Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 2, 274–283

УДК 517.984, 517.923

В. Н. Молибога

(Институт математики НАН Украины, Киев)

Об ограниченности решений уравнения Хилла с потенциалом–распределением

molyboga@imath.kiev.ua

We describe all values of $\lambda \in \mathbb{R}$ for which the all non-trivial solutions of Hill's equation $-y'' + q(x)y = \lambda y$ with 1-periodic real-valued distribution potential $q(x)$ from $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R})$ are bounded ore unbounded on $\mathbb{R}$. In particular, potential q can be a 1-periodic Radon measure (for example, sum of 1-periodic δ-functions).

Описаны все значения $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых все нетривиальные решения уравнения Хилла $-y'' + q(x)y = \lambda y$ с 1-периодическим действительнозначным потенциалом–распределением $q(x)$ из $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R})$ являются ограниченными или неограниченными на $\mathbb{R}$. В частности, потенциал q может быть 1-периодической мерой Радона (например, сумма 1-периодических δ-функций).

В работе исследуются свойства *ограниченности* и *неограниченности* решений уравнения Хилла с сильно сингулярным потенциалом.

Уравнение Хилла очень важно для понимания устойчивости движения в осцилляторных системах. В зависимости от параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ решения могут иметь вид устойчивых квазипериодических колебаний, либо колебания будут раскачиваться с нарастающей экспоненциально амплитудой. В физике ускорителей уравнение Хилла необычайно важно, поскольку описывает поперечную линейную динамику частиц в фокусирующих магнитных полях (бетатронные колебания). Важными частными случаями уравнения Хилла являются уравнение Матьё и уравнение Мейснера.

Имея более чем столетнюю историю исследования [6], уравнение Хилла и по сегодняшний день остаётся предметом пристального изучения, причём как в случае L^2-потенциала [3, 16, 14, 15], так и в случае потенциала, являющегося обобщённой функцией [1, 2, 18, 7, 8, 4, 12, 13], см. также библиографию там.

Рассмотрим сначала уравнение Хилла

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad x \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с *непрерывным* 1-периодическим вещественным потенциалом q. Исследуем при каких значениях параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ нетривиальные решения уравнения Хилла (1) являются ограниченными либо неограниченными на всей оси $\mathbb{R}$.

Чтобы дать ответ на поставленный вопрос, рассмотрим на отрезке $[0,1]$ периодическую и антипериодическую краевые задачи, порождённые уравнением (1) и соответствующими краевыми условиями:

$$y(0) = y(1), \qquad y'(0) = y'(1), \tag{P}$$
$$y(0) = -y(1), \qquad y'(0) = -y'(1). \tag{AP}$$

Тогда, как хорошо известно [10, 19, 23], собственные значения задач (1)+(P) и (1)+(AP) образуют бесконечные последовательности, которые стремятся к бесконечности и удовлетворяют неравенствам:

$$-\infty < \lambda_0^+ < \lambda_1^- \leqslant \lambda_1^+ < \lambda_2^- \leqslant \lambda_2^+ < \lambda_3^- \leqslant \lambda_3^+ \cdots . \tag{2}$$

Здесь $\lambda_n^\pm$ с чётными номерами являются собственными значениями периодической задачи (1)+(P), а с нечётными — антипериодической задачи (1)+(AP).

Введём обозначения

$$\mathcal{B}_n := (\lambda_n^+, \lambda_{n+1}^-), \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3}$$
$$\mathcal{G}_0 := (-\infty, \lambda_0^+), \quad \mathcal{G}_n := (\lambda_n^-, \lambda_n^+), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Замкнутые интервалы $\overline{\mathcal{B}}_n$ мы будем называть *спектральными интервалами* (*спектральными зонами*), а интервалы $\mathcal{G}_n$ — *спектральными лакунами*. В случае, когда

$$\lambda_{n_i}^- = \lambda_{n_i}^+,$$

мы будем говорить, что спектральная лакуна $\mathcal{G}_{n_i}$ вырождена. При этом в точке $\lambda^-_{n_i} = \lambda^+_{n_i}$ соседние спектральные зоны $\overline{\mathcal{B}}_{n_i-1}$ и $\overline{\mathcal{B}}_{n_i}$ объединяются.

