Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 2, 249–267

УДК 517.956.4

В. М. Лось, О. О. Мурач

(Чернігівський національний технологічний університет; Інститут математики НАН України, Київ)

Неоднорідні параболічні мішані задачі і простори узагальненої гладкості

v_los@yahoo.com, murach@imath.kiev.ua

We prove theorem on the well-posedness of a general parabolic initial-boundary value problem in a rectangle in some classes of Hilbert spaces of generalized smoothness. As an application, we give new sufficient conditions under which generalized derivatives, of a prescribed order, of a solution to the problem should be continuous.

Встановлено теорему про коректну розв'язність загальної параболічної початково–крайової задачі у прямокутнику у деяких класах гільбертових просторів узагальненої гладкості. Як застосування наведені нові достатні умови неперервності узагальнених похідних заданого порядку розв'язку задачі.

1. Вступ

Загальні параболічні початково–крайові задачі достатньо повно досліджені у класичних шкалах функціональних просторів Гельдера–Зігмунда та Соболєва [1–5]. Центральне місце в теорії таких задач займають теореми про їх коректну розв'язність у підходящих парах просторів, що належать цим шкалам.

Втім, виявилось, що для деяких застосувань до диференціальних операторів ці шкали не є досить тонко градуйованими за допомогою числових параметрів [6–12]. У цьому зв'язку є цікавими функціональні простори, для яких показником гладкості є не числовий, а функціональний параметр. Вони називаються просторами узагальненої гладкості. Важливі класи таких просторів були введені й досліджені Л. Хермандером [6] та Л. Р. Волевичем і Б. П. Панеяхом [13].

Недавно В. А. Михайлець і другий автор [12, 14–21] побудували теорію загальних еліптичних диференціальних операторів і еліптичних крайових задач у гільбертових шкалах, утворених просторами Хермандера

$$H^{s,\varphi} := B_{2,\mu} \quad \text{для} \quad \mu(\xi) := (1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi\big((1+|\xi|^2)^{1/2}\big). \tag{1}$$

Тут числовий параметр s дійсний, а функціональний параметр φ повільно змінюється на нескінченності за Й. Караматою. Клас просторів (1) містить соболєвську шкалу $\{H^s\} = \{H^{s,1}\}$, прив'язаний до неї числовим параметром s, проте градуйований тонше, ніж соболєвська шкала. Числовий параметр s визначає основну (степеневу) гладкість, а функціональний параметр φ уточнює її, задаючи додаткову гладкість. Остання може дати як більш широкий, так и більш вузький простір $H^{s,\varphi}$ у порівнянні з H^s. Клас просторів (1) названо уточненою соболєвською шкалою.

В роботі [22] нами введений анізотропний аналог уточненої соболєвської шкали на $\mathbb{R}^2$ (двомірний випадок) і доведена теорема про ізоморфізм на цій шкалі, який здійснює оператор початково–крайової задачі для лінійного параболічного рівняння довільного парного порядку з однорідними початковими умовами (даними Коші).

Ця стаття є продовженням роботи [22]. Мета статті — довести теорему про коректну розв'язність початково–крайової задачі для лінійного параболічного рівняння довільного парного порядку без припущення однорідності початкових умов. В якості застосування отримаємо нові достатні умови неперервності узагальнених частинних похідних (заданого порядку) розв'язку задачі.

Стаття складається з 6 пунктів. Пункт 1 є вступ. Пункт 2 містить постановку задачі, що досліджується. У п. 3 розглянута анізотропна уточнена соболєвська шкала, в якій досліджується параболічна задача. У п. 4 сформульовані основні результати статті. Вони доведені в п. 5. Пункт 6 містить висновки до статті.

2. Постановка задачі

Нехай $\Omega := (0, l) \times (0, \tau)$, де l і τ є довільні додатні числа. Розглянемо в прямокутнику Ω лінійну початково–крайову параболічну задачу:

$$A(x, t, D_x, \partial_t)u(x, t) \equiv$$
$$\equiv \sum_{\alpha+2b\beta\leq 2m} a^{\alpha,\beta}(x, t)\, D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta} u(x, t) = f(x, t) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2}$$
$$B_{j,0}(t, D_x, \partial_t)u(x, t)\big|_{x=0} \equiv$$
$$\equiv \sum_{\alpha+2b\beta\leq m_j} b_{j,0}^{\alpha,\beta}(t)\, D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta} u(x, t)\big|_{x=0} = g_{j,0}(t) \quad \text{і} \tag{3}$$
$$B_{j,1}(t, D_x, \partial_t)u(x, t)\big|_{x=l} \equiv$$
$$\equiv \sum_{\alpha+2b\beta\leq m_j} b_{j,1}^{\alpha,\beta}(t)\, D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta} u(x, t)\big|_{x=l} = g_{j,1}(t) \tag{4}$$
$$\text{для} \quad 0 < t < \tau \quad \text{і} \quad j = 1, \ldots, m,$$
$$\left.\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k}\right|_{t=0} = h_k(x) \quad \text{для} \quad 0 < x < l \quad \text{і} \quad k = 0, \ldots, \varkappa - 1. \tag{5}$$

Тут b, m і всі m_j є довільні фіксовані цілі числа, такі, що $m \geq b \geq 1$, $\varkappa := m/b \in \mathbb{Z}$ і $m_j \geq 0$. Всі коефіцієнти виразів $A := A(x, t, D_x, \partial_t)$ та $B_{j,k} := B_{j,k}(t, D_x, \partial_t)$, де $j \in \{1, \ldots, m\}$ та $k \in \{0, 1\}$, вважаємо нескінченно гладкими комплекснозначними функціями. А саме, $a^{\alpha,\beta} \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ та $b_{j,k}^{\alpha,\beta} \in C^{\infty}[0, \tau]$, де $\overline{\Omega} := [0, l] \times [0, \tau]$. Використовуємо позначення $D_x := i\,\partial/\partial x$ та $\partial_t := \partial/\partial t$ для частинних похідних. Підсумовування здійснюємо по цілим індексам $\alpha, \beta \geq 0$, що задовольняють нерівності, вказані під знаком суми.

