Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 2, 191–199

УДК 517.927

Т. И. Кодлюк

(Тернопольский национальный педагогический университет имени Владимира Гнатюка)

Матрицы Грина одномерных краевых задач с параметром в пространствах Соболева

tanpask@ukr.net

We study the total on the Sobolev space W_p^1, $p \in [1, \infty)$, boundary value problems with a parameter for systems of linear ordinary differential equations on an interval. Sufficient conditions for the Green's matrices problems of the considered problems to be continuous with respect to parameter in the metric of L_q, $q = \frac{p}{p-1}$ on the square are found.

В работе исследуются тотальные на пространстве Соболева W_p^1, $p \in [1, \infty)$, краевые задачи с параметром для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке. Найдены достаточные условия непрерывности по параметру матриц Грина рассмотренных задач в метрике L_q, $q = \frac{p}{p-1}$ на квадрате.

1. Введение. Пусть заданы числа

$$m, n, k - 1 \in \mathbb{N}, \quad p \in [1; \infty), \quad \varepsilon_0 > 0$$

и конечный интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

Рассмотрим параметризированное числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ семейство неоднородных тотальных относительно пространства W_p^1 линейных краевых задач для системы m дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'(t; \varepsilon) = A(t; \varepsilon) y(t; \varepsilon) + f(t; \varepsilon), \quad t \in (a, b), \tag{1}$$

$$\alpha_\varepsilon y(a;\varepsilon) + \int\limits_a^b \Phi(t;\varepsilon) y'(t;\varepsilon) dt = 0, \tag{2}$$

где матрицы-функции $A(\cdot;\varepsilon) \in L_p([a,b], \mathbb{C}^{m\times m}) =: (L_p)^{m\times m}$, $\Phi(\cdot) \in (L_q)^{m\times m}, q = \frac{p}{p-1}$, вектор-функции $f(\cdot,\varepsilon) \in L_p([a,b], \mathbb{C}^m) =: (L_p)^m$, а матрицы $\alpha_\varepsilon \in \mathbb{C}^{m\times m}$.

Под решением системы $(1),(2)$ понимается вектор-функция $y(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^1)^m$, которая удовлетворяет уравнениям (1) почти всюду на интервале (a,b) и краевым условиям (2).

Непрерывность по параметру ε в точке $\varepsilon = 0$ решений задачи $(1),(2)$ относительно семейства норм $\|\cdot\|_{n,p}$ пространств Соболева $(W_p^n)^m$ исследовалась ранее в работах [1, 2, 3]. Полученные там результаты носят законченный характер и близки к окончательным.

Цель данной работы – исследовать непрерывность по параметру ε матриц Грина $G(t,s;\varepsilon)$, отвечающих задачам $(1),(2)$, относительно норм пространств $(L_q)^{m\times m}, q = \frac{p}{p-1} \in (1,\infty]$ на квадрате $(a,b)\times(a,b)$.

2. Матрица Грина. Рассмотрим полуоднородную тотальную на пространстве W_p^1 краевую задачу вида

$$y'(t) = A(t)y(t) + f(t), \tag{3}$$

$$\alpha y(a) + \int\limits_a^b \Phi(t) y'(t) dt = 0, \tag{4}$$

где матрицы-функции $A(\cdot) \in (L_p)^{m\times m}$, $\Phi(\cdot) \in (L_q)^{m\times m}, q = \frac{p}{p-1}$, вектор-функция $f(\cdot) \in (L_p)^m$ а матрица $\alpha \in \mathbb{C}^{m\times m}$.

Определение 1. *Матрицей Грина однородной краевой задачи (3), (4) будем называть матричную функцию $G(t,s)$, такую, что для каждого $t \in (a,b)$, функция*

$$G(t,\cdot) \in L_q([a,b]; \mathbb{C}^{m\times m}), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

посредством которой решение полуоднородной краевой задачи (3), (4) представляется в виде

$$y(t) = \int\limits_a^b G(t,s) f(s) ds, \quad t \in (a,b)$$

для каждой вектор-функции $f(\cdot) \in (L_p)^m$.

Эта матрица Грина определяется однозначно с точностью к значениям на подмножестве меры нуль.

