі означимо числа α_k у такий спосіб:

$$\alpha_1 := \tfrac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1), \quad \alpha_2 := \tfrac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2), \quad \ldots,$$

$$\alpha_n := \tfrac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_n).$$

Нехай $P_k := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $k = \overline{1,n}$, $\arg a_{n+1} = 2\pi$, $P_0 := P_n$, $P_{n+1} := P_1$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 2$.

При кожному $k = \overline{1,n}$ позначимо через $z_k(w)$ ту вітку многозначної аналітичної функції $z = -i(e^{-i\arg a_k} w)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $z_0 := z_n$, $z_{n+1} := z_1$, яка конформно і однолисто відображає області P_k, $k = \overline{1,n}$, на праву півплощину $\mathrm{Re}\, z > 0$.

Тоді для областей B_k, $k=\overline{1,n}$, таких, як і в Задачі 1, позначимо через $D_k^{(1)}$ об'єднання зв'язної компоненти множини $z_k(B_k\bigcap\overline{P_k})$, що містить точку $z_k(a_k)$, з її відображенням відносно уявної осі, а через $D_k^{(1)}$ — об'єднання зв'язної компоненти множини $z_{k-1}(B_k\bigcap\overline{P_{k-1}})$, що містить точку $z_{k-1}(a_k)$, з її відображенням відносно уявної осі, $D_0^{(2)}:=D_2^{(2)}$. Сімейство двох симетричних відносно уявної осі областей $\{D_k^{(1)};D_{k-1}^{(2)}\}$, будемо називати результатом розділяючого перетворення області B_k. Для утворених областей згідно з теоремою 3 роботи [8] виконуэться нерівність:

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\leq\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\left(r(D_{k+1}^{(i)},i)\ r(D_k^{(2)},-i)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогічно здійснимо розділяюче перетворення області B_0 і отримаємо нерівність $r(B_0,0)\leq\prod\limits_{k=1}^{n}(r(D_0^{(k)};0))^{\frac{\alpha_k^2}{2}}$.

Далі, як і в згаданій вище теоремі 5.2.3 [9], за допомогою розділяючого перетворення отримаємо рівність:

$$J_n^0(\gamma)=r^{\gamma}\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}r\left(D_k,d_k\right)=\left(\frac{4}{n}\right)^{n}\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}},\quad(2)$$

де D_k — згадані вище кругові області квадратичного диференціала (1). Зауважимо також, що в роботі [7] було повністю розв'зано задачу Дубініна за умови, що $n\geq 5$ і $\alpha_k\sqrt{\gamma}\leq 2$. Тому нам залишається лише розв'язати її за умови $\alpha_0\sqrt{\gamma}>2$, де $\alpha_0=\max\limits_k\alpha_k$. Знову ж таки, за теоремою 5.2.3 [9] за умови $\alpha_0\sqrt{\gamma}>2$ отримаємо наступні співвідношення:

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leqslant\left[2^n\alpha_0\left(\tfrac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}=$$
$$=\left[2^n\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Оцінимо тепер величину

$$P_n(\gamma)=\frac{r^{\gamma}(B_0,0)\prod\limits_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)}{r^{\gamma}(D_0,0)\prod\limits_{k=1}^{n}r(D_k,d_k)}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left[2\cdot 2^{n-1}\,\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\,\left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}}\,\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\,\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}}\,\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}}\,\left[1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}\,\left(\frac{n^2}{4\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\,\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}\times$$

$$\times\left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}\,\left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\,\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Звідси

$$P_n(n^\alpha) \leq \left[\frac{n}{4}\right]^{n^\alpha+1}\left[1-\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right]^{n-1-\frac{n-1}{n^{1-\alpha}}}\left(\frac{n^{2-\alpha}}{4}\right)^{\frac{1}{n^{1-\alpha}}}\left(1-\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right)^{n+\frac{1}{n^{1-\alpha}}}\times$$