Нагадаємо [1, § 9, п. 1], що початково–крайову задачу (2)–(5) називають параболічною в Ω, якщо виконуються наступні три умови:

(i) Для довільних $x \in [0, l]$, $t \in [0, \tau]$, $\xi \in \mathbb{R}$ та $p \in \mathbb{C}$ з $\operatorname{Re} p \geq 0$ вірно
$$A^{(0)}(x, t, \xi, p) \equiv \sum_{\alpha+2b\beta=2m} a^{\alpha,\beta}(x, t)\, \xi^{\alpha} p^{\beta} \neq 0 \quad \text{при} \quad |\xi| + |p| \neq 0.$$

(ii) Нехай величини $x \in \{0, l\}$, $t \in [0, \tau]$, та $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ з $\operatorname{Re} p \geq 0$ довільні. Тоді многочлен $A^{(0)}(x, t, \xi, p)$ відносно $\xi \in \mathbb{C}$ має m коренів $\xi_j^{+}(x, t, p)$, $j = 1, \ldots, m$, з додатною уявною частиною та m

коренів з від'ємною уявною частиною, з урахуванням їх кратності.

(iii) Нехай величини x, t, та p такі самі, як і в умові (ii). Покладемо $k := 0$ якщо $x = 0$, або $k := 1$ якщо $x = l$. Тоді многочлени

$$B_{j,k}^{(0)}(t,\xi,p) \equiv \sum_{\alpha+2b\beta=m_j} b_{j,k}^{\alpha,\beta}(t)\,\xi^{\alpha}p^{\beta}, \quad j = 1,\ldots,m,$$

аргументу ξ лінійно незалежні по модулю многочлена

$$\prod_{j=1}^{m}\bigl(\xi - \xi_j^{+}(x,t,p)\bigr).$$

3. Уточнена анізотропна соболєвська шкала

Розглянемо функціональні простори, в яких будемо досліджувати параболічну задачу (2)–(5). Вони утворюють уточнену анізотропну соболєвську шкалу, введену в [22, п. 3]. Показниками гладкості для цих просторів служать два числових параметра і ще один функціональний параметр, який пробігає клас $\mathcal{M}$, що означається наступним чином.

Клас $\mathcal{M}$ складається з усіх функцій $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$ таких, що:

а) φ вимірна за Борелем на $[1,\infty)$;

б) обидві функції φ і $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1,b]$, де $1 < b < \infty$;

в) функція φ повільно змінна функція на нескінченності за Караматою, тобто

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\varphi(\lambda r)}{\varphi(r)} = 1 \quad \text{для кожного} \quad \lambda > 0.$$

Теорія повільно змінних функцій викладена, наприклад, у монографіях [23, 24]. Важливим прикладом функції, повільно змінної на нескінченності, служить функція

$$\varphi(r) := (\log r)^{\theta_1}\,(\log\log r)^{\theta_2}\ldots(\underbrace{\log\ldots\log}_{k\ \text{раз}} r\,)^{\theta_k} \quad \text{аргументу} \quad r \gg 1,$$

де $k \in \mathbb{N}$ і $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k \in \mathbb{R}$ є довільні параметри.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Покладемо $\gamma := 1/(2b)$. За означенням, лінійний простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ таких, що їх перетворення Фур'є $\widetilde{w}$ (за обома змінними) є локально сумовним за Лебегом на $\mathbb{R}^2$ і задовольняє умову

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r_{\gamma}^{2s}(\xi,\eta)\,\varphi^2(r_{\gamma}(\xi,\eta))\,|\widetilde{w}(\xi,\eta)|^2\,d\xi d\eta<\infty.$$

Тут і далі використовуємо позначення

$$r_{\gamma}(\xi,\eta):=\bigl(1+|\xi|^2+|\eta|^{2\gamma}\bigr)^{1/2}\quad\text{для довільних}\quad \xi,\eta\in\mathbb{R}.$$

Простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ наділений скалярним добутком

$$(w_1,w_2)_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)}:=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r_{\gamma}^{2s}(\xi,\eta)\,\varphi^2(r_{\gamma}(\xi,\eta))\,\widetilde{w_1}(\xi,\eta)\,\overline{\widetilde{w_2}(\xi,\eta)}\,d\xi d\eta,$$

де $w_1, w_2 \in H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)$. Він породжує норму

$$\|w\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)}:=(w,w)^{1/2}_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)}.$$

Якщо $\varphi(r)\equiv 1$, то $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ стає анізотропним простором Соболєва порядку $(s,s\gamma)$. Цей простір позначаємо через $H^{s,s\gamma}(\mathbb{R}^2)$. Взагалі, у соболєвському випадку $\varphi(r)\equiv 1$ будемо опускати індекс φ у позначеннях відповідних функціональних просторів.

Кожний простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)$, де $s\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathcal{M}$, прив'язаний до соболєвських просторів завдяки першим двом числовим параметрам:

$$H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^2)\hookrightarrow H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)\hookrightarrow H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^2)\quad\text{для всіх}\quad s_0<s<s_1.$$

З огляду на це клас гільбертових функціональних просторів

$$\bigl\{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2):\,s\in\mathbb{R},\,\varphi\in\mathcal{M}\bigr\}. \tag{6}$$

названий уточненою анізотропною соболєвською шкалою. Так, якщо $\varphi(r)\to\infty$ (або $\varphi(r)\to 0$) при $r\to\infty$, то φ задає позитивну (або негативну) додаткову гладкість, тобто можна сказати, що φ уточнює основну гладкість $(s,s\gamma)$.

