Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 2, 49–65

УДК 517.956

В. В. Городецький, О. В. Мартинюк

(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)

Про розв'язність двоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з оператором диференціювання Гельфонда-Леонтьєва в просторах типу S'

alfaolga1@gmail.com

We establish the solvability of nonlocal two-point problem for a time evolution equation with the conjugate operator of generalized differentiation of Gelfond-Leontiev on space of generalized functions S' type's.

Встановлено розв'язність нелокальної двоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з оператором, спряженим до оператора узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва, у просторі узагальнених функцій типу S'.

Вступ

У праці [1] І.М. Гельфанд та Г.Є Шилов виклали метод побудови функціональних просторів нескінченно диференційовних функцій, заданих на $\mathbb{R}$, на які накладаються умови спадання на нескінченності і зростання похідних зі збільшенням порядку, що виражаються за допомогою нерівностей

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{kn}, \quad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

де $\{c_{kn}\}$ – подвійна послідовність додатних чисел. Якщо ці числа змінюються довільним чином разом із φ, то одержуємо простір Л. Шварца S швидко спадних на $\mathbb{R}$ функцій. Якщо $c_{kn} = l_k m_n$, де $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – деякі послідовності, то маємо простори $S_{l_k}^{m_n}$, які й досі повністю ще не досліджені. Найбільш детально вивчено випадок, коли $l_k = k^{k\alpha}$, $\alpha > 0$, $m_n = n^{n\beta}$, $\beta > 0$, відповідні простори при цьому позначають символом S_α^β. При конкретному підборі послідовностей $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ (див. [2]) у просторах $S_{l_k}^{m_n}$ містяться і відомі простори типу W, введені у [3] Б.Л. Гуревичем (див. також [4]). У цих просторах для характеристики поведінки функцій на нескінченності замість степеневих використовуються опуклі функції.

У [5] досліджені узагальнені простори $S_{l_k}^{m_n}$, що складаються з нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, на які накладаються умови спадання на нескінченності та зростання похідних із збільшенням порядку, які описуються нерівностями (1).

Простори S_α^β, а також простори типу W широко використовуються при дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь із частинними похідними зі сталими (чи залежними лише від часу) коефіцієнтами.

В теорії аналітичних у крузі функцій вивчається питання про представлення лінійних неперервних відображень у вигляді диференціальних або інтегральних операторів, операторів узагальненого диференціювання та інтегрування. Різні аспекти цієї проблеми досліджували Ж. Дельсарт, Ж.-Л. Ліонс, Ю.Ф. Коробейник, Н.И. Нагнибіда, В.В. Напалков, В.А. Ткаченко, В.В. Подпорін, С.С. Лінчук та інші математики. Важливий клас операторів узагальненого диференціювання складають оператори Гельфонда-Лонтьєва, введені в середині XX століття при вивченні розкладів цілих функцій в узагальнені ряди Фур'є. Властивості таких операторів досліджували та продовжуються досліджувати математики в просторі A_∞ однозначних і цілих в $\mathbb{C}$ функцій із топологією компактної збіжності (A_∞ – не нормований простір, але в той же час A_∞ є простором Фреше). Прикладами інших просторів, що складаються з цілих функцій, можуть бути простори S_α^β, $\{\alpha, \beta\} \subset (0, 1)$ [1], а також простори типу W [3, 4]. Функції з таких просторів на дійсній осі разом з усіма своїми похідними при $|x| \to \infty$ спадають швидше за $\exp(-a|x|)$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Топологія таких просторів відмінна від топології простору A_∞.

У [5] досліджені оператори узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва скінченного та нескінченного порядків у просторах $S_{l_k}^{m_n}$. Це дозволило розширити клас еволюційних рівнянь, для яких природним середовищем дослідження задачі Коші та нелокальних за часом задач є простори типу S. В [6] за допомогою "операторного методу" встановлено розв'язність задачі Коші та двоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з операторами узагальненого диференціювання в узагальнених просторах типу S. У даній роботі встановлюється розв'язність двоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь, що містять оператори, спряжені до операторів узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва, у просторах узагальнених функцій типу $(S_{l_k}^{m_n})'$ (просторах, топологічно спряжених до $S_{l_k}^{m_n}$), дається формула, що визначає розв'язок задачі.

Дослідження вказаної задачі у просторах $(S_{l_k}^{m_n})'$ є природним, оскільки гранична функція може мати особливості в одній чи кількох точках. Якщо ці особливості степеневого порядку, то така функція допускає регуляризацію в просторах узагальнених функцій скінченного порядку типу розподілів Соболєва-Шварца. Якщо ж порядок особливостей вищий за степеневий, то така функція є узагальненою функцією нескінченного порядку (наприклад, ультрарозподілом, гіперфункцією). У роботі також описується оператор, спряжений до оператора узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва довільного фіксованого порядку.

