УДК 517.9+531.19

Ігор Гап'як

Київський національний університет імені Т.Г. Шевченка
gapjak@ukr.net

Кінетичні рівняння для системи пружних куль з початковими кореляціями

Kinetic equations for a system of hard spheres with initial correlations, namely, the generalized Enskog kinetic equation and the Boltzmann type kinetic equation are constructed.

Побудовано кінетичні рівняння для системи пружних куль з початковими кореляціями, а саме, узагальнене кінетичне рівняння Енскоґа та рівняння типу Больцмана.

1 Вступ

Широко відомими є строгі результати про виведення для системи пружних куль кінетичного рівняння Больцмана з ієрархії рівнянь ББҐКІ (Боголюбов – Борн – Ґрін – Кірквуд – Івон) в скейлінґовій границі Больцмана – Ґреда [1] – [4]. В такому підході до виведення кінетичного рівняння Больцмана стани системи пружних куль в початковий момент описуються в термінах одночастинкової функції розподілу за відсутності кореляцій частинок [5]. Для системи пружних куль, початковий стан якої характеризується кореляціями (наприклад, кореляціями, якими характеризуються конденсовані стани системи), виведення кінетичного рівняння типу Больцмана є відкритою проблемою.

Аналогічна проблема має місце для кінетичного рівняння Енскоґа [6], яке узагальнює рівняння Больцмана для щільних газів. В цьому випадку це пов'язано, зокрема, з апріорі сформульованою структурою інтегралу зіткнень такого кінетичного рівняння [7, 8]. В роботі [9] дано строге обґрунтування виведення рівняння Енскоґа з динаміки системи нескінченної кількості пружних куль. За допомогою методу кластерних розкладів кумулянтів груп операторів системи пружних куль для початкових станів, які визначаються одночастинковою функцією розподілу, в просторі послідовностей інтегрованих функцій доведено еквівалентність початкової задачі для ієрархії рівнянь ББҐКІ і початкової задачі для сформульованого узагальнення кінетичного рівняння Енскоґа та послідовності маргінальних функціоналів стану. В роботі [10] також встановлено зв'язок побудованого узагальнення кінетичного рівняння Енскоґа з рівнянням Больцмана та досліджено існування границі Больцмана – Ґреда його роз'язку.

В даній статті узагальнено результати робіт [9, 10] для випадку початкових станів, які характеризується кореляціями, і побудовано узагальненненя кінетичного рівняння Енскоґа та кінетичне рівняння типу Больцмана з початковими кореляціями.

2 Кінетичне рівняння Енскоґа

Розглянемо систему частинок одиничної маси, які взаємодіють як пружні кулі з діаметром $\sigma > 0$. Кожна частинка системи характеризується фазовими координатами $(q_i, p_i) \equiv x_i \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $i \geq 1$. Для конфігурацій такої системи справедливі такі нерівності: $|q_i - q_j| \geq \epsilon$, $i \neq j \geq 1$, тобто множина $W_n \equiv \big\{(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^{3n} \big| |q_i - q_j| < \epsilon$ хоча б для однієї пари $(i, j) : i \neq j \in (1, \ldots, n)\big\}$ є множиною заборонених конфігурацій, скейлінґовий параметр $\epsilon > 0$ – відношення діаметра $\sigma > 0$ частинок до значення середньої довжини їх вільного пробігу.

Еволюція системи n пружних куль описується групою ізометричних еволюційних операторів визначених в просторі інтегровних функцій [2]

$$
\begin{aligned}
&S_n(t, 1, \ldots, n) f_n(x_1, \ldots, x_n) \doteq \qquad\qquad (1)\\
&\doteq \begin{cases} f_n\big(\mathtt{X}_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \mathtt{X}_n(t, x_1, \ldots, x_n)\big), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{3n} \times (\mathbb{R}^{3n} \setminus W_n)), \\ 0, \qquad\qquad\qquad\quad (q_1, \ldots, q_n) \in W_n, \end{cases}
\end{aligned}
$$

де функція $\mathtt{X}_i(t)$ визначена при $t \in \mathbb{R}$ майже скрізь на фазовому просторі $(\mathbb{R}^{3n} \times (\mathbb{R}^{3n} \setminus W_n))$ – фазова траєкторія i-ї частинки, яка побудована в [2].