Розглянемо аналоги шкали (6), пов'язані з параболічною задачею, що досліджується. Як і раніше, $s \in \mathbb{R}$ та $\varphi \in \mathcal{M}$.

Покладемо

$$
\begin{gathered}
H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega) := \bigl\{ w \restriction \Omega : \, w \in H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2) \bigr\}, \\
\|u\|_{H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)} := \\
:= \inf \bigl\{ \|w\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)} : \, w \in H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2), \;\; w = u \;\text{ в }\; \Omega \bigr\},
\end{gathered}
\tag{7}
$$

де $u \in H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$. Простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$ гільбертів відносно норми (7), а множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна у ньому.

Покладемо

$$
\begin{gathered}
H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega) := \bigl\{ w \restriction \Omega : \, w \in H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2), \;\; w(x,t) \equiv 0 \;\text{ при }\; t < 0 \bigr\}, \\
\|u\|_{H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)} := \inf \bigl\{ \|w\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)} : \\
w \in H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2), \;\; w(x,t) \equiv 0 \;\text{ при }\; t < 0, \;\; w = u \;\text{ в }\; \Omega \bigr\},
\end{gathered}
\tag{8}
$$

де $u \in H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$. Простір $H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$ гільбертів відносно норми (8), а множина

$$
\begin{gathered}
C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega}) := \bigl\{ w \restriction \overline{\Omega} : \, w \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \;\; w(x,t) \equiv 0 \;\text{ при }\; t < 0 \bigr\} = \\
= \bigl\{ u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \, \partial_t^\beta u(x,t)|_{t=0} = 0 \;\text{ для всіх }\; \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \; x \in [0,l] \bigr\}
\end{gathered}
$$

щільна у ньому.

Розглянемо далі функціональні простори, до яких будуть належати праві частини граничних і початкових умов (3), (4) і (5). За означенням, лінійний простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R})$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ таких, що їх перетворення Фур'є $\widehat{h}$ є локально сумовним за Лебегом на $\mathbb{R}$ і задовольняє умову

$$
\int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \, \varphi^2(\langle \xi \rangle) \, |\widehat{h}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty.
$$

Тут $\langle \xi \rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$. Простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R})$ наділений скалярним добутком

$$
(h_1, h_2)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R})} := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \, \varphi^2(\langle \xi \rangle) \, \widehat{h_1}(\xi) \, \overline{\widehat{h_2}(\xi)} \, d\xi,
$$

де $h_1, h_2 \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R})$, і відповідною нормою $\|h\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R})} := (h,h)^{1/2}_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R})}$. Нехай задане дійсне число $d > 0$. Покладемо

$$\begin{gathered} H^{s,\varphi}(0,d) := \bigl\{h\restriction(0,d) : \, h \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R})\bigr\}, \\ \|v\|_{H^{s,\varphi}(0,d)} := \inf\bigl\{\|h\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R})} : \, h \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}), \;\; h = v \text{ в } (0,d)\bigr\}, \end{gathered} \tag{9}$$

де $v \in H^{s,\varphi}(0,d)$. Простір $H^{s,\varphi}(0,d)$ гільбертів відносно норми (9), а множина $C^{\infty}[0,d]$ щільна у ньому.

Покладемо

$$\begin{gathered} H^{s,\varphi}_{+}(0,d) := \bigl\{h\restriction(0,d) : \, h \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}), \;\; \operatorname{supp} h \subseteq [0,\infty)\bigr\}, \\ \|v\|_{H^{s,\varphi}_{+}(0,d)} := \inf\bigl\{\|h\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R})} : \\ h \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}), \; \operatorname{supp} h \subseteq [0,\infty), \;\; h = v \text{ в } (0,d)\bigr\}, \end{gathered} \tag{10}$$

де $v \in H^{s,\varphi}_{+}(0,d)$. Простір $H^{s,\varphi}_{+}(0,d)$ гільбертів відносно норми (10), а множина

$$\begin{gathered} C^{\infty}_{+}[0,d] := \bigl\{h\restriction[0,d] : \, h \in C^{\infty}(\mathbb{R}), \;\; \operatorname{supp} h \subseteq [0,\infty)\bigr\} = \\ = \bigl\{v \in C^{\infty}[0,d] : \, v^{(\beta)}(0) = 0 \text{ для всіх } \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}\bigr\} \end{gathered}$$

щільна у ньому.

В роботі функції (та розподіли) вважаються комплекснозначними.

Наступна лема відіграє важливу роль у доведенні основного результату.

Лема 1. *Нехай довільно задані дійсне число $s > 0$ і функціональний параметр $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді вірні наступні твердження.*

(i) *Якщо $s\gamma + 1/2 \notin \mathbb{Z}$, то*

$$\|u\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}_{+}(\Omega)} \asymp \|u\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)} \quad \textit{при} \quad u \in H^{s,s\gamma,\varphi}_{+}(\Omega). \tag{11}$$

(ii) *Якщо $s + 1/2 \notin \mathbb{Z}$, то*

$$\|v\|_{H^{s,\varphi}_{+}(0,d)} \asymp \|v\|_{H^{s,\varphi}(0,d)} \quad \textit{при} \quad v \in H^{s,\varphi}_{+}(0,d). \tag{12}$$

Доведення. Виконання нерівностей

$$\|u\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}_{+}(\Omega)} \geq \|u\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)}, \quad \|v\|_{H^{s,\varphi}_{+}(0,d)} \geq \|v\|_{H^{s,\varphi}(0,d)}$$

для довільних $u \in H^{s,s\gamma,\varphi}_{+}(\Omega)$ та $v \in H^{s,\varphi}_{+}(0,d)$ випливає з означення норм у просторах $H^{s,s\gamma,\varphi}_{+}(\Omega)$, $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$ та $H^{s,\varphi}_{+}(0,d)$, $H^{s,\varphi}(0,d)$ відповідно.