1.

Розглянемо послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел, що володіють такими властивостями:

1) $\forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_n \leq m_{n+1}$, $m_0 = 1$;
2) $\forall \alpha > 0$ $\exists c_\alpha > 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_n \geq c_\alpha \cdot \alpha^n$;
3) $\exists M > 0$ $\exists h > 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_{n+1} \leq M h^n m_n$;
4) $\forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_n^2 \leq m_{n-1} \cdot m_{n+1}$;
5) $\exists A > 0$ $\exists L > 0$ $\forall \{n, k\} \subset \mathbb{Z}_+$: $m_n \cdot m_k \leq A L^{n+k} m_{n+k}$.

Прикладами вказаних послідовностей можуть бути послідовності Жевре $m_n = n^{n\beta}$ і $m_n = (n!)^\beta$, $n \in \mathbb{Z}_+$, де $\beta > 0$ – фіксований параметр [7]. Тут також розглянемо послідовність $\{l_k\}$, яка володіє властивостями 1) – 5). Символом $S_{l_k}^{m_n}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, що задовольняють умову:

$$\exists c > 0 \ \exists A > 0 \ \exists B > 0 \ \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \ \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c A^k B^n l_k m_n.$$

$S_{l_k}^{m_n}$ співпадає з об'єднанням зліченно-нормованих просторів $S_{l_k,A}^{m_n,B}$ за всіма індексами $\{A, B\} \subset \mathbb{N}$ [5]; система норм в $S_{l_k,A}^{m_n,B}$ визначається за допомогою формул

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^n l_k m_n}, \quad \{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}.$$

У введених просторах визначені і є неперервними оператори множення на x та на всі многочлени, на деякі нескінченно диференційовні функції, що задовольняють певні умови (зокрема, на функції із розглянутих просторів), оператори диференціювання, зсуву та розтягу.

Розглянемо послідовності $\{m_n\}$, $\{l_k\}$ спеціального вигляду, а саме $m_n = n!\rho_n$, $l_k = k!d_k$, де $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – послідовність додатних чисел, що задовольняє умови: а) послідовність $\{\rho_n\}$ монотонно спадає; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$. Припускатимемо також, що послідовність $\{d_k\}$ володіє властивостями, аналогічними до властивостей а), б). Послідовності $\{n!\rho_n\}$, $\{k!d_k\}$ мають властивості 1) – 5) (див. [5]).

Покладемо

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} \dfrac{k!d_k}{|x|^k}, & |x| \geq 1; \end{cases} \qquad \rho(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \sup\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} \dfrac{|y|^n}{n!\rho_n}, & |y| \geq 1. \end{cases}$$

Відмітимо, що ρ – неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно зростає на проміжку $[1, +\infty)$, при цьому [5]

$$\exists c_0 > 0 \ \exists c > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1) : \quad \rho(x) \geq c_0 e^{c|x|}.$$

Наприклад, якщо $m_n = n^{n(1-\beta)} = n^n \rho_n$, $\rho_n = n^{-n\beta}$, $0 < \beta < 1$, то $\rho(x) \sim \exp(|x|^{1/(1-\beta)})$.

Функція γ – додатна, неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно спадає на проміжку $[1, +\infty)$; до того ж

$$\exists c_0' > 0 \ \exists c' > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1) : \quad \gamma(x) \leq c_0' e^{-c'|x|}.$$

Наприклад, якщо $l_k = k^{k(1-\alpha)} = k^k d_k$, $d_k = k^{-k\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, то γ задовольняє нерівності [1]:

$$\exp\Big(-\frac{1-\alpha}{e}|x|^{1/(1-\alpha)}\Big) \leq \gamma(x) \leq c\exp\Big(-\frac{1-\alpha}{e}|x|^{1/(1-\alpha)}\Big),$$

$$c = e^{(1-\alpha)e/2}.$$

В [5] доведена така теорема: функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ належить простору $S_{l_k}^{m_n}$ тоді й тільки тоді, коли вона аналітично продовжується на комплексну площину до цілої функції $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову

$$\exists a, b, c > 0 \ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: \quad |\varphi(z)| \leq c\gamma(ax)\rho(by).$$

Символом $(S_{l_k}^{m_n})'$ позначимо простір всіх лінійних неперервних функціоналів на $S_{l_k}^{m_n}$ зі слабкою збіжністю, елементи цього простору будемо називати узагальненими функціями.