Теперь мы можем сформулировать ответ на поставленный в начале работы вопрос [10, 24, 19, 23]:

(1) все нетривиальные решения уравнение Хилла (1) являются ограниченными на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда λ является внутренней точкой некоторой спектральной зоны $\overline{\mathcal{B}}_n$, либо является точкой объединения спектральных зон;

(2) все нетривиальные решения уравнение Хилла (1) являются неограниченными на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда λ принадлежит некоторой спектральной лакуне $\mathcal{G}_n$;

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$ оператор Хилла

$$\begin{aligned} &\mathrm{L}(q)y := -y'' + q(x)y, \\ &q(x+1) = q(x) \in C(\mathbb{R}), \quad \operatorname{Im} q = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Как известно, оператор $\mathrm{L}(q)$ самосопряжён и полуограничен снизу. Его спектр абсолютно непрерывен и имеет зонную структуру.

Оказывается, что спектр оператора $\mathrm{L}(q)$ можно охарактеризовать в терминах ограниченности решений уравнения (1): $\lambda \in \mathbb{R}$ принадлежит спектру оператора Хилла $\mathrm{L}(q)$ тогда и только тогда, когда соответствующее уравнение (1) имеет хотя бы одно нетривиальное ограниченное решение [20].

Замечание 1. С ограниченностью решений уравнения Хилла тесно связано понятие устойчивости уравнения. Значение $\lambda \in \mathbb{R}$ называется *устойчивым*, если все нетривиальные решения уравнения являются ограниченными на $\mathbb{R}$, в противном случае это значение $\lambda \in \mathbb{R}$ называется *неустойчивым.*

Поэтому открытые спектральные интервалы $\mathcal{B}_n$ вместе с их точками объединения называют *интервалами устойчивости*, а замыкания спектральных лакун $\overline{\mathcal{G}}_n$ называют *интервалами неустойчивости* [10, 21, 24].

Основная цель настоящей работы — описать все значения $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых все нетривиальные решения уравнения Хилла (1) с потенциалом q, являющимся 1-периодическим вещественнозначным распределением (обобщённой функцией) из пространства $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R})$, будут ограничены либо неограничены на $\mathbb{R}$.

Оказывается, что результат остаётся таким же, как и для случая непрерывного потенциала, хотя для доказательства этого приходится преодолеть определённые трудности, обусловленные наличием в уравнении обобщённой функции (например, меры).

Согласно с [7, 5] 1-периодическая обобщённая функция $q \in H^{-1}_{loc}(\mathbb{R})$ допускает представление

$$q = C + Q',$$

где

$$C \in \mathbb{R},\ Q(x+1) = Q(x) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}),\ \int_0^1 Q(x)d\,x = 0,\ \operatorname{Im} Q = 0.$$

Далее в работе, без потери общности, мы будем полагать, что $C \equiv 0$.

Следуя [17] уравнение (1) с сингулярным потенциалом мы определяем как квазидифференциальное:

$$\begin{aligned} &\mathrm{l}[y] = \lambda y, \\ &\mathrm{l}[y] := -(y' - Qy)' - Q(y' - Qy) - Q^2 y, \end{aligned} \tag{6}$$

где $y^{[1]} := y' - Qy$ —квазипроизводная. При этом локально абсолютно непрерывная функция y выбирается таким образом, чтобы квазипроизводная $y^{[1]}$ также была локально абсолютно непрерывной функцией. Можно показать, что множество таких функций y является всюду плотным в $L^2(\mathbb{R})$.

Решение квазидифференциального уравнения (6) мы определяем следующим образом.

Определение. Решение задачи Коши для квазидифференциального уравнения

$$\mathrm{l}[y] = \lambda y,$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = c_1, \quad y^{[1]}(x_0) = c_2, \qquad x_0 \in \mathbb{R}, \quad c = (c_1, c_2) \in \mathbb{C},$$

определяется как первая компонента решения задачи Коши для соответствующей системы первого порядка линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\,x}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & 1 \\ -\lambda - Q^2 & -Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad y_1(x_0) = c_1, \quad y_2(x_0) = c_2, \tag{7}$$

где $y_1 := y$, $y_2 := y^{[1]}$.