Нехай початковий стан такої системи цілком визначається одночастинковою функцією розподілу F_1^0,

$$F_s(t)_{|t=0} = \prod_{i=1}^{s} F_1^0(x_i) g_s(x_1, \ldots, x_s), \quad s \geq 1,$$

де $g_s(x_1, \ldots, x_s)$ – неперервно диференційована функція з компактним носієм для якої справедлива оцінка $\max_{s \in \mathbb{N}} \max_{(x_1,\ldots,x_s) \in K} \mid g_s(x_1, \ldots, x_s) \mid \leq \delta$, $K \subset \mathbb{R}^{3s} \times \mathbb{R}^{3s}$ – компактна множина, $\delta \equiv const$. Функція $g_s(x_1, \ldots, x_s)$ визначає початкову кореляцію системи s пружних куль. Тоді еволюція усіх можливих станів системи пружних куль в просторі інтегрованих функцій описується послідовністю $F(t \mid F_1(t)) = (F_1(t, x_1), F_2(t, x_1, x_2 \mid F_1(t)), \ldots, F_s(t, x_1, \ldots, x_s \mid F_1(t)), \ldots)$ маргінальних функціоналів стану $F_s(t, x_1, \ldots, x_s \mid F_1(t))$, $s \geq 2$, які явно визначаються через розв'язок $F_1(t, x_1)$ задачі Коші для узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа з початковими кореляціями (при $t \geq 0$) [9]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} F_1(t, x_1) = -\langle p_1, \frac{\partial}{\partial q_1} \rangle F_1(t, x_1) + \\ &+\epsilon^2 \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2_+} dp_2 \, d\eta \, \langle \eta, (p_1 - p_2) \rangle \big(F_2(t, q_1, p_1^*, q_1 - \epsilon\eta, p_2^* \mid F_1(t)) - \\ &-F_2(t, x_1, q_1 + \epsilon\eta, p_2 \mid F_1(t)) \big), \end{aligned} \tag{2}$$

$$F_1(t)_{|t=0} = F_1^0, \tag{3}$$

де $\langle \eta, (p_i - p_{s+1}) \rangle \doteq \sum_{\alpha=1}^{3} \eta^\alpha (p_i^\alpha - p_{s+1}^\alpha)$, значення імпульсів p_i^*, p_{s+1}^* визначаються такими виразами:

$$\begin{aligned} p_i^* &\doteq p_i - \eta \, \langle \eta, (p_i - p_{s+1}) \rangle \,, \\ p_{s+1}^* &\doteq p_{s+1} + \eta \, \langle \eta, (p_i - p_{s+1}) \rangle \,, \end{aligned}$$

$\mathbb{S}^2_+ \doteq \{\eta \in \mathbb{R}^3 \big| \, |\eta| = 1, \langle \eta, (p_i - p_{s+1}) \rangle > 0\}$ та індексами $(1^\sharp, 2^\sharp_\pm)$ позначена дія еволюційного оператора (5) на відповідні фазові точки: $(q_1, p_1^\sharp)$ і $(q_1 \pm \epsilon\eta, p_2^\sharp)$. Маргінальний функціонал стану $F_2(t \mid F_1(t))$, якими визначається інтеграл зіткнень кінетичного рівняння (2) є елементом послідовності $F(t \mid F_1(t))$ і в загальному випадку представляється розкладом в такий ряд [9]:

$$F_s\big(t, x_1, \ldots, x_s \mid F_1(t)\big) \doteq \tag{4}$$
$$\doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \ldots dx_{s+n}\, \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{Y\}, X \setminus Y) \prod_{i=1}^{s+n} F_1(t, x_i),$$