2.

Нагадаємо, що оператор узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва (який позначимо символом $D^m(F,\cdot)$, $m \in \mathbb{N}$ фіксоване) у просторі A_R, $0 < R \leq +\infty$, – просторі однозначних і аналітичних в крузі $K_R = \{z : |z| < R\}$ функцій з топологією компактної збіжності – визначається за допомогою фіксованої аналітичної функції $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $F \in A_r$, таким чином [8]. Якщо $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ – довільна функція з простору A_R, то за визначенням

$$D^m(F,\varphi)(z) = \sum_{k=m}^{\infty} b_k \frac{a_{k-m}}{a_k} z^{k-m}, \tag{2}$$

при цьому припускається, що $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k-m]{|a_{k-m}|/|a_k|} = 1$.

Відмітимо відомі властивості оператора $D^m(F,\cdot)$ [8]:

1) $D^m(F, \varphi_1 + \varphi_2) = D^m(F,\varphi_1) + D^m(F,\varphi_2)$;

2) $D^m(F, c\varphi) = cD^m(F,\varphi)$, $c = \text{const}$;

3) $D^m(e^z, \varphi) = d^m\varphi/dz^m$;

4) $D^m(F, D^n(F,\varphi)) = D^{m+n}(F,\varphi)$.

Ці властивості вказують на те, що $D^m(F,\varphi)$ дійсно можна розуміти як узагальнену похідну порядку m функції φ, породжену функцією $F(z)$ (замість функції e^z).

Нехай $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ – ціла функція, коефіцієнти $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ якої задовольняють умову

$$\exists \alpha > 0 \; \exists L > 1 \; \forall k \geq m: \; \left|\frac{a_k}{a_{k+m}}\right| \leq \alpha L^{k+m} \tag{3}$$

($m \in \mathbb{N}$ фіксоване). Визначимо оператор узагальненого диференціювання у просторі $S_{m_k}^{m_n}$ за формулою (2), де $z = x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ – довільна функція із простору $S_{m_k}^{m_n}$. В [5] доведено, що оператор узагальненого диференціювання $D^m(F,\cdot)$ визначений коректно в $S_{m_k}^{m_n}$ для довільного фіксованого $m \in \mathbb{N}$ та неперервно відображає цей простір у себе.

Прикладом оператора $D^m(F,\cdot)$, що діє в просторі $S_{m_k}^{m_n}$, може бути оператор узагальненого диференціювання, побудований за цілою функцією

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \equiv 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{Q(1)Q(2)\ldots Q(k)},$$

де Q – поліном: $Q(x) = a_p x^p + \cdots + a_1 x$, причому $Q(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$ (якщо $Q(k) = k$, то $F(z) = e^z$). У цьому випадку [8, с. 75]

$$D^m(F,\varphi) = \sum_{k=m}^{mp} \frac{\Delta_k^{(m)}}{k!} z^{k-m} \varphi^{(k)}(z),$$

де коефіцієнти $\Delta_k^{(m)}$ мають спеціальний вигляд. Можна також показати, що коефіцієнти a_k, $k \in \mathbb{N}$, задовольняють умову (3) зі сталою $L = \gamma L_0 > 1$, де $\gamma = \max\{1, \alpha_0 p \cdot 2^p\}$, $\alpha_0 = \max_{1 \leq i \leq p} |a_i|$, $L_0 = e^{c_0} > 1$, $c_0 > 0$ (див. [5]).

Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = At, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{4}$$

розглянемо нелокальну двоточкову за часом задачу

$$\mu_1 u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_2 u(t,\cdot)|_{t=T} = \varphi, \varphi \in S_{m_k}^{m_n}, \tag{5}$$

де $T \in (0,\infty)$, $\{\mu_1, \mu_2\} \subset (0,\infty)$ – фіксовані числа, $\mu_1 > \mu_2$.

Під розв'язком задачі (4), (5) розумітимемо функцію $u(t,x)$, диференційовну по t, яка при кожному $t \in [0,T]$ є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$, задовольняє рівняння (4) і умову (5) в тому розумінні, що $\mu_1 \lim\limits_{t\to+0} u(t,\cdot) - \mu_2 \lim\limits_{t\to T-0} u(t,\cdot) = \varphi$, де границі розглядаються у просторі $S_{m_k}^{m_n}$; при цьому u неперервно залежить від φ.

У [9] доведено, що двоточкова задача (4), (5) розв'язна у просторі $S_{m_k}^{m_n}$ і розв'язок зображається формулою

$$u(t,x) = \mu_2^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-(n+1)} e^{(t+nT)A} \varphi(x) =$$

$$= \mu_2^{-1} e^{tA} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-(n+1)} e^{nTA} \varphi(x) \Big), \mu = \mu_1/\mu_2.$$

3.