Покажемо, що

$$\|v\|_{H^{s,\varphi}_{+}(0,d)} \leq \mathrm{const}\,\|v\|_{H^{s,\varphi}(0,d)} \quad \text{для усіх} \quad v \in H^{s,\varphi}_{+}(0,d). \tag{13}$$

Нехай $w \in C^{\infty}_{0}(0,\infty)$. Тоді для довільного дійсного $s > 0$ такого, що $s + 1/2 \notin \mathbb{Z}$ виконується еквівалентність норм

$$\|w\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R})} \asymp \|w\|_{H^{s,\varphi}(0,\infty)} \tag{14}$$

(пор. з [12, теорема 3.20]). Тут і далі $H^{s,\varphi}(0,\infty)$ означено за формулою (9), в якій d замінено на ∞. За замиканням одержуємо з (14) оцінку

$$\|h\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R})} \leq \mathrm{const}\,\|h \restriction (0,\infty)\|_{H^{s,\varphi}(0,\infty)} \tag{15}$$

для довільної функції $h \in H^{s,\varphi}_{+}(\mathbb{R})$. Тут

$$H^{s,\varphi}_{+}(\mathbb{R}) := \bigl\{h \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}),\ \ \operatorname{supp} h \subseteq [0,\infty)\bigr\}.$$

Переходом до інфімуму у (15) за усіма $h \in H^{s,\varphi}_{+}(\mathbb{R})$ такими, що $h = v$ на $(0,d)$, отримуємо (13).

Оцінка

$$\|u\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}_{+}(\Omega)} \leq \mathrm{const}\,\|u\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)}$$

доводиться подібно до (13). При цьому використовується еквівалентність норм

$$\|w\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^2)} \asymp \|w\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}\times(0,\infty))}$$

на класі функцій $w \in C^{\infty}_{0}(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ (пор. з [12, теорема 3.20]). Тут $s\gamma + 1/2 \notin \mathbb{Z}$, а простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ означений за формулою (7), у якій замінено Ω на $\mathbb{R}\times(0,\infty)$.

Лема 1 доведена.

4. Основні результати

Основними результатами роботи є теорема про ізоморфізми, породжені початково–крайовою параболічною задачею (2)–(5) та нові достатні умови неперервності узагальнених частинних похідних (заданого порядку) розв'язку цієї задачі. Сформулюємо їх.

Нехай σ_0 є найменше ціле число, таке, що

$$\sigma_0 \geq 2m, \quad \sigma_0 \geq m_j + 1 \ \text{ для всіх } \ j \in \{1, \dots, m\}, \quad \text{і} \quad \frac{\sigma_0}{2b} \in \mathbb{Z}.$$

Зокрема, якщо $m_j \leq 2m - 1$ для кожного $j \in \{1, \dots, m\}$, то $\sigma_0 = 2m$.

Пов'яжемо з параболічною задачею (2)–(5) лінійне відображення

$$\begin{aligned} u \mapsto \Lambda u := \big(Au, B_{1,0}u, B_{1,1}u, \dots, B_{m,0}u, B_{m,1}u,& \\ u\restriction_{[0,l]}, \dots, (\partial_t^{\varkappa-1}u)\restriction_{[0,l]}\big), \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}).& \end{aligned} \tag{16}$$

Теорема 1. *Нехай довільно задані дійсне число $\sigma > \sigma_0$ і функціональний параметр $\varphi \in \mathcal{M}$. Припустимо, що $\sigma + 1/2 \notin \mathbb{Z}$ і $\sigma/(2b) + 1/2 \notin \mathbb{Z}$. Тоді відображення* (16) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda : \ H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega) \ \leftrightarrow \ \mathcal{Q}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}. \tag{17}$$

Тут через $\mathcal{Q}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}$ позначено підпростір простору

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi} &:= H^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}(\Omega)\oplus \\ \oplus \bigoplus_{j=1}^{m}\big(H^{(\sigma-m_j-1/2)/(2b),\varphi}(0,\tau)\big)^2 &\oplus \bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1} H^{\sigma-2bk-b,\varphi}(0,l), \end{aligned}$$

утворений всіма векторами

$$F := \big(f,\, g_{1,0},\, g_{1,1}, ..., g_{m,0},\, g_{m,1},\, h_0, ..., h_{\varkappa-1}\big) \in \mathcal{H}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi},$$

які задовольняють наступну умову узгодження правих частин задачі (2)–(5). Для вектора F існує функція $v = v(x,t)$ класу $H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)$ така, що

$$\begin{gathered} f - Av \in H_{+}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}(\Omega), \\ g_{j,k} - B_{j,k}v \in H_{+}^{(\sigma-m_j-1/2)/(2b),\varphi}(0,\tau) \quad \text{для всіх} \\ k \in \{0,1\} \quad \text{та} \quad j \in \{1, \dots, m\}, \\ h_k = \partial_t^k v\big|_{t=0} \quad \text{для всіх} \quad k \in \{0, \dots, \varkappa - 1\}. \end{gathered}$$

Цю умову узгодження можна сформулювати у еквівалентній формі у конструктивному вигляді без застосування уточненої шкали просторів (див., наприклад, [2, с. 707]). А саме, воно полягає в тому, що похідні $\partial_t^k u(x,t)\big|_{t=0}$, які можна обчислити з параболічного рівняння (2) та початкових даних (5), повинні задовольняти при $x = 0$ та $x = l$ граничним умовам (3) та (4) і співвідношенням, що отримаємо в результаті диференціювання граничних умов по змінній t.