де твірні еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n \geq 0$, визначаються розкладами

$$\mathfrak{V}_{1+n}(t, \{Y\}, X \setminus Y) = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{m_1=1}^{n} \ldots \tag{5}$$
$$\ldots \sum_{m_k=1}^{n-m_1-\ldots-m_{k-1}} \frac{1}{(n-m_1-\ldots-m_k)!} \widehat{\mathfrak{A}}_{1+n-m_1-\ldots-m_k}(t, \{Y\},$$
$$s+1, \ldots, s+n-m_1-\ldots-m_k) \prod_{j=1}^{k} \sum_{k_2^j=0}^{m_j} \ldots \sum_{k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s}=0}^{k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s-1}}$$
$$\prod_{i_j=1}^{s+n-m_1-\ldots-m_j} \frac{1}{(k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s+1-i_j} - k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s+2-i_j})!} \times$$
$$\times \widehat{\mathfrak{A}}_{1+k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s+1-i_j} - k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s+2-i_j}}(t, i_j, s+n-m_1-\ldots$$
$$\ldots - m_j + 1 + k^j_{s+n-m_1-\ldots-m_j+2-i_j}, \ldots, s+n-m_1-\ldots-m_j +$$
$$+ k^j_{s+n-m_1-\ldots-m_j+1-i_j}).$$

В останньому виразі використано такі позначення: $(\{Y\}, X \setminus Y)$ – множина індексів, яка складається із елементів $\{Y\}, s+1, \ldots, s+n$ та $\{Y\}$ – множина, яка складається із одного елемента $Y \equiv (1, \ldots, s)$, $k_1^j \equiv m_j$, $k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s+1} \equiv 0$, та введено такі поняття: оператор $\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t)$ – кумулянт розсіяння

$$\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t, \{Y\}, X \setminus Y) \doteq \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{Y\}, X \setminus Y) \times \tag{6}$$
$$\times g_s(x_1, \ldots, x_s) \prod_{i=1}^{s+n} \mathfrak{A}_1(t, i),$$

оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$ – кумулянт $(1+n)$-го порядку груп операторів (1)

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A}_{1+n}(-t,\{Y\},X\setminus Y)\doteq \\ &\doteq\sum_{\mathrm{P}:\,(\{Y\},\,X\setminus Y)=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}S_{|\theta(X_i)|}(-t,X_i),\end{aligned}\tag{7}$$

де $\sum_{\mathrm{P}}$ – сума по всіх розбиттях P множини індексів $(\{Y\},\,X\setminus Y)\equiv(\{Y\},s+1,\ldots,s+n)$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножин $X_i\in(\{Y\},X\setminus Y)$, що взаємно не перетинаються та $\theta(\{Y\},X\setminus Y)\doteq X$ – відображення декластеризації.

Наведемо приклади твірних еволюційних операторів (5) для маргінальних функціоналів (4):

$$\mathfrak{V}_1(t,\{Y\})=\widehat{\mathfrak{A}}_1(t,\{Y\})\doteq S_s(-t,Y)g_s(x_1,\ldots,x_s)\prod_{i=1}^{s}S_1(t,i),$$

$$\mathfrak{V}_2(t,\{Y\},s+1)=\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,\{Y\},s+1)-\widehat{\mathfrak{A}}_1(t,\{Y\})\sum_{i_1=1}^{s}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,i_1,s+1).$$

Функціонали $F_s\big(t\mid F_1(t)\big)$, $s\geq 2$, існують і представляються збіжними по нормі простору інтегрованих функцій рядами за умови $\|F_1(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)}<e^{-(3s+2)}\delta^{-s}$, де δ – мажоранта початкової кореляційної функції. Така оцінка встановлюється аналогічно оцінці для маргінальних функціоналів стану у випадку початкових станів, які визначаються одночастинковими маргінальними функціями розподілу на дозволених конфігураціях [9].

Доведення сформульованого результату для системи пружних куль, стан якої в початковий момент характеризується кореляціями (2), ґрунтується на застосуванні кінетичних кластерних розкладів для кумулянтів розсіяння (6) аналогічно до методу кінетичних кластерних розкладів, використаного для виведення узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа в роботі [9].