Нехай $A^n := D^n(F,\cdot)$, $n \in \mathbb{N}$ – фіксовано. Символом $(A^n)^*$ позначимо оператор, спряжений до оператора узагальненого диференціювання A^n. Оскільки A^n: $S_{m_k}^{m_n} \to S_{m_k}^{m_n}$, то $(A^n)^*$: $(S_{m_k}^{m_n})' \to (S_{m_k}^{m_n})'$.

Кожній функції $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$ поставимо у відповідність послідовність її коефіцієнтів Тейлора $b_\varphi = \{b_k(\varphi), k \in \mathbb{Z}_+\} \in C_0$, де C_0 – простір збіжних до нуля послідовностей. При цьому різним функціям із простору $S_{m_k}^{m_n}$ відповідають різні послідовності з C_0. Дійсно, якщо $\{\varphi_1, \varphi_2\} \subset S_{m_k}^{m_n}$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, то існує $k \in \mathbb{Z}_+$ таке, що $b_k(\varphi_1) \neq b_k(\varphi_2)$. Якщо б це було не так, то $\varphi_1^{(k)}(0) = \varphi_2^{(k)}(0)$ для кожного $k \in \mathbb{Z}_+$, тобто

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_2^{(k)}(0)}{k!} x^k = \varphi_2(x), x \in \mathbb{R}.$$

Отже, відображення

$$B: \ S_{m_k}^{m_n} \ni \varphi \to b_\varphi = \{b_k(\varphi), k \in \mathbb{Z}_+\} \in C_0$$

ін'єктивне; B, як оператор, є, зрозуміло, лінійним і таким, що має обернений, оскільки $\operatorname{Ker} B = \{0\}$.

Відображення B співставляє функції $\psi_n := D^n(F,\varphi) \equiv A^n\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$ послідовність

$$b_{\psi_n} = \left\{ b_n \frac{a_0}{a_n}, b_{n+1}\frac{a_1}{a_{n+1}}, b_{n+2}\frac{a_2}{a_{n+2}}, \dots \right\} \in C_0.$$

Розглянемо оператор $\tilde{A}^n$: $C_0 \to C_0$, який ставить у відповідність кожній послідовності $b_\varphi = B\varphi \in C_0$, $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$, послідовність $B\psi_n$, тобто $\tilde{A}^n B\varphi = b_{\psi_n} = BA^n\varphi$, $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$. З останнього співвідношення отримаємо, що

$$(\tilde{A}^n B)^* = (BA^n)^*, \quad (A^n)^* B^* = B^* (\tilde{A}^n)^*.$$

Отже, оператор, спряжений до оператора A^n можна представити у вигляді: $(A^n)^* = B^*(\tilde{A}^n)^*(B^*)^{-1}$, при цьому

$$(\tilde{A}^n)^* : C_0' \to C_0', B^* : C_0' \to (S_{m_k}^{m_n})',$$

$$(B^*)^{-1} : (S_{m_k}^{m_n})' \to C_0',$$

$$(\tilde{A}^n)^*(B^*)^{-1} : (S_{m_k}^{m_n})' \to C_0'.$$

Візьмемо будь-який функціонал $g \in C_0'$. Відомо, що $C_0' \cong l_1$, де l_1 – простір абсолютно сумовних послідовностей $g = \{g_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$. Дія функціоналу $g \in C_0' \cong l_1$ на елемент $b_\varphi = \{b_k(\varphi), k \in \mathbb{Z}_+\} \in C_0$ задається формулою $\langle g, b_\varphi \rangle = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(\varphi)\overline{g_k}$. Отже, для будь-якого $g \in C_0'$ маємо, що

$$\langle g, BA^n\varphi \rangle = \langle g, \tilde{A}^n B\varphi \rangle = \langle (\tilde{A}^n)^* g, B\varphi \rangle = \langle (\tilde{A}^n)^* g, b_\varphi \rangle;$$

$$\langle g, \tilde{A}^n B\varphi \rangle = \langle g, \tilde{A}^n b_\varphi \rangle = \langle g, b_{\psi_n} \rangle = b_n \frac{a_0}{a_n}\overline{g_0} + b_{n+1}\frac{a_1}{a_{n+1}}\overline{g_1} +$$

$$+ b_{n+2}\frac{a_2}{a_{n+2}}\overline{g_2} + \dots = \overline{b_n \frac{\overline{a_0}}{a_n} g_0} + \overline{b_{n+1}\frac{\overline{a_1}}{a_{n+1}} g_1} + \dots \tag{6}$$