Відмітимо, що теорема 1 залишається вірною і у випадку, коли параметр $\sigma > \sigma_0$ задовольняє одну з умов $\sigma + 1/2 \in \mathbb{Z}$ і $\sigma/(2b) + 1/2 \in \mathbb{Z}$, якщо гільбертів простір $\mathcal{Q}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}$ означити за допомогою інтерполяції

$$\mathcal{Q}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi} :=$$
$$:= \bigl[\mathcal{Q}^{\sigma-2m-\varepsilon,(\sigma-2m-\varepsilon)/(2b),\varphi}, \mathcal{Q}^{\sigma-2m+\varepsilon,(\sigma-2m+\varepsilon)/(2b),\varphi}\bigr]_{1/2}.$$

Тут число $\varepsilon \in (0, 1/2)$, а права частина рівності є результатом інтерполяції вказаної пари гільбертових просторів з числовим параметром 1/2.

У соболєвському випадку $\varphi \equiv 1$ теорема 1 відома. Вона доведена М. С. Аграновічем і М. І. Вішиком [1, теорема 12.1] у припущенні, що число $\sigma/(2b)$ є цілим (їх результат охоплює граничний випадок $\sigma = \sigma_0$). Цього припущення можна позбавитись, що випливає з результату М. В. Житарашу та С. Д. Ейдельмана [4, теорема 5.7].

Завдяки згаданій теоремі Аграновіча–Вішика, кожний вектор $F \in \mathcal{Q}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)}$ має єдиний прообраз $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ при відображенні (17). Цю функцію u називаємо (узагальненим) розв'язком параболічної задачі (2)–(5) із правими частинами

$$F = \bigl(f,\, g_{1,0},\, g_{1,1}, ..., g_{m,0},\, g_{m,1},\, h_0, ..., h_{\varkappa-1}\bigr).$$

Наслідком теореми 1 є наступна властивість глобального підвищення гладкості цього розв'язку.

Наслідок 1. *Припустимо, що функція $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ є розв'язком параболічної задачі (2)–(5), праві частини якої задовольняють умову $F \in \mathcal{Q}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}$ для деяких $\sigma > \sigma_0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді $u \in H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)$.*

В якості застосування теореми 1 дамо наступну достатню умову неперервності узагальненого розв'язку u задачі (2)–(5) та його узагальнених частинних похідних заданого порядку.

Теорема 2. *Нехай довільно обране ціле число $q \geq 0$. Припустимо, що функція $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком задачі (2)–(5), праві частини якої задовольняють умову $F \in \mathcal{Q}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}$, де*

$\sigma := 2bq + b + 1/2 > \sigma_0$, а функціональний параметр $\varphi \in \mathcal{M}$ такий, що

$$\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t\varphi^2(t)} < \infty.$$

Тоді розв'язок $u(x,t)$ і всі його узагальнені частинні похідні $D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t)$, для яких $\alpha + 2b\beta \leq 2bq$, є неперервними функціями на множині $\overline{\Omega}$.

Якщо сформулювати аналог теореми 2 для анізотропних соболєвських просторів (випадок $\varphi \equiv 1$), то доведеться замінити умову цієї теореми на більш сильну: для правих частин задачі (2)–(5) виконується включення $F \in \mathcal{Q}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b)}$ при деякому $\sigma > 2bq + b + 1/2$. Це робить результат значно більш грубим.

5. Доведення

У доведенні теореми 1 ключову роль буде грати її аналог [22, п. 2] для задачі (2)–(5) у випадку нульових початкових даних, тобто коли всі $h_k \equiv 0$. Сформулюємо його. В цьому випадку пов'яжемо із задачею (2)–(5) лінійне відображення

$$C_+^\infty(\overline{\Omega}) \ni u \mapsto (Au, Bu) := \tag{18}$$
$$:= \big(Au, B_{1,0}u, B_{1,1}u, \ldots, B_{m,0}u, B_{m,1}u\big) \in C_+^\infty(\overline{\Omega}) \times \big(C_+^\infty[0,\tau]\big)^{2m}.$$

Твердження 1. *Нехай довільно задані дійсне число $\sigma > \sigma_0$ і функціональний параметр $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді відображення* (18) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$(A,B):\ H_+^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega) \ \leftrightarrow \tag{19}$$
$$\leftrightarrow H_+^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^m \big(H_+^{(\sigma-m_j-1/2)/(2b),\varphi}(0,\tau)\big)^2 :=$$
$$:= \mathcal{H}_+^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}.$$

Твердження 1 є важливим частинним випадком теореми 1, якщо $\sigma + 1/2 \notin \mathbb{Z}$ та $\sigma/(2b) + 1/2 \notin \mathbb{Z}$.

Доведення теореми 1. Теорема 1 виводиться з твердження 1 за схемою доведення теореми 10.1 роботи М. С. Аграновіча та М. І. Вішика [1].