$$\times\left(\frac{1+\frac{1}{n^{1-\frac{\alpha}{2}}}}{1-\frac{1}{n^{1-\frac{\alpha}{2}}}}\right)^{2n^{\frac{\alpha}{2}}}\,\left(\frac{n}{4}\right)^{-\frac{1}{n^{1-\alpha}}}\,\left(\frac{4}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{1-\frac{1}{n^{1-\alpha}}}\,\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{1-\alpha}}} =$$

$$= \left[\frac{n}{4}\right]^{n^\alpha+1}\left[1-\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right]^{n-1-\frac{n-1}{n^{1-\alpha}}}\left(n^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{n^{1-\alpha}}}\left(1-\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right)^{n+\frac{1}{n^{1-\alpha}}}\times$$

$$\times\left(\frac{1+\frac{1}{n^{1-\frac{\alpha}{2}}}}{1-\frac{1}{n^{1-\frac{\alpha}{4}}}}\right)^{2n^{\frac{\alpha}{2}}}\,\left(\frac{4}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{1-\frac{1}{n^{1-\alpha}}}\,\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{1-\alpha}}}.$$

Введемо наступні позначення:

$$g(x) = \left[\frac{x}{4}\right]^{x^\alpha+1}\left[1-\frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}}}\right]^{x-1-\frac{x-1}{x^{1-\alpha}}}, \quad f_1(x) = \left(x^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{x^{1-\alpha}}},$$

$$f_2(x) = \left(1-\frac{1}{x^{2-\alpha}}\right)^{x+\frac{1}{x^{1-\alpha}}}, \quad f_3(x) = \left(\frac{1+\frac{1}{x^{1-\frac{\alpha}{2}}}}{1-\frac{1}{x^{1-\frac{\alpha}{2}}}}\right)^{2x^{\frac{\alpha}{2}}},$$

$$f_4(x) = \left(\frac{4}{x^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{1-\frac{1}{x^{1-\alpha}}}, \quad f_5(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1-\frac{x-1}{x^{1-\alpha}}}.$$

Покажемо, що $f_1(x)$ монотонно спадає при $x \in [e^9; \infty)$. З цією метою візьмемо від функції $f_1(x)$ логарифмічну похідну:

$$(\ln f_1(x))' = (1-\alpha)x^{-(2-\alpha)}\,(-(1-\alpha)\ln x + 1)$$

і зазначимо, що нерівність $(\ln f_1(x))' < 0$ виконується при $x > e^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Оскільки значення виразу $e^{\frac{1}{1-\alpha}}$ для $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$ не перевищує $e^{\frac{1}{1-\frac{2}{3}}} = e^3 < 21$, то при $x \in [e^9; +\infty]$ функція $f_1(x)$ є монотонно спадною і, крім того, при всіх $x \geq e^9$ виконуються нерівності

$$\left(x^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{x^{1-\alpha}}} \leq \left(\left(e^9\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{(e^9)^{\frac{1}{3}}}} \leq 1.06.$$

Розглянемо тепер функцію $f_2(x)$. Оскільки $\left(1 - \frac{1}{x^{2-\alpha}}\right) < 1$, то $\left(1 - \frac{1}{x^{2-\alpha}}\right)^{x + \frac{1}{x^{1-\alpha}}} < 1$, тому для всіх $x \geq e^9$ виконується нерівність $f_2(x) < 1$.