Нехай

$$(\tilde{A}^n)^* g := g^* = \{g_0^*, g_1^*, \dots\} \in C_0' \cong l_1;$$

з (6) випливає, що

$$\langle (\tilde{A}^n)^* g, b_\varphi \rangle = b_0 \overline{g_0^*} + \dots + b_{n-1} \overline{g_{n-1}^*} + b_n \overline{g_n^*} +$$

$$+ b_{n+1} \overline{g_{n+1}^*} + \dots = b_n \overline{\frac{\overline{a_0}}{a_n} g_0} + b_{n+1} \overline{\frac{\overline{a_1}}{a_{n+1}} g_1} + \dots$$

Отже,

$$g^* = \left\{ 0, \dots, 0, \frac{\overline{a_0}}{a_n} g_0, \frac{\overline{a_1}}{a_{n+1}} g_1, \dots \right\}. \tag{7}$$

4.

У просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$ розглянемо рівняння

$$\frac{du(t)}{dt} = (A^n)^* u(t), \quad t \in [0, T], 0 < T < +\infty, \tag{8}$$

під розв'язком якого розуміємо абстрактну функцію параметра t зі значеннями у просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$, яка задовольняє це рівняння.

Якщо для рівняння (8) задано умову

$$\mu_1 u|_{t=0} - \mu_2 u|_{t=T} = \psi, \quad \psi \in (S_{m_k}^{m_n})', \tag{9}$$

(μ_1, $\mu_2 > 0$, $\mu_1 \neq \mu_2$ – фіксовані параметри), то під розв'язком двоточкової задачі (8), (9) розуміємо розв'язок рівняння (8), який задовольняє умову (9) у слабкому сенсі, тобто

$$\mu_1 \lim_{t \to +0} \langle u(t), \varphi \rangle - \mu_2 \lim_{t \to T-0} \langle u(t), \varphi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle$$

для будь-якої функції $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$.

Оскільки $(A^n)^* = B^* (\tilde{A}^n)^* (B^*)^{-1}$, то рівняння (8) має вигляд

$$\frac{du(t)}{dt} = B^* (\tilde{A}^n)^* (B^*)^{-1} u(t) \tag{10}$$

Під дією відображення $(B^*)^{-1}$ (10) перейде у рівняння

$$(B^*)^{-1} \frac{du(t)}{dt} = (\tilde{A}^n)^* (B^*)^{-1} u(t), \tag{11}$$

а умова (9) набуде вигляду

$$\mu_1 (B^*)^{-1} u|_{t=0} - \mu_2 (B^*)^{-1} u|_{t=T} = (B^*)^{-1} \psi \in C_0'. \tag{12}$$

Введемо позначення: $(B^*)^{-1}u(t) := g(t) \in C_0'$. Оскільки $C_0' \cong l_1$, то $g(t) = \{g_0(t), g_1(t), \dots\}$. Використавши формулу (7) знайдемо, що

$$(\tilde{A}^n)^*(B^*)^{-1}u(t) = (\tilde{A}^n)^* g(t) := g^*(t) =$$

$$= \Big\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{\overline{a_0}}{a_n} g_0(t), \frac{\overline{a_n}}{a_{n+1}} g_1(t), \dots \Big\}. \tag{13}$$

Функція $g(t)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі C_0', диференційовна по t. Дійсно,

$$\frac{dg(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (B^*)^{-1} \Big[\frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} \Big] =$$

$$= (B^*)^{-1} \Big[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} \Big] = (B^*)^{-1} \frac{du}{dt}$$

(тут ми використали те, що $\dfrac{\Delta u}{\Delta t} \to \dfrac{du}{dt}$ при $\Delta t \to 0$ у просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$ внаслідок диференційовності $u(t)$, $t \in [0, T]$, як абстрактної функції параметра t зі значеннями в просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$). Отже,

$$(B^*)^{-1} \frac{du(t)}{dt} = \frac{d}{dt}((B^*)^{-1}u(t)) = \{g_0'(t), g_1'(t), \dots\}, t \in [0, T]. \tag{14}$$

Із співвідношень (13), (14) та рівняння (11) отримаємо, що

$$g_0'(t) = 0, g_1'(t) = 0, \dots, g_{n-1}'(t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