Нехай $\sigma > \sigma_0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Покажемо, що для будь-якого $F \in \mathcal{Q}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}$ задача (2)–(5) має розв'язок $u \in H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)$. Нехай функція $v \in H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)$ з умов узгодження правих частин цієї задачі. Розглянемо задачу

$$Aw = f - Av \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{20}$$

$$B_{j,0}w|_{x=0} = g_{j,0} - B_{j,0}v|_{x=0} \quad \text{і} \quad B_{j,1}w|_{x=l} = g_{j,1} - B_{j,1}v|_{x=l} \tag{21}$$

$$\text{для кожного} \quad j \in \{1,\dots,m\},$$

$$\partial_t^k w|_{t=0} = 0 \quad \text{для кожного} \quad k \in \{0,\dots,\varkappa-1\}. \tag{22}$$

Оскільки

$$f - Av \in H_+^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}(\Omega),$$

$$g_{j,k} - B_{j,k}v \in H_+^{(\sigma-m_j-1/2)/(2b),\varphi}(0,\tau) \quad \text{для всіх}$$

$$k \in \{0,1\} \quad \text{та} \quad j \in \{1,\dots,m\},$$

то за твердженням 1 задача (20)–(22) має єдиний розв'язок $w \in H_+^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)$. Тоді $u = v + w$ буде розв'язком задачі (2)–(5). Отже, існування розв'язку доведено.

Покажемо, що відображення (16) продовжується (за неперервністю) до обмеженого оператора

$$\Lambda :\ H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega) \ \to\ \mathcal{H}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}. \tag{23}$$

Оберемо число $\sigma_1 \in \mathbb{N}$ таке, що $\sigma_1/(2b) \in \mathbb{N}$ і $\sigma_1 > \sigma$. Згідно теореми 12.1 М. С. Аграновіча та М. І. Вішика [1] відображення (16) продовжується (по неперервності) до обмежених операторів у соболєвських просторах

$$\Lambda :\ H^{\sigma_k,\sigma_k/(2b)}(\Omega) \to \mathcal{H}^{\sigma_k-2m,(\sigma_k-2m)/(2b)} \quad \text{для всіх} \quad k \in \{0,1\}. \tag{24}$$

Вираз $[E_1, E_2]_\psi$ буде означати простір, отриманий в результаті інтерполяції з функціональним параметром ψ пари гільбертових просторів E_1 та E_2. Детальніше про метод інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів див. в [12, 22]. Означимо інтерполяційний параметр ψ за формулою

$$\psi(r) := \begin{cases} r^{(\sigma-\sigma_0)/(\sigma_1-\sigma_0)}\,\varphi(r^{1/(\sigma_1-\sigma_0)}) & \text{для} \quad r \geq 1, \\ \varphi(1) & \text{для} \quad 0 < r < 1, \end{cases}$$

Застосувавши інтерполяцію з функціональним параметром ψ до (24), ми отримаємо обмежений оператор

$$\Lambda : \left[H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega), H^{\sigma_1,\sigma_1/(2b)}(\Omega)\right]_\psi \to \\ \to \left[\mathcal{H}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)}, \mathcal{H}^{\sigma_1-2m,(\sigma_1-2m)/(2b)}\right]_\psi. \tag{25}$$

Оператор (25) буде розширенням за неперервністю відображення (16) оскільки $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільне в області визначення (25). Мають місце наступні інтерполяційні формули (пор. [22, п.5])

$$\left[H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega), H^{\sigma_1,\sigma_1/(2b)}(\Omega)\right]_\psi = H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega) \tag{26}$$

і

$$\left[\mathcal{H}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega), \mathcal{H}^{\sigma_1,\sigma_1/(2b)}(\Omega)\right]_\psi = \mathcal{H}^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega) \tag{27}$$

з еквівалентністю норм. Отже, з (25),(26) і (27) випливає (23).

Нехай $\sigma > \sigma_0$ таке, що $\sigma + 1/2 \notin \mathbb{Z}$ і $\sigma/(2b) + 1/2 \notin \mathbb{Z}$. Доведемо, що для розв'язку $u \in H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)$ задачі (2)–(5) з правою частиною $F \in \mathcal{Q}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}$ вірна нерівність

$$\|u\|_{H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)} \leq c\,\|f\|_{H^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}(\Omega)} + \\ + c\sum_{k=0}^{1}\sum_{j=1}^{m}\|g_{j,k}\|_{H^{(\sigma-m_j-1/2)/(2b),\varphi}(0,\tau)} + c\sum_{k=0}^{\varkappa-1}\|h_k\|_{H^{\sigma-2bk-b,\varphi}(0,l)}$$

з деякою сталою $c > 0$, що не залежить від u та правих частин задачі. Шуканий ізоморфізм (17) випливає з (23) та цієї оцінки.

Позначимо $\varkappa_1 := [\sigma/(2b) - 1/2]$, де $[a]$ – ціла частина числа a. Функції $u \in H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)$ будуть мати сліди $\partial_t^k u(x,0) \in H^{\sigma-2bk-b,\varphi}(0,l)$ для всіх $k \in \{0,\ldots,\varkappa_1\}$. При $\sigma > 2m + b$ число $\varkappa_1 > \varkappa - 1$. Тому наступний абзац міркувань стосується випадку $\sigma > 2m + b$. Якщо ж $\sigma < 2m + b$, то $\varkappa_1 = \varkappa - 1$ і ці міркування просто опускаємо.

З умови (i) параболічності задачі (2)–(5) випливає, що рівняння (2) можна розв'язати відносно старшої похідної по t:

$$\partial_t^\varkappa u(x,t) = \sum_{\substack{\alpha+2b\beta\leq 2m,\\ \beta<m/b}} a_1^{\alpha,\beta}(x,t)\,D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t) + f(x,t). \tag{28}$$

Поклавши $t = 0$ у рівності (28), та рівностях, отриманих з неї шляхом диференціюваня по t потрібну кількість разів і скориставшись початковими умовами (5) виразимо $h_i(x) = \partial_t^i u(x,0)$ для всіх $i \in \{\varkappa, \dots, \varkappa_1\}$ через початкові дані (5) та праву частину f рівняння (2). Знайдені сліди $h_i \in H^{\sigma-2bi-b,\varphi}(0,l)$ будуть задовольняти нерівність

$$\|h_i\|_{H^{\sigma-2bi-b,\varphi}(0,l)} \leq c\,\|f\|_{H^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}(\Omega)}+$$
$$+c\sum_{k=0}^{\varkappa-1}\|h_k\|_{H^{\sigma-2bk-b,\varphi}(0,l)} \quad \text{для кожного} \quad i \in \{\varkappa, \dots, \varkappa_1\},$$

де константа c не залежить від f, $h_0, \dots, h_{\varkappa-1}$. Цей факт у випадку просторів Соболева ($\varphi \equiv 1$) є відомим [25]. У нашому випадку (29) доводиться подібно до (23) шляхом інтерполяції з функціональним параметром відповідних пар гільбертових просторів Соболєва.