Пусть далее $Y(t)$ – единственное решение матричного дифференциального уравнения

$$Y'(t) = A(t)Y(t),$$

с начальным условием

$$Y(a) = I_m,$$

где I_m – единичная $(m \times m)$-матрица.

Теорема 1. *Если выполняется условие*

$$\det[\alpha + \int\limits_a^b \Phi(t)Y'(t)dt] \neq 0,$$

то существует матрица Грина $G(t,s)$ *полуоднородной краевой задачи (3), (4), которая имеет следующее представление:*

$$\begin{cases} Y(t)Y^{-1}(s) - Y(t)[\alpha + \int\limits_a^b \Phi(t)Y'(t)dt]^{-1}[\int\limits_a^s \Phi(\tau)Y'(\tau)d\tau \cdot Y^{-1}(s) + \Phi(s)], \\ s \leqslant t; \\ -Y(t)[\alpha + \int\limits_a^b \Phi(t)Y'(t)dt]^{-1}[\int\limits_a^s \Phi(\tau)Y'(\tau)d\tau \cdot Y^{-1}(s) + \Phi(s)], \\ t < s. \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство теоремы 1. В силу определения 1 достаточно показать, что вектор-функция

$$y(t) = \int\limits_a^b G(t,s)f(s)ds, \quad t \in [a,b], \quad \forall f(\cdot) \in (L_p)^m$$

есть решение краевой задачи (3), (4).

Для этого сначала запишем вектор-функцию $y(\cdot)$ в виде

$$y(t) = \int\limits_a^t G(t,s)f(s)ds + \int\limits_t^b G(t,s)f(s)ds. \tag{6}$$

Тогда

$$y'(t) = G(t, t-0)f(t) +$$

$$+\int\limits_a^t G'_t(t,s)f(s)ds - G(t,t+0)f(t) + \int\limits_t^b G'_t(t,s)f(s)ds.$$

Поскольку, в силу формулы (5)

$$G(t,t-0) - G(t,t+0) = I_m,$$

то

$$y'(t) = \int\limits_a^t G'_t(t,s)f(s)ds + \int\limits_t^b G'_t(t,s)f(s)ds + f(t).$$

Соответственно, учитывая представление (5), получаем

$$y'(t) = \int\limits_a^t \{Y'(t)Y^{-1}(s) -$$

$$-Y'(t)[\alpha + \int\limits_a^b \Phi(t)Y'(t)dt]^{-1}[\int\limits_a^s \Phi(\tau)Y'(\tau)d\tau \cdot Y^{-1}(s) + \Phi(s)]\}f(s)ds +$$

$$+\int\limits_t^b \{-Y'(t)[\alpha + \int\limits_a^b \Phi(t)Y'(t)dt]^{-1}[\int\limits_a^s \Phi(\tau)Y'(\tau)d\tau \cdot Y^{-1}(s) +$$

$$+\Phi(s)]\}f(s)ds + f(t) =$$

$$= \int\limits_a^t \{A(t)Y(t)Y^{-1}(s) - A(t)Y(t)[\alpha +$$

$$+\int\limits_a^b \Phi(t)Y'(t)dt]^{-1}[\int\limits_a^s \Phi(\tau)Y'(\tau)d\tau \cdot Y^{-1}(s) + \Phi(s)]\}f(s)ds +$$

$$+\int\limits_t^b \{-A(t)Y(t)[\alpha + \int\limits_a^b \Phi(t)Y'(t)dt]^{-1}[\int\limits_a^s \Phi(\tau)Y'(\tau)d\tau \cdot Y^{-1}(s) +$$

$$+\Phi(s)]\}f(s)ds + f(t) =$$

$$= A(t)\int\limits_a^t G(t,s)f(s)ds + A(t)\int\limits_t^b G(t,s)f(s)ds + f(t) =$$

$$= A(t)y(t) + f(t).$$

Осталось проверить однородное краевое условие (4). Для этого, учитывая формулу (5) и равенство (6), запишем равенство для $y(\cdot)$ следующим образом:

$$y(t) = Y(t)\int\limits_a^t Y^{-1}(s)f(s)ds - Y(t)[\alpha + \int\limits_a^b \Phi(t)Y'(t)dt]^{-1}\times$$

$$\times\int\limits_a^b [\int\limits_a^t \Phi(s)Y'(s)ds\cdot Y^{-1}(t) + \Phi(t)]f(t)dt.$$