тобто

$$g_0(t) = c_0, g_1(t) = c_1, \dots, g_{n-1}(t) = c_{n-1}, t \in [0, T],$$

де $c_i = \mathrm{const}$, $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Тоді

$$g_n'(t) = \frac{\overline{a_0}}{a_n} g_0(t) = \frac{\overline{a_0}}{a_n} c_0,$$

$$g_{n+1}'(t) = \frac{\overline{a_n}}{a_{n+1}} g_1(t) = \frac{\overline{a_1}}{a_{n+1}} c_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$g_{2n-1}'(t) = \frac{\overline{a_{n-1}}}{a_{2n-1}} g_{n-1}(t) = \frac{\overline{a_{n-1}}}{a_{2n-1}} c_{n-1}.$$

Звідси знаходимо, що

$$g_n(t) = \frac{\overline{a_0}}{\overline{a_n}} c_0 t + c_n,$$

$$g_{n+1}(t) = \frac{\overline{a_1}}{\overline{a_{n+1}}} c_1 t + c_{n+1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$g_{2n-1}(t) = \frac{\overline{a_{n-1}}}{\overline{a_{2n-1}}} c_{n-1} t + c_{2n-1}.$$

Нехай $(B^*)^{-1}\psi = \{\psi_0, \psi_1, \dots\} \in C_0' \cong l_1$. Враховуючи умову (12), а також неперервність $g(t)$ як абстрактної функції параметра t зі значеннями в просторі C_0', знайдемо, що

$$\mu_1 g(t)|_{t=0} - \mu_2 g(t)|_{t=T} =$$

$$= \mu_1 \lim_{t \to +0} \{g_0(t), g_1(t), \dots\} - \mu_2 \lim_{t \to T-0} \{g_0(t), g_1(t), \dots\} =$$

$$= \mu_1 \{g_0(0), g_1(0), \dots\} - \mu_2 \{g_0(T), g_1(T), \dots\}.$$

Отже,

$$\mu_1 g_i(0) - \mu_2 g_i(T) = \psi_i, i \in \{0, 1, 2, \dots\}. \tag{15}$$

Якщо $l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, то, внаслідок отриманих раніше співвідношень, (15) набуде вигляду $\mu_1 c_l - \mu_2 c_l = \psi_l$, тобто $c_l = \psi_l(\mu_1 - \mu_2)^{-1}$, $l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Якщо $i \in \{n, n+1, \dots, 2n-1\}$, то

$$\mu_1 c_i - \mu_2 \Big(\frac{\overline{a_l}}{\overline{a_i}} c_l T + c_i \Big) = \psi_i,$$

$$l \in \{0, 1, \dots, n-1\}, i \in \{n, n+1, \dots, 2n-1\},$$

або

$$c_i(\mu_1 - \mu_2) = \frac{\overline{a_l} c_l}{\overline{a_i}} \mu_2 T + \psi_i, c_i = \frac{\psi_i}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{\overline{a_l}}{\overline{a_i}} \frac{\mu_2 T \psi_l}{(\mu_1 - \mu_2)^2}.$$

Наприклад,

$$c_n = \frac{\psi_n}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{\overline{a_0}}{\overline{a_n}} \frac{\mu_2 T \psi_0}{(\mu_1 - \mu_2)^2},$$

$$c_{n+1} = \frac{\psi_{n+1}}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{\overline{a_1}}{\overline{a_{n+1}}} \frac{\mu_2 T \psi_1}{(\mu_1 - \mu_2)^2}, \dots$$

Отже,

$$g_n(t) = \frac{\overline{a_0}}{\overline{a_n}} \frac{\psi_0}{\mu_1 - \mu_2} t + \frac{\psi_n}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{\overline{a_0}}{\overline{a_n}} \frac{\mu_2 T \psi_0}{(\mu_1 - \mu_2)^2} =$$

$$= \frac{\overline{a_0}}{\overline{a_n}} \frac{\psi_0}{\mu_1 - \mu_2} \Big[t + \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} T \Big] + \frac{\psi_n}{\mu_1 - \mu_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g_{2n-1}(t) = \frac{\overline{a_{n-1}}}{\overline{a_{2n-1}}} \frac{\psi_{n-1}}{\mu_1 - \mu_2} \Big[t + \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} T \Big] + \frac{\psi_{2n-1}}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Далі знаходимо, що

$$g'_{2n}(t) = \frac{\overline{a_n}}{\overline{a_{2n}}} g_n(t) = \frac{\overline{a_0}}{\overline{a_{2n}}} \frac{\psi_0}{\mu_1 - \mu_2} \Big[t + \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} T \Big] +$$

$$+ \frac{\overline{a_n}}{\overline{a_{2n}}} \frac{\psi_n}{\mu_1 - \mu_2},$$

тобто

$$g_{2n}(t) = \frac{\overline{a_0}}{\overline{a_{2n}}} \frac{\psi_0}{\mu_1 - \mu_2} \Big[\frac{t^2}{2} + \frac{\mu_2 T}{\mu_1 - \mu_2} t \Big] + \frac{\overline{a_n}}{\overline{a_{2n}}} \frac{\psi_n}{\mu_1 - \mu_2} t + c_{2n}.$$