Отже, для знайденого розв'язку $u = v + w$ задачі (2)–(5) маємо

$$\partial_t^k u(x,0) = \partial_t^k (v+w)(x,0) = h_k(x) \quad \text{для всіх} \quad k \in \{0, \dots, \varkappa_1\}. \tag{29}$$

Оскільки, $w \in H_{+}^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)$, то

$$\partial_t^k w(x,0) = 0 \quad \text{для всіх} \quad k \in \{0, \dots, \varkappa_1\}. \tag{30}$$

З (29) і (30) випливає, що

$$\partial_t^k v(x,0) = h_k(x) \quad \text{для всіх} \quad k \in \{0, \dots, \varkappa_1\}. \tag{31}$$

Нехай $H^{\sigma,\sigma,\varphi}(\Omega) := H^{\sigma,\sigma\gamma,\varphi}(\Omega)$ при $\gamma = 1$, є ізотропний простір узагальненої гладкості на Ω. Розглянемо лінійний оператор продовження

$$T\,:\,\{\theta_0, \dots, \theta_{\varkappa_1}\} \in \bigoplus_{k=0}^{\varkappa_1} H^{\sigma-2bk-b,\varphi}(0,l) \to u \in H^{\sigma,\sigma,\varphi}(\Omega), \tag{32}$$

такий, що

$$\partial_t^k u(x,0) = \theta_k(x) \quad \text{для кожного} \quad k \in \{0, \dots, \varkappa_1\} \tag{33}$$

і

$$\|u\|_{H^{\sigma,\sigma,\varphi}(\Omega)} \leq c\sum_{k=0}^{\varkappa_1}\|\theta_k\|_{H^{\sigma-2bk-b,\varphi}(0,l)} \tag{34}$$

зі сталою c, що не залежить від функцій $\theta_0(x),\dots,\theta_{\varkappa_1}(x)$. У випадку просторів Соболєва ($\varphi\equiv 1$) цей оператор побудовано у [26]. Його дія розповсюджується на простори узагальненої гладкості по інтерполяції подібно до доведення (23).

Оскільки, $H^{\sigma,\sigma,\varphi}(\Omega)\hookrightarrow H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)$, то (32) буде також лінійним оператором, що діє в анізотропний простір узагальненої гладкості $H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)$:

$$T\,:\,\{\theta_0,\dots,\theta_{\varkappa_1}\}\in\bigoplus_{k=0}^{\varkappa_1}H^{\sigma-2bk-b,\varphi}(0,l)\to u\in H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega),\qquad(35)$$

таким, що вірно (33) і

$$\|u\|_{H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)}\leq c\sum_{k=0}^{\varkappa_1}\|\theta_k\|_{H^{\sigma-2bk-b,\varphi}(0,l)}\qquad(36)$$

зі сталою c, що не залежить від функцій $\theta_0(x),\dots,\theta_{\varkappa_1}(x)$.

Розглянемо вектор $h:=\{h_0,\dots,h_{\varkappa-1},h_\varkappa,\dots,h_{\varkappa_1}\}$, у якого перші компоненти $h_0,\dots,h_{\varkappa-1}$ є початкові дані (5), а решта $h_\varkappa,\dots,h_{\varkappa_1}$ обчислені з рівняння (2) описаним вище способом. Нехай $v_1:=Th\in H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)$. Тоді з (33) маємо

$$\partial_t^k v_1(x,0)=h_k(x)\quad\text{для всіх}\quad k\in\{0,\dots,\varkappa_1\},\qquad(37)$$

а з (29) і (36)

$$\|v_1\|_{H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)}\leq c\,\|f\|_{H^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}(\Omega)}+ \\ +c\sum_{k=0}^{\varkappa-1}\|h_k\|_{H^{\sigma-2bk-b,\varphi}(0,l)},$$

зі сталою c, що не залежить від $f,\,h_0,\dots,h_{\varkappa-1}$.

З формул (31) і (37) маємо, що $v-v_1\in H_+^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)$. Звідси, скориставшись твердженням 1, отримаємо, що

$$Av-Av_1=A(v-v_1)\in H_+^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}(\Omega),\qquad(38)$$

$$B_{j,k}v-B_{j,k}v_1=B_{j,k}(v-v_1)\in H_+^{\sigma-m_j-1/2,(\sigma-m_j-1/2)/(2b),\varphi}(0,\tau)\qquad(39)$$
$$\text{для всіх}\quad k\in\{0,1\}\quad\text{та}\quad j\in\{1,\dots,m\}.$$

Тоді, з формул (38), (39) та умови узгодження випливає, що

$$f - Av_1 = (f - Av) + (Av - Av_1) \in H_+^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}(\Omega), \qquad (40)$$

$$\begin{gathered} g_{j,k} - B_{j,k}v_1 = (g_{j,k} - B_{j,k}v)+ \\ +(B_{j,k}v - B_{j,k}v_1) \in H_+^{\sigma-m_j-1/2,(\sigma-m_j-1/2)/(2b),\varphi}(0,\tau) \\ \text{для всіх} \quad k \in \{0,1\} \quad \text{та} \quad j \in \{1,\dots,m\}. \end{gathered} \qquad (41)$$

З (37), (40) та (41) випливає, що в умові узгодження правих частин задачі (2)–(5) можна функцію v замінити функцією v_1, для якої вірна нерівність (38). Для функції v подібної нерівності не було.