Так, як і для функції $f_1(x)$, встановлюємо, що функція $f_3(x)$ є монотонно спадною при $x \geq e^9$, а тому при всіх $x \geq e^9$ виконуються нерівності:

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{x^{1-\frac{\alpha}{2}}}}{1 - \frac{1}{x^{1-\frac{\alpha}{2}}}}\right)^{2x^{\frac{\alpha}{2}}} \leq \left(\frac{1 + \frac{1}{(e^9)^{\frac{2}{3}}}}{1 - \frac{1}{(e^9)^{\frac{2}{3}}}}\right)^{2\cdot(e^9)^{\frac{1}{3}}} \leq 1.22.$$

Для функції $f_4(x)$ при всіх $x \geq e^9$ виконуються нерівності

$$\left(\frac{4}{x^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{1 - \frac{1}{x^{1-\alpha}}} \leq \left(\frac{4}{(e^9)^{\frac{1}{6}}}\right)^{1 - \frac{1}{(e^9)^{1/3}}} \leq 1.$$

Оскільки $\frac{x}{x-1} > 1$ при всіх $x \in [e^9; +\infty)$, то

$$f_5(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1-\frac{x-1}{x^{1-\alpha}}} \leq \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} = \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1} < e\,.$$

Враховуючи встановлені оцінки функцій $f_j(x)$, $j = \overline{1,5}$, будемо мати:

$$P(\sqrt[4]{n}) = g(n)\prod_{j=1}^{5} f_j(n) < g(n) \cdot 1.06 \cdot 1 \cdot 1.22 \cdot 1 \cdot e < 5g(n)\,.$$

Залишилося оцінити функцію $g(x)$. Маємо

$$\ln\left(g(x)\right) = \left(x^\alpha + 1\right)\ln\frac{x}{4} + \left(x - 1 - x^\alpha + x^{\alpha-1}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}}}\right).$$

$$(\ln (g(x)))' = \left(\alpha x^{\alpha-1}\right)\ln\frac{x}{4} + x^{\alpha-1} + \frac{1}{x} +$$
$$+ \left(1-\alpha x^{\alpha-1} + (\alpha-1)x^{\alpha-2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}}}\right) +$$
$$+\frac{1}{1-\frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}}}}\cdot\frac{\alpha}{2}\frac{1}{x^{1+\frac{\alpha}{2}}}\left(x-1-x^{\alpha}+x^{\alpha-1}\right).$$

Далі врахуємо, що при $x \geq e^9$ виконуються наступні нерівності:

$$\ln\left(1-\frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}}}\right) \leq -\frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{1}{2x^{\alpha}}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}}}} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{(e^9)^{\frac{1}{6}}}} < 1.3\,,$$

$$\left(x-1-x^{\alpha}+x^{\alpha-1}\right) > 0\,,$$

$$\left(1-\alpha x^{\alpha-1}+(\alpha-1)x^{\alpha-2}\right) > 0$$

і при $x \geq e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)^2}}$ при фіксованому α виконується нерівність

$$\ln x \leq x^{\frac{2}{3}-\alpha}\,.$$

Використовуючи ці нерівності, одержуємо

$$(\ln (g(x)))' < \left(\alpha x^{\alpha-1}\right)\ln\frac{x}{4} + x^{\alpha-1} + \frac{1}{x} +$$
$$+ \left(1-\alpha x^{\alpha-1}+(\alpha-1)x^{\alpha-2}\right)\left(-\frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{1}{2x^{\alpha}}\right) +$$
$$+\frac{0.65\alpha}{x^{1+\frac{\alpha}{2}}}\left(x-1-x^{\alpha}+x^{\alpha-1}\right) <$$
$$< \frac{\alpha}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{1-\alpha\ln 4}{x^{1-\alpha}} - \frac{1-0.65\alpha}{x^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{1}{2x^{\alpha}} + \frac{0.35\alpha}{x^{1-\frac{\alpha}{2}}} + \frac{\frac{\alpha}{2}+1}{x} -$$
$$-\frac{0.65\alpha}{x^{1+\frac{\alpha}{2}}} + \frac{1-0.35\alpha}{x^{2-\frac{\alpha}{2}}} + \frac{1-\alpha}{x^2}\,.$$