Согласно сделанным предположениям элементы матрицы в уравнении (7) являются локально суммируемыми функциями, поэтому в силу теоремы существования и единственности глобального решения задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений [22, 19] данное выше определение является корректным.

Вместе с квазидифференциальным уравнением (6) рассмотрим на интервале $[0,1]$ периодическую и антипериодическую краевые задачи, порождённые (6) и соответствующими краевыми условиями (с заменой производной на квазипроизводную):

$$y(0) = y(1), \qquad y^{[1]}(0) = y^{[1]}(1), \tag{$\widetilde{\mathrm{P}}$}$$

$$y(0) = -y(1), \qquad y^{[1]}(0) = -y^{[1]}(1). \tag{$\widetilde{\mathrm{AP}}$}$$

Отметим, что в случае, когда функция Q является локально абсолютно непрерывной, краевые задачи (1)+(P), (1)+(AP) и (6)+($\widetilde{\mathrm{P}}$), (6)+($\widetilde{\mathrm{AP}}$) соответственно эквивалентны, если потенциал в уравнении (1) является локально суммируемой функцией.

Как известно [7, 8, 11, 5], собственные значения периодической (6)+($\widetilde{\mathrm{P}}$) и антипериодической (6)+($\widetilde{\mathrm{AP}}$) краевых задач образуют бесконечные последовательности, стремящиеся к $+\infty$, и удовлетворяют неравенствам (2). При этом $\lambda_n^{\pm}$ с чётными номерами являются собственными значениями периодической задачи, а с нечётными — антипериодической.

Определения спектральных зон $\overline{\mathcal{B}}_n$ (3), спектральных лакун $\mathcal{G}_n$ (4), вырожденных спектральных лакун, объединённых спектральных зон мы оставляем прежними как для случая непрерывного потенциала.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Для квазидифференциального уравнения Хилла* (6) *с сильно сингулярным потенциалом $q \in H^{-1}_{loc}(\mathbb{R})$ имеют место следующие утверждения:*

(1) все нетривиальные решения уравнение Хилла (6) *являются ограниченными на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда λ является внутренней точкой некоторой спектральной зоны $\overline{\mathcal{B}}_n$, либо является точкой объединения спектральных зон;*

(2) все нетривиальные решения уравнение Хилла (6) *являются неограниченными на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда λ принадлежит некоторой спектральной лакуне $\mathcal{G}_n$;*

Следствие 1.1. *Если $\lambda \in \mathbb{R}$ совпадает с концом невырожденной спектральной лакуны, то среди нетривиальных решений уравнения* (6) *есть и ограниченные и неограниченные решения на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Перепишем соответствующую квазидифференциальному уравнению (6) систему (7) в каноническом (гамильтоновом) виде [21, 24]

$$\frac{d\overrightarrow{y}}{dx} = JH(x,\lambda)\overrightarrow{y}, \qquad H(x,\lambda) = H_0(x) + \lambda H_1, \tag{8}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_0(x) = \begin{pmatrix} Q^2 & Q \\ Q & 1 \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица $H(x,\lambda)$ является эрмитовой, а её элементы являются локально суммируемыми функциями.

Обозначим через $U(x,\lambda)$ матрицант уравнения (8), т. е. квадратную матрицу

$$U(x,\lambda) = \begin{pmatrix} u_1(x,\lambda) & v_1(x,\lambda) \\ u_2(x,\lambda) & v_2(x,\lambda) \end{pmatrix}, \qquad U(0,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

являющуюся решением дифференциальной системы

$$\frac{dU}{dx} = JH(x,\lambda)U.$$

Матрица $U(1,\lambda)$ называется матрицей монодромии системы (8), а её собственные значения $\rho_1(\lambda)$, $\rho_2(\lambda)$ — мультипликаторами.