Розв'язок задачі Коші для узагальненого рівняння Енскоґа з початковими кореляціями (2)-(3) в просторі інтегрованих функцій існує для довільного $t\in\mathbb{R}^1$ за умови $\|F_1^0\|_{L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)}<e^{-1}$ та зображується

таким рядом [9]:

$$F_1(t,x_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_2\dots \\ \dots dx_{n+1}\mathfrak{A}_{1+n}(-t)\prod_{i=1}^{n+1}F_1^0(x_i)g_{1+n}(x_1,\dots,x_{1+n}), \tag{8}$$

де твірний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(-t)\equiv\mathfrak{A}_{1+n}(-t,1,\dots,n+1)$ – кумулянт $(1{+}n)$-го порядку (7) груп операторів (1). Доведення цього твердження є аналогічним до доведення існування розв'язку задачі Коші для узагальненого рівняння Енскоґа у випадку, коли початкові стани системи пружних куль визначаються одночастинковими функціями розподілу на дозволених конфігураціях та ґрунтується на використанні методу кінетичних кластерних розкладів для кумулянтів (7) груп еволюційних операторів (1) системи пружних куль [9].

Стани системи нескінченного числа пружних куль описуються маргінальними функціями розподілу, які належать простору обмежених по конфігураційних змінних і експоненціально спадаючих по імпульсних змінних функцій [2]. Якщо початкова маргінальна одночастинкова функція розподілу задовольняє умову

$$|F_1^0(x_1)|\leq Ce^{-\frac{\beta}{2}p_1^2}, \tag{9}$$

де $\beta>0$ – параметр, $C<\infty$ – константа, тоді кожен член ряду (8) існує, ряд (8) збігається рівномірно по x_1 на кожному компакті при $t\in(-t_0,+t_0)$, де $t_0\equiv(2^9\pi^{3/2}\max(\beta^{-3/2},\beta^{-1/2})\epsilon^2C)^{-1}$, і функцією (8) визначається слабкий розв'язок задачі Коші для узагальненого рівняння Енскоґа з початковими кореляціями (2).

Доведення останнього твердження ґрунтується на аналогах рівнянь Дюамеля для кумулянтів груп операторів (1) та оцінок встановлених для ряду ітерацій ієрархії рівнянь ББГКІ системи пружних куль [1].

3 Гранична теорема Больцмана–Ґреда

Сформулюємо основний результат про існування скейлінґової границі Больцмана–Ґреда задачі Коші для узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа з початковими кореляціями при $t\geq 0$.

Справедлива така гранична теорема Больцмана–Ґреда.

Теорема 1 *Якщо початкова маргінальна функція розподілу F_1^0 задовольняє умову (9) та для неї існує в сенсі слабкої збіжності така границя*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\big(\epsilon^2 F_1^{0,\epsilon}(x) - f_1^0(x)\big) = 0, \tag{10}$$

тоді за умови, що $t < t_0 \equiv (2^5\pi^2\beta C)^{-1}$, існує границя Больцмана–Ґреда в сенсі слабкої збіжності

$$\lim_{\epsilon\to 0}\big(\epsilon^2 F_1^{\epsilon}(t,x) - f_1(t,x)\big) = 0, \tag{11}$$

де гранична одночастинкова функція розподілу визначається таким рівномірно збіжним на кожному компакті рядом

$$\begin{aligned} f_1(t,x_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t dt_1 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_2 \ldots \\ \ldots dx_{n+1}\, S_1(-t+t_1,1)\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(1,2)\prod_{j_1=1}^{2} S_1(-t_1+t_2,j_1)\ldots \\ \ldots \prod_{i_n=1}^{n} S_1(-t_n+t_n,i_n)\sum_{k_n=1}^{n}\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(k_n,n+1)\prod_{j_n=1}^{n+1} S_1(-t_n,j_n)\times \\ \times g_{n+1}(x_1,\ldots,x_{1+n})\prod_{i=1}^{n+1} f_1^0(x_i), \end{aligned} \tag{12}$$

та використано таке позначення

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_{n+1}\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(i,n+1)f_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1}) \equiv \\ &\equiv \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_+} dp_{n+1}d\eta\,\langle\eta,(p_i-p_{n+1})\rangle\big(f_{n+1}(x_1,\ldots,q_i,p_i^*,\ldots,x_s,q_i,p^*_{n+1}) - \\ &-f_{n+1}(x_1,\ldots,x_s,q_i,p_{n+1})\big). \end{aligned} \tag{13}$$