Тогда

$$\alpha y(a) + \int\limits_a^b \Phi(t)y'(t)dt = \int\limits_a^b \Phi(t)(Y(t)\int\limits_a^t Y^{-1}(s)f(s)ds)'dt-$$

$$-\alpha[\alpha + \int\limits_a^b \Phi(t)Y'(t)dt]^{-1}\cdot\int\limits_a^b [\int\limits_a^t \Phi(s)Y'(s)ds\cdot Y^{-1}(t) + \Phi(t)]f(t)dt-$$

$$-\int\limits_a^b \Phi(t)Y'(t)[\alpha + \int\limits_a^b \Phi(t)Y'(t)dt]^{-1}\cdot\int\limits_a^b [\int\limits_a^t \Phi(s)Y'(s)ds\cdot Y^{-1}(t) + \Phi(t)]\times$$

$$\times f(t)dtdt = \int\limits_a^b \Phi(t)Y'(t)\int\limits_a^t Y^{-1}(s)f(s)dsdt + \int\limits_a^b \Phi(t)f(t)dt-$$

$$-[\alpha+\int\limits_a^b \Phi(t)Y'(t)dt]\cdot[\alpha+\int\limits_a^b \Phi(t)Y'(t)dt]^{-1}\int\limits_a^b[\int\limits_a^t \Phi(s)Y'(s)ds\cdot Y^{-1}(t)+$$

$$+\Phi(t)]f(t)dt=$$

$$=\int\limits_a^b[\int\limits_a^t \Phi(s)Y'(s)dsY^{-1}(t)+\Phi(t)]f(t)dt-\int\limits_a^b[\int\limits_a^t \Phi(s)Y'(s)dsY^{-1}(t)+$$

$$+\Phi(t)]f(t)dt=0.$$

Теорема 1 доказана.

3. Зависимость матрицы Грина от параметра. Для параметрического семейства полуоднородных тотальных на пространствах W_p^1 краевых задач (1), (2) матрица Грина будет зависеть от параметра ε. Поэтому представляет интерес вопрос о непрерывности по ε матричной функции $G(t,s;\varepsilon)$.

Будем предполагать всюду далее, что выполнено

Предположение *I*. *Предельная однородная краевая задача*

$$y'(t;0)=A(t;0)y(t;0),\quad \alpha_0 y(a;0)+\int\limits_a^b \Phi(t;0)y'(t;0)dt=0$$

имеет только тривиальное решение.

Это условие равносильно тому, что полуоднородная предельная краевая задача (1), (2) имеет ровно одно решение при любых значениях правых частей $f(\cdot;0)\in(L_p)^m$.

Теорема 2. *Пусть при* $\varepsilon\to 0+$ *выполнены следующие условия:*

1) $\|A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)\|_p\to 0$;

2) $\alpha_\varepsilon\to\alpha_0$;

3) $\|\Phi(\cdot;\varepsilon)-\Phi(\cdot;0)\|_q\to 0,\quad q=\frac{p}{p-1}$.

Тогда для достаточно малых ε *существуют матрицы Грина рассмотренных задач и на квадрате* $(a,b)\times(a,b)$

$$\|G(\cdot,\cdot;\varepsilon)-G(\cdot,\cdot;0)\|_q\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,.$$

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится

Лемма 1. Если выполнено предположение I и условия 1)—3) теоремы 2 , то для достаточно малых ε

$$\det[\alpha_\varepsilon + \int\limits_a^b \Phi(t;\varepsilon)Y'(t;\varepsilon)dt] \neq 0.$$

Доказательство леммы 1. Из условия 1), в силу теоремы 1 о гомеоморфизмах (см. [2]) вытекает соответственно, что

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{1,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+ \tag{7}$$

и

$$\|Y'(\cdot;\varepsilon) - Y'(\cdot;0)\|_p \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{8}$$