Поскольку след $\operatorname{Tr} JH(x,\lambda)$ матрицы $JH(x,\lambda)$ тождественно равен нулю, то в силу формулы Лиувилля

$$\det U(x,\lambda) \equiv 1. \tag{9}$$

Рассмотрим функцию Ляпунова (дискриминант Хилла)

$$\Delta(\lambda) := \frac{1}{2}\operatorname{Tr} U(1,\lambda).$$

Тогда, учитывая равенство (9), мультипликаторы матрицы монодромии будут вычисляться по формуле

$$\rho_{1,2}(\lambda) = \Delta(\lambda) \pm \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 1}.$$

Поэтому, при

(a) $|\Delta(\lambda)| < 1$ мультипликаторы находятся на единичной окружности и являются простыми;

(b) $|\Delta(\lambda)| > 1$ один из мультипликаторов по абсолютной величине больше 1, а другой — меньше 1;

(c) $|\Delta(\lambda)| = 1$ мультипликаторы находятся на единичной окружности и имеют алгебраическую кратность равную 2: $\rho_{1,2} = -1$ либо $\rho_{1,2} = 1$.

В силу общей теоремы [21, Стр. 214], [24, Стр. 106] (см. также [9]), дающей необходимые и достаточные условия устойчивости линейных гамильтоновых систем, имеем:

(a) все нетривиальные решения система (8) ограничены на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда мультипликаторы находятся на единичной окружности и либо являются простыми ($|\Delta(\lambda)| < 1$), либо имеют геометрическую кратность равную 2 ($|\Delta(\lambda)| = 1$, $\frac{\partial\,\Delta(\lambda)}{\partial\,\lambda} = 0$);

(b) все нетривиальные решения система (8) неограничены на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда мультипликаторы по абсолютной величине не равны 1 ($|\Delta(\lambda)| > 1$);

(c) система (8) имеет нетривиальные ограниченные решения и нетривиальные неограниченные решения на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\rho_1 = \rho_2 = 1$ либо $\rho_1 = \rho_2 = -1$, причём геометрическая кратность мультипликатора не равна 2 ($|\Delta(\lambda)| = 1$ и $\frac{\partial\,\Delta(\lambda)}{\partial\,\lambda} \neq 0$).

Поэтому, для завершения доказательства теоремы остаётся заметить, что как и в случае непрерывного потенциала:

$$|\Delta(\lambda)| < 1 \Leftrightarrow \lambda \in \mathcal{B}_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$
$$|\Delta(\lambda)| > 1 \Leftrightarrow \lambda \in \mathcal{G}_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

и

$$\Delta(\lambda) = 1 \Leftrightarrow \lambda \in \{\lambda_0^+,\ \lambda_{2n}^\pm\}_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \Delta(\lambda) = -1 \Leftrightarrow \lambda \in \{\lambda_{2n-1}^\pm\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Теорема 1 и следствие 1.1 доказаны. □

В гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$ рассмотрим оператор Хилла $\mathrm{L}(q)$ вида (5) с сильно сингулярным потенциалом $q(x+1) = q(x) \in$

$H^{-1}_{loc}(\mathbb{R})$. В этом случае оператор $\mathrm{L}(q)$ может быть корректно определён в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ несколькими эквивалентными между собой способами [11]:

- как сумма квадратичных форм [8];
- как квазидифференциальный оператор [17, 18]: минимальный, максимальный, расширение по Фридрихсу минимального оператора;
- как предел, в смысле равномерной резольвентной сходимости, последовательности операторов с 1-периодическими гладкими коэффициентами.

Известно, что оператор $\mathrm{L}(q)$ является полуограниченным снизу самосопряжённым оператором. Его спектр абсолютно непрерывен и имеет зонную структуру: спектральные зоны чередуются со спектральными лакунами [7, 8, 11, 5]. При этом

$$\operatorname{spec}(\mathrm{L}(q)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{\mathcal{B}}_n.$$

Следующая теорема позволяет охарактеризовать спектр оператора Хилла в терминах свойств решений соответствующего уравнения.