Якщо початкова функція розподілу f_1^0 задовольняє умову (9), для $t \geq 0$ гранична одночастинкова функція розподілу (12) є слабким розв'язком початкової задачі для кінетичного рівняння типу Больцмана для системи частинок з розсіянням пружних куль

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1(t,x_1)=-\langle p_1,\frac{\partial}{\partial q_1}\rangle f_1(t,x_1)+ \tag{14}$$
$$+\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_+}dp_2\,d\eta\,\langle\eta,(p_1-p_2)\rangle\big(f_1(t,q_1,p_1^*)f_1(t,q_1,p_2^*)g_2(q_1-tp_1^*,p_1^*,$$
$$q_1-tp_2^*,p_2^*)-f_1(t,x_1)f_1(t,q_1,p_2)g_2(q_1-tp_1,p_1,q_1-tp_2,p_2)\big),$$

$$f_1(t)_{|t=0}=f_1^0, \tag{15}$$

де використано позначення формули (2).

Доведення Теореми 1 ґрунтується на використанні аналогів рівнянь Дюамеля для кумулянтів груп операторів (1)

$$\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_{s+1}\dots dx_{s+n}\mathfrak{A}_{1+n}(-t,\{Y\},X\setminus Y)f_{s+n}= \tag{16}$$
$$=n!\int\limits_0^t dt_1\dots\int\limits_0^{t_{n-1}}dt_n\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_{s+1}\dots dx_{s+n}\prod_{j=1}^s S_1(-t+t_1,j)\times$$
$$\times\sum_{i_1=1}^s\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(i_1,s+1)S_s(-t_1+t_2,1,\dots,s)S_1(-t_1+t_2,s+1)\dots$$
$$\dots S_{s+n-1}(-t_{n-1}+t_n,1,\dots,s+n-1)S_1(-t_{n-1}+t_n,s+n)\times$$
$$\times\sum_{i_n=1}^{s+n-1}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(i_n,s+n)S_{s+n}(-t_n,1,\dots,s+n)f_{s+n},\qquad n\geq 1,$$

де f_{s+n} – неперервна обмежена функція та введено позначення

$$\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}dx_{n+1}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(i,n+1)f_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1})\equiv$$
$$\equiv\epsilon^2\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_+}dp_{n+1}d\eta\,\langle\eta,(p_i-p_{n+1})\rangle\big(f_{n+1}(x_1,\dots,q_i,p_i^*,\dots$$
$$\dots,x_s,q_i-\epsilon\eta,p_{n+1}^*)-f_{n+1}(x_1,\dots,x_s,q_i+\epsilon\eta,p_{n+1})\big),$$

та наступних твердженнях для кумулянтів асимтотично збурених груп операторів (1).

Лема 1 *[1]. Нехай f_s – неперервна обмежена функція, тоді для довільного скінченого інтервалу часу в сенсі слабкої збіжності справедлива рівність*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\big(S_s(-t)f_s-\prod_{j=1}^{s}S_1(-t,j)f_s\big)=0, \tag{17}$$

Внаслідок справедливості цієї леми для кумулянта розсіяння першого порядку (6) для довільного скінченого інтервалу часу в сенсі слабкої збіжності простору обмежених функцій маємо

$$\lim_{\epsilon\to 0}\big(\widehat{\mathfrak{A}}_1(t,\{Y\})f_s-Ig_s(q_1-tp_1,p_1;\ldots;q_s-tp_s,p_s)f_s\big)=0,$$

де I – одиничний оператор.

Відповідно, для кумулянта $(1+n)$-го порядку (7) асимтотично збурених груп операторів (1) справедливе таке твердження.