Тепер переходимо безпосередньо до встановлення нерівності (28). Нехай $u \in H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)$ є розв'язком задачі (2)–(5). Тоді з (29) і (37) маємо $u - v_1 \in H_+^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)$. Скориставшись твердженням 1 можна записати нерівність

$$\begin{gathered} \|u - v_1\|_{H_+^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)} \leq \\ \leq c\,\|f - Av_1\|_{H_+^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}(\Omega)}+ \\ +c\sum_{k=0}^{1}\sum_{j=1}^{m}\|g_{j,k} - B_{j,k}v_1\|_{H_+^{(\sigma-m_j-1/2)/(2b),\varphi}(0,\tau)}. \end{gathered}$$

З леми 1 випливає, що (42) можна записати так

$$\begin{gathered} \|u - v_1\|_{H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)} \leq \\ \leq c\,\|f - Av_1\|_{H^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}(\Omega)}+ \\ +c\sum_{k=0}^{1}\sum_{j=1}^{m}\|g_{j,k} - B_{j,k}v_1\|_{H^{(\sigma-m_j-1/2)/(2b),\varphi}(0,\tau)}. \end{gathered}$$

Завдяки обмеженості оператора (23) маємо

$$\begin{gathered} \|Av_1\|_{H^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b),\varphi}(\Omega)}+ \\ +\sum_{k=0}^{1}\sum_{j=1}^{m}\|B_{j,k}v_1\|_{H^{(\sigma-m_j-1/2)/(2b),\varphi}(0,\tau)} \leq \\ \leq c\,\|v_1\|_{H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)}. \end{gathered}$$

З формул (38), (42) та (42) випливає потрібна нерівність (28).

Теорема 1 доведена.

Доведення теореми 2.

Теорема 2 випливає з теореми 1, завдяки якій $u \in H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)$, та деякої версії теореми вкладання Л. Хермандера [6, теорема 2.2.7]. Згідно з цією версією [27, п. 5], будь-яка функція $u \in H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)$, де параметри σ та φ задовольняють умові теореми 2, має властивості гладкості, вказані у висновку цієї теореми.

Теорема 2 доведена.

6. Висновки

В статті доведена коректна розв'язність початково–крайової параболічної задачі (2)–(5) в уточненій соболєвській шкалі (теорема 1). Знайдені нові достатні умови неперервності розв'язку задачі та його узагальнених частинних похідних заданого порядку (теорема 2).

Література

[1] *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи матем. наук. – 1964. – **19**, № 3. – С. 53–161.

[2] *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.

[3] *Lions J.-L. Magenes E.* Non-Homogeneous Boundary-Value Problems and Applications. – Vol. II. – Berlin: Springer, 1972. – xi+242 p.

[4] *Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д.* Параболические граничные задачи. – Кишинев, Штиинца, 1992. – 328 с.

[5] *Eidel'man S. D.* Parabolic equations // Encycl. Math. Sci. Vol. 63. Partial differential equations, VI. – Berlin: Springer, 1994. – P. 205–316.

[6] *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с.

[7] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. — Москва: Мир, 1986. – 456 с.

[8] *Jacob N.* Pseudodifferential Operators and Markov Processes: In 3 volumes. – London: Imperial College Press, 2001, 2002, 2005. – xxii+493 p., xxii+453 p., xxviii+474 p.

[9] *Nicola F., Rodino L.* Global Pseudodifferential Calculas on Euclidean Spaces. – Basel: Birkhäser, 2010. – x+306 p.

[10] *Paneah B.* The Oblique Derivative Problem. The Poincaré Problem.– Berlin: Wiley–VCH, 2000. – 348 p.

[11] *Triebel H.* The Structure of Functions. – Basel: Birkhäser, 2001. – xii+425 p.

[12] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (Доступно как arXiv:1106.3214.)

[13] *Волевич Л.Р., Панеях Б.П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3–74.

[14] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 3. – С. 352–370.

[15] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. III // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 5. – С. 679–701.

[16] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Регулярная эллиптическая граничная задача для однородного уравнения в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1536–1555.

[17] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптический оператор с однородными регулярными граничными условиями в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. вісник. – 2006. – **3**, № 4. – С. 547–580.

[18] *Мурач А. А.* Эллиптические псевдодифференциальные операторы в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии // Укр. матем. журн. – 2007. – **59**, № 6. – С. 798–814.

[19] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптическая краевая задача в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 4. – С. 497–520.

[20] *Murach A. A.* Douglis-Nirenberg elliptic systems in the refined scale of spaces on a closed manifold. — Methods Funct. Anal. Topology. – 2008. – **14**, No. 2. – P. 142–158.

[21] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, No. 2. – P. 211–281.

[22] *Los V., Murach A. A.* Parabolic problems and interpolation with a function parameter. – Methods Funct. Anal. Topology. – 2013. – **19**, No. 2. – P. 146–160.

[23] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 144 с.

[24] *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular Variation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 512 p.

[25] *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С.Л.Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. // Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А.Н. Герцена. – 1958. – **197**, С. 54–112.

[26] *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – Москва: Мир, 1980. – 664 с.

[27] *Лось В. М., Мурач О. О.* Про гладкість розв'язків параболічних мішаних задач. – Зб-к праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 219–234.