Учитывая условия 2), 3) теоремы 2 и соотношение (8), получаем

$$\|(\alpha_\varepsilon + \int\limits_a^b \Phi(t;\varepsilon)Y'(t;\varepsilon)dt - (\alpha_0 + \int\limits_a^b \Phi(t;0)Y'(t;0)dt)\| \leqslant \|\alpha_\varepsilon - \alpha_0\| +$$

$$+\|\int\limits_a^b \Phi(t;\varepsilon)Y'(t;\varepsilon)dt) - \int\limits_a^b \Phi(t;0)Y'(t;0)dt\| \leqslant \|\alpha_\varepsilon - \alpha_0\| +$$

$$+\int\limits_a^b |\Phi(t;\varepsilon) - \Phi(t;0)| \cdot |Y'(t;\varepsilon)|dt + \int\limits_a^b |\Phi(t;0)| \cdot |Y'(t;\varepsilon) - Y'(t;0)|dt \leqslant$$

$$\leqslant \|\alpha_\varepsilon - \alpha_0\| + \|\Phi(t;\varepsilon) - \Phi(t;0)\|_q \cdot \|Y'(t;\varepsilon)\|_p +$$
$$+\|\Phi(t;0)\|_q \cdot \|Y'(t;\varepsilon) - Y'(t;0)\|_p \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{9}$$

Поскольку

$$\det[\alpha_0 + \int\limits_a^b \Phi(t;0)Y'(t;0)dt] \neq 0,$$

то из (9) имеем, что в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ непрерывная функция

$$\det[\alpha_\varepsilon + \int\limits_a^b \Phi(t;\varepsilon)Y'(t;\varepsilon)dt] \neq 0. \tag{10}$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. В силу определения матрицы Грина и теоремы 1 для доказательства теоремы 2 нам достаточно показать, что при выполнении ее условий справедливы следующие утверждения:

$$\det[\alpha_\varepsilon + \int_a^b \Phi(t;\varepsilon)Y'(t;\varepsilon)dt] \neq 0,$$

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_q \to 0, \quad \varepsilon \to 0+, \tag{11}$$

$$\|\int_a^t \Phi(s;\varepsilon)Y'(s;\varepsilon)ds - \int_a^t \Phi(s;0)Y'(s;0)ds\|_q \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{12}$$

Первое неравенство уже установлено нами в лемме 1.

Из условия 1) и теоремы о гомеоморфизмах (см. [2]) вытекает соотношение

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{1,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{13}$$

Оценим теперь норму

$$\begin{aligned}
&\|\int_a^t \Phi(s;\varepsilon)Y'(s;\varepsilon)ds - \int_a^t \Phi(s;0)Y'(s;0)ds\|_q \leqslant \\
&\leqslant (\int_a^t [|Y'(t;\varepsilon) - Y'(t;0)| \cdot |\Phi(t;\varepsilon)|]^q dt)^{\frac{1}{q}} + \\
&+(\int_a^t [|Y'(t;0)| \cdot |\Phi(t;\varepsilon) - \Phi(t;0)|]^q dt)^{\frac{1}{q}} \leqslant \\
&\leqslant \|Y'(t;\varepsilon) - Y'(t;0)\|_p \cdot \|\Phi(t;\varepsilon)\|_q + \\
&+\|Y'(t;0)\|_p \cdot \|\Phi(t;\varepsilon) - \Phi(t;0)\|_q \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.
\end{aligned} \tag{14}$$

В самом деле, из условия 1) и теоремы о гомеоморфизмах имеем, что

$$\|Y'(t;0)\|_p = O(1),$$

а, в силу (13)

$$\|Y'(t;\varepsilon) - Y'(t;0)\|_p \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Отсюда следует соотношение (14).

Список литературы

[1] *Кодлюк Т. И., Михайлец В. А., Рева Н. В.* Предельные теоремы для одномерных краевых задач // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 1. – С. 70–81.

[2] *Кодлюк Т. И., Михайлец В. А., Рева Н. В.* Решения одномерных краевых задач с параметром в пространствах Соболева // Укр. мат. вiсник. – 2012. – **9**, № 4. – С. 546–559. (Англ. переклад: J. Math. Sci. – 2013. –**190**, № 4. – P. 589–599.)

[3] *Кодлюк Т. I.* Одновимiрнi крайовi задачi з параметром в просторах Соболєва. – Дис. на здобуття наук. ступеня канд. ф.-м. наук. – Київ: Iн-т математики НАН України, 2013. – 155 с.