Лема 2 *Нехай f_{s+n} – неперервна обмежена функція, тоді для довільного скінченого інтервалу часу в сенсі слабкої збіжності для кумулянта $(1+n)$-го порядку (7) справедлива рівність*

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0}\big(\frac{1}{\epsilon^{2n}}\frac{1}{n!}\mathfrak{A}_{1+n}(-t,\{Y\},X\setminus Y)f_{s+n}-\\&-\int_0^t dt_1\ldots\int_0^{t_{n-1}}dt_n\prod_{j=1}^{s}S_1(-t+t_1,j)\sum_{i_1=1}^{s}\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(i_1,s+1)\times\\&\times\prod_{j_1=1}^{s+1}S_1(-t_1+t_2,j_1)\ldots\prod_{j_{n-1}=1}^{s+n-1}S_1(-t_{n-1}+t_n,j_{n-1})\times\\&\times\sum_{i_n=1}^{s+n-1}\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(i_n,s+n)\prod_{j_n=1}^{s+n}S_1(-t_n,j_n)f_{s+n}\big)=0,\end{aligned}$$

де оператори $\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(i_n,s+n)$, $n\geq 1$, визначаються формулою (13).

Твердження Леми 2 є наслідком справедливості аналогів рівняння Дюамеля (16) для кумулянтів (7) груп операторів (1) та рівності (17).

Враховуючи, що ряд (8) для функції розподілу $F_1(t,x_1)$ збігається рівномірно на кожному компакті, рівність (11) встановлюється при умові (10) згідно сформульованих лем.

Зауважимо, що аналогічне твердження до Леми 2 справедливе також для кумулянтів розсіяння (6).

Твердження про те, що слабкий розв'язок початкової задачі для кінетичного рівняння типу Больцмана для системи частинок з розсіянням пружних куль (14) зображується граничною одночастинковою функцією розподілу (12), доводиться в результаті обчислення похідної граничної функції (12) по змінній часу в сенсі поточкової збіжності простору обмежених функцій

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}f_1(t,x_1)=-\langle p_1,\frac{\partial}{\partial q_1}\rangle f_1(t,x_1)+\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}dx_2\,\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(1,2)\times \qquad (18)\\
&\times g_2(q_1-tp_1,p_1;q_2-tp_2,p_2)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\int\limits_0^t dt_1\ldots\int\limits_0^{t_{n-1}}dt_n\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_3\\
&\ldots dx_{2+n}S_1(-t+t_1,1)\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(1,3)\prod_{j_1=1}^{2}S_1(-t_1+t_2,j_1)\ldots\\
&\ldots\prod_{i_k=1}^{k+1}S_1(-t_{k-1}+t_k,i_k)\sum_{\substack{l_k=1\\ l_k\neq 2}}^{k+1}\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(l_k,k+2)\prod_{j_k=1}^{k+2}S_1(-t_k,j_k)\times\\
&\times S_1(-t+t_{k+1},2)\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(2,k+3)S_1(-t_{k+1}+t_{k+2},2)S_1(-t_{k+1}+t_{k+2},\\
&k+3)\ldots\prod_{i_n=k+3}^{n+1}S_1(-t_{n-1}+t_n,i_n)S_1(-t_{n-1}+t_n,2)\times\\
&(\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(2,n+2)+\sum_{l_n=k+3}^{n+1}\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(l_k,n+2))S_1(-t_n,2)\prod_{j_n=k+3}^{n+2}S_1(-t_n,j_n)\times\\
&\times g_{k+1}(x_1,x_3,\ldots,x_{k+2})g_{1+n-k}(x_2,x_{k+3},\ldots,x_{n+2})\prod_{i=1}^{n+2}f_1^0(x_i),
\end{aligned}
$$

та є наслідком того, що ряд в правій частині тотожності (18) визначається добутком граничних одночастинкових функцій розподілу $f_1(t,x_1)$ та $f_1(t,x_2)$, які визначаються формулою (12).

Таким чином, якщо початкова функція розподілу f_1^0 задовольняє умову (9), враховуючи останню рівність в тотжності (18), встановлюємо, що гранична одночастинкова функція розподілу (12) визначається з кінетичного рівняння типу Больцмана (14).