Із врахуванням (15) маємо співвідношення

$$\mu_1 g_{2n}(0) - \mu_2 g_{2n}(T) = \psi_{2n},$$

яке рівносильне співвідношенню

$$\mu_1 c_{2n} - \mu_2 \Big[\frac{\overline{a_0}}{\overline{a_{2n}}} \frac{\psi_0}{\mu_1 - \mu_2} \Big(\frac{T^2}{2} + \frac{\mu_2 T^2}{\mu_1 - \mu_2} \Big) +$$

$$+ \frac{\overline{a_n}}{\overline{a_{2n}}} \frac{\psi_n}{\mu_1 - \mu_2} T + c_{2n} \Big] = \psi_{2n},$$

з якого знаходимо c_{2n}, і, отже, $g_{2n}(t)$. Продовжуючи цей процес, знайдемо всі координати $g_i(t)$, $i \in \mathbb{Z}_+$.

Отже, формальний розв'язок двоточкової задачі (8), (9) має вигляд

$$u(t) = B^* g(t) \equiv B^* \{g_0(t), g_1(t), \dots\} \subset (S_{m_k}^{m_n})'.$$

Оскільки $u(t)$ задовольняє рівняння (8) у слабкому сенсі (у сенсі узагальнених функцій), то з'ясуємо, як діє функціонал $u(t)$ на будь-яку функцію $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$.

Маємо, що

$$\langle u(t), \varphi\rangle = \langle B^* g(t), \varphi\rangle = \langle g(t), B\varphi\rangle,$$

$B\varphi = \{b_k(\varphi), k \in \mathbb{Z}_+\}$, де $b_k(\varphi)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, – коефіцієнти Тейлора функції φ, $g(t) \in C_0' \cong l_1$ при кожному $t \in [0, T]$. Отже,

$$\langle u(t), \varphi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \overline{g_k(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \overline{g_k(t)}, \quad t \in [0, T], \tag{16}$$

$g_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, визначаються за відповідними формулами. Формула (16) задає функціонал $u(t)$ на $S_{m_k}^{m_n}$ при кожному $t \in [0, T]$; $u(t)$ задовольняє рівняння (8) та умову (9), оскільки

$$\mu_1 \lim_{t \to +0} \langle u(t), \varphi\rangle - \mu_2 \lim_{t \to T-0} \langle u(t), \varphi\rangle =$$

$$= \mu_1 \lim_{t \to +0} \langle g(t), B\varphi\rangle - \mu_2 \lim_{t \to T-0} \langle g(t), B\varphi\rangle =$$

$$= \mu_1 \langle g(0), B\varphi\rangle - \mu_2 \langle g(T), B\varphi\rangle = \mu_1 \sum_{k=0}^{\infty} b_k \overline{g_k(0)} - \mu_2 \sum_{k=0}^{\infty} b_k \overline{g_k(T)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k (\mu_1 \overline{g_k(0)} - \mu_2 \overline{g_k(T)}) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \overline{\psi}_k = \langle \psi, \varphi\rangle.$$

Останні співвідношення випливають з того, що умова (9) еквівалентна умові (12), $(B^*)^{-1} u(t) = g(t)$ як абстрактна функція параметра t зі значеннями у просторі C_0', неперервна по $t \in [0, T]$, тому $g(t) \to g(0)$ при $t \to +0$, $g(t) \to g(T)$ при $t \to T - 0$ в C_0'.

Отже, доведено таке твердження.

Теорема 1. *Двоточкова задача* (8), (9) *розв'язна в просторі* $(S_{m_k}^{m_n})'$, *при цьому*

$$\langle u(t), \varphi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} g_k(t), t \in [0, T], \varphi \in S_{m_k}^{m_n},$$

$g(t) = \{g_0(t), g_1(t), \dots\} \in l_1 \cong C_0'$ *при кожному* $t \in [0, T]$.

Зауваження 1. Якщо $u(t)$ при кожному $t \in [0,t]$ – регулярна узагальнена функція з простору $(S^{m_n}_{m_k})'$, то

$$\langle u(t), \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} u(t)\varphi(t)dt, \quad \forall \varphi \in S^{m_n}_{m_k}.$$

Очевидно, що формула (16) є більш придатною для застосувань.

Зауваження 2. Якщо $\mu_2 = 0$, $\mu_1 = 1$, то умова (9) вироджується у початкову умову для рівняння (8). Отже, у цьому випадку (8), (9) – задача Коші.