Теорема 2. *Точка $\lambda \in \mathbb{R}$ принадлежит спектру оператора $\mathrm{L}(q)$ тогда и только тогда, когда соответствующее квазидифференциальное уравнение* (6) *имеет хотя бы одно нетривиальное ограниченное решение на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 было установлено, что квазидифференциальное уравнение (6) имеет хотя бы одно нетривиальное ограниченное решение тогда и только тогда, когда $|\Delta(\lambda)| \leqslant 1$. Для завершения доказательства теоремы достаточно учесть, что

$$|\Delta(\lambda)| \leqslant 1 \Leftrightarrow \lambda \in \overline{\mathcal{B}}_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Теорема доказана. □

Список литературы

[1] *Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H.*, Solvable models in Quantum Mechanics [2-nd ed.] With an appendix by Pavel Exner. – Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 2005.

[2] *Albeverio S., Kurasov P.*, Singular perturbations of differential operators. Solvable Schrödinger type operators. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[3] *Djakov P., Mityagin B.* Instability zones of one-dimentional periodic Schrödinger and Dirac operatots // Russian Math. Surveys. – 2006. – **61**, no. 4. – P. 663–766.

[4] *Djakov P., Mityagin B.* Spectral gaps of Schrödinger operators with periodic singular potentials // Dynamics of PDE. – 2009. – **6**, no. 2. – P. 95–165.

[5] *Djakov P., Mityagin B.* Fourier method for one dimentional Schrödinger operators with singular periodic potentials // Topics in operator theory, vol. 2. Systems and mathematical physics. – Oper. Theory Adv. Appl., vol. 203. – Basel: Birkhäuser, 2010. – P. 195–236.

[6] *Hill G. W.* On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. // Acta Matematica. – 1886. – **8**, no. 1. – P. 1–36.

[7] *Hryniv R., Mykytyuk Ya.* 1-D Schrödinger operators with periodic singular potentials // Methods Funct. Anal. Topology. – 2001. – **7**, no. 4. – P. 31–42.

[8] *Korotyaev E.* Characterization of the spectrum of Schrödinger operators with periodic distributions // Int. Math. Res. Not. – 2003. – **37**. – P. 2019–2031.

[9] *Крейн М.* О характеристической функции $A(\lambda)$) линейной канонической системы дифференциальных уравнений второго порядка с периодическим коэффициентами // Прикладная Математика и Механика. – 1957. – **21**. – С. 320–329.

[10] *Magnus W., Winkler S.*, Hill's equation, New York, etc.: Interscience Publishers, 1966.

[11] *Mikhailets V., Molyboga V.* One-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials // Methods Funct. Anal. Topology. – 2008. – **14**, no. 2. – P. 184–200.

[12] *Mikhailets V., Molyboga V.* Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials // Methods Funct. Anal. Topology. – 2009. – **15**, no. 1. – P. 31–40.

[13] *Mikhailets V., Molyboga V.* Hill's potentials in Hörmander spaces and their spectral gaps // Methods Funct. Anal. Topology. – 2011. – **17**, no. 3. – P. 235–243.

[14] *Mikhailets V., Molyboga V.* Smoothness of Hill's potential and lengths of spectral gaps // Spectral theory, mathematical system theory, evolution equations, differential and difference equations. – Oper. Theory Adv. Appl., vol. 221. – Basel: Birkhäuser, 2012. – P. 469–479.

[15] *Pankrashkin K.* A remark on the discriminant of Hill's equation and Herglotz functions // Arhiv der Mathematik. – 2014. – **102**, no. 2. – P. 155–163.

[16] *Pöschel J.* Hill's potentials in weighted Sobolev spaces and their spectral gaps // Math. Ann. – 2011. – **349**, no. 2. – P. 433–458.

[17] *Savchuk A., Shkalikov A.* Sturm–Liouville operators with singular potentials. – Math. Notes. – 1999. – **66**, no. 5–6. – P. 741–753.

[18] *Savchuk A., Shkalikov A.* Sturm–Liouville operators with distribution potentials. – Trans. Moscow Math. Soc. – 2003. – **64**. – P. 143–192.

[19] *Weidmann J.*, Spectral theory of ordinary differenrial operators. – Berlin: Springer–Verlag, 1987.

[20] *Глазман И.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. – Москва: Физ-мат лит., 1963.

[21] *Демидович Б.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1967.

[22] *Наймарк М.*, Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969.

[23] *Левитан Б., Саргсян И.*, Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака Москва: Наука, 1988.

[24] *Якубович В., Старжинский В.*, Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – Москва: Наука, 1972.