4 Граничні маргінальні функціонали стану

Оскільки розв'язок початкової задачі (2)-(3) узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа з початковими кореляціями збігається до розв'язку початкової задачі (14)-(15) кінетичного рівняння типу Больцмана в сенсі формули (11), тоді для маргінальних функціоналів (4) справедлива така теорема.

Теорема 2 *Нехай виконуються умови Теореми 1, тоді для функціоналу (4) в сенсі слабкої збіжності простору обмежених функцій справедлива така рівність*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\big(\epsilon^{2s}F_s\big(t,x_1,\ldots,x_s \mid F_1(t)\big) - \\ -g_s(q_1-tp_1,p_1;\ldots;q_s-tp_s,p_s)\prod_{j=1}^{s}f_1(t,x_j)\big)=0,$$

де гранична функція розподілу $f_1(t)$ визначається формулою (12).

Таким чином, маргінальні фунціонали стану (4) в границі Больцмана–Ґреда збігаються до добутків одночастинкових функцій розподілу, які є розв'язками кінетичного рівняння типу Больцмана з початковими кореляціями.

Справедливість твердження Теореми 2 є наслідком Теореми 1 та відповідних асимптотичних формул для еволюційних операторів (5) асимтотично збурених груп операторів (1). Дійсно, згідно Леми 2, тобто формул для кумулянтів (7) асимтотично збурених груп операторів (1), і означення (5) в сенсі слабкої збіжності простору обмежених функцій виконуються відповідно такі рівності:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\big(\mathfrak{V}_1(t,\{1,\ldots,s\})f_s - Ig_s(q_1-tp_1,p_1;\ldots;q_s-tp_s,p_s)f_s\big)=0,$$
$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{-2n}\mathfrak{V}_{1+n}(t)f_{s+n}=0, \quad n\geq 1.$$

Зауважимо, що для системи пружних куль існування скейлінґової границі Больцмана–Ґреда для розв'язку задачі Коші ієрархії рівнянь ББГКІ для початкових станів за відсутності кореляцій, побудованого за теорією збурень, доведено в [1] (див. також [2]).

Література

[1] Д.Я. Петрина, В.И. Герасименко. *Математические проблемы статистической механики системы упругих шаров.* Успехи мат. наук, **45**, (3), (1990), 135–182.

[2] C. Cercignani, V.I. Gerasimenko, D.Ya. Petrina. *Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997; Springer Sci., 2013.

[3] I. Gallagher, L. Saint-Raymond, B. Texier. *From Newton to Boltzmann: Hard Spheres and Short-range Potentials.* EMS Publ. House: Zurich Lectures in Advanced Mathematics, 2014.

[4] C. Villani. *A review of mathematical topics in collisional kinetic theory.* In: Handbook of Mathematical Fluid Dynamics. Elsevier Sci., 2002.

[5] V.I. Gerasimenko. *On the approaches to the derivation of the Boltzmann equation with hard sphere collisions.* Proc. Inst. Math. NASU, **10**, (2), (2013), 71–95 (arXiv:1308.1789).

[6] D. Enskog. *Kinetiche theorie der wärmeleitung, reibung und selbstdiffusion in gewissen werdichteten gasen und flüßigkeiten.* Kungl. Sv. Vetenskapsakademiens Handl, **63**, (1922), 3–44.

[7] N. Bellomo, M. Lachowicz, J. Polewczak, G. Toscani. *Mathematical Topics in Nonlinear Kinetic Theory II: the Enskog Equation.* Singapur: World Sci. Publ., 1991.

[8] J. Polewczak. *On some open problems in the revised Enskog equation for dense gases.* In Proc. "WASCOM 99", Eds. V. Ciancio, A. Donato, F. Oliveri, and S. Rionero, Singapur: World Sci. Publ. (2001), 382–396.

[9] I.V. Gapyak, V.I. Gerasimenko. *Hard sphere dynamics and the Enskog equation.* Kinetic and Related Models, **5**, (3), (2012), 459–484.

[10] І.В. Гап'як, В.И. Герасименко. *Асимтотика Больцмана – Ґреда розв'язку узагальненого рівняння Енскоґа.* Збірник праць II Всеукраїнського наукового семінару "Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь: здобутки і перспективи (2012), 4–12.