Введемо наступні позначення:

$$A(x) = \frac{\alpha}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{1-\alpha\ln 4}{x^{1-\alpha}} - \frac{1-0.65\alpha}{x^{\frac{\alpha}{2}}}\,,$$

$$B(x) = -\frac{1}{2x^{\alpha}} + \frac{0.35\alpha}{x^{1-\frac{\alpha}{2}}} + \frac{\frac{\alpha}{2}+1}{x}\,,$$

$$C(x) = -\frac{0.65\alpha}{x^{1+\frac{\alpha}{2}}} + \frac{1-0.35\alpha}{x^{2-\frac{\alpha}{2}}} + \frac{1-\alpha}{x^2}\,.$$

Оцінимо кожну з тільки що введених функцій для фіксованого α при $x \in \left[e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)^2}}; +\infty\right)$:

$$A(x) = \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}}}\left(-(1-0.65\alpha) + \frac{\alpha}{x^{\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}}} + \frac{1-\alpha\ln 4}{x^{1-\frac{3\alpha}{2}}}\right) <$$

$$< \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}}}\left(-0.5 + \frac{\frac{2}{3}}{e^{\frac{1}{2\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)}}} + \frac{0.6}{e^{\frac{3}{2\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)}}}\right) < \frac{-0.5+0.15+0.01}{x^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{-0.34}{x^{\frac{\alpha}{2}}} < 0\,;$$

$$B(x) = -\frac{0.3}{x^{\alpha}} + \frac{0.35\alpha}{x^{1-\frac{\alpha}{2}}} - \frac{0.2}{x^{\alpha}} + \frac{\frac{\alpha}{2}+1}{x} <$$

$$< \left(-\frac{0.3}{x^{\alpha}} + \frac{0.3}{x^{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) + \left(-\frac{0.2}{x^{\alpha}} + \frac{1.4}{x}\right) < 0\,;$$

$$C(x) = \frac{1}{x^{1+\frac{\alpha}{2}}}\left(-0.65\alpha + \frac{1-0.35\alpha}{x^{1-\alpha}} + \frac{1-\alpha}{x^{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) <$$

$$< \frac{1}{x^{1+\frac{\alpha}{2}}}\left(-0.2 + \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right) < 0\,.$$

А оскільки $(\ln(g(x)))' < A(x) + B(x) + C(x)$, то можна зробити висновок, що $(\ln(g(x)))' < 0$, тобто функція $g(x)$ є монотонно спадною для фіксованого α при $x \in \left[e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)^2}}; +\infty\right)$. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $g(x) < 0.1$ для $x = e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)^2}}$, а тому

$$P_n(\gamma) \leq 0.5 < 1\,.$$

Звідси випливає, що екстремальною є наведена в теоремі конфігурація. Теорему доведено.

Автор висловлює подяку професору О. К. Бахтіну за постановку задачі, цінні поради і зауваження.

Література

[1] Лаврентьев М. А. *К теории конформных отображений* // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5**. — С. 159—245.

[2] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* — Москва: Наука, 1966. — 628 с.

[3] Дженкинс Дж. А. *Однолистные функции и конформные отображения.* — Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.

[4] Бахтина Г. П. *Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях*: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1975. — 11 с.

[5] Дубинин В. Н. *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук. — 1994. — **49**, № 1. — С. 3—76.

[6] Дубинин В. Н. *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1988. — **168**. — С. 48—66.

[7] Ковалев Л. В. *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности* // Дальневосточный мат. сб. — 1996. — **2**. — С. 96—98.

[8] Кузьмина Г. В. *Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров* // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2003. — **302**. — С. 52—67.

[9] Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе.* — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. — 308 с.

[10] Бахтін О. К., Заболотний Я. В. *Застосування розділяючого перетворення в задачах про неперетинні області* // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, № 2. — С. 327—331.

[11] Заболотний Я. В. *Застосування розділяючого перетворення в задачах про неперетинні області* // Доп. НАН України. — 2011. — № 4. — С. 20—24.

[12] Заболотний Я. В. *Про одну екстремальну задачу В.М. Дубініна* // Укр. мат. журн. — 2012. — **64**, № 1. — С. 24—31.