Як приклад, розглянемо задачу (8), (9) з граничним елементом $\psi = \delta \in (S^{m_n}_{m_k})'$, де δ – дельта-функція Дірака. Оскільки $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$, то для будь-якої функції $\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k \in S^{m_n}_{m_k}$ маємо $\varphi(0) = b_0$. Звідси та з формули

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \overline{\psi}_k = \langle \delta, \varphi \rangle = \langle (B^*)^{-1}\delta, B\varphi \rangle = \varphi(0) = b_0$$

знаходимо елемент $(B^*)^{-1}\delta \in C_0' \cong l_1$: $(B^*)^{-1}\delta = \{1, 0, 0, \dots\}$. Враховуючи співвідношення, які визначають $g(t) = (B^*)^{-1}u(t) = \{g_0(t), g_1(t), \dots\} \in C_0' \cong l_1$, знайдемо, що

$$g(t) = \Bigg\{ \underbrace{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}, 0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{\overline{a_0}}{\overline{a_n}(\mu_1 - \mu_2)}\Big(t + \frac{\mu_2 T}{\mu_1 - \mu_2}\Big), 0, \dots, 0,$$

$$\frac{\overline{a_0}}{\overline{a_{2n}}} \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\Big(\frac{t^2}{2} + \frac{\mu_2 T t}{\mu_1 - \mu_2}\Big) + \frac{\overline{a_0}}{\overline{a_{2n}}} \frac{\mu_2 T^2}{(\mu_1 - \mu_2)^2}\Big(\frac{1}{2} + \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\Big), 0, \dots \Bigg\}.$$

Відмітимо, що у випадку задачі Коші ($\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$)

$$g(t) = \Big\{1, 0, \dots, 0, \frac{\overline{a_0}}{\overline{a_n}} t, 0, \dots, 0, \frac{\overline{a_0}}{2\overline{a_{2n}}} t^2, \dots \Big\}.$$

Тоді для будь-якої функції $\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k \in S^{m_n}_{m_k}$

$$\langle u(t), \varphi \rangle = \frac{b_0}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{\overline{a_0} b_n}{\overline{a_n}(\mu_1 - \mu_2)}\Big(t + \frac{\mu_2 T}{\mu_1 - \mu_2}\Big) + \dots$$

Для того, щоб безпосередньо переконатися в тому, що $u(t)$ – розв'язок рівняння (8), доведемо, що $u(t)$ задовольняє співвідношення $(B^*)^{-1}\dfrac{du}{dt} = (\tilde{A}^n)^*(B^*)^{-1}u(t)$ при кожному $t \in [0,T]$. Оскільки

$$(B^*)^{-1}\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}((B^*)^{-1}u(t)) = g'(t) = \{g_0'(t), g_1'(t), \dots\} \in l_1,$$

то

$$g'(t) = \Big\{\underbrace{0,\dots,0}_{n-1}, \frac{\overline{a_0}}{\overline{a_n}(\mu_1-\mu_2)}, 0,\dots,0,$$
$$\frac{\overline{a_0}}{\overline{a_{2n}}(\mu_1-\mu_2)}\Big(t+\frac{\mu_2 T}{\mu_1-\mu_2}\Big), 0,\dots\Big\}.$$

З іншого боку,

$$(\tilde{A}^n)^*(B^*)^{-1}u(t) = (\tilde{A}^n)^*g(t) \equiv g^*(t) =$$
$$= \Big\{\underbrace{0,\dots,0}_{n-1}, \frac{\overline{a_0}}{\overline{a_n}}g_0(t), \frac{\overline{a_1}}{\overline{a_{n+1}}}g_1(t), \dots\Big\} \in l_1.$$

З'ясуємо, чи виконується рівність $g'(t) = g^*(t)$, $t \in [0,T]$. Очевидно, що перші $n-1$ координат вказаних елементів співпадають. Оскільки $g_0(t) = (\mu_1-\mu_2)^{-1}$, то

$$g_n^*(t) = \frac{\overline{a_0}}{\overline{a_n}}g_0(t) = \frac{\overline{a_0}}{\overline{a_n}}\frac{1}{\mu_1-\mu_2} = g_n'(t), t \in [0,T].$$

Аналогічно,

$$g_{n+1}^*(t) = \frac{\overline{a_1}}{\overline{a_{n+1}}}g_1(t) = 0 = g_{n+1}'(t), t \in [0,1]$$

й т.д. Наприклад,

$$g_{2n}'(t) = \frac{\overline{a_0}}{\overline{a_n}}\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\Big(t+\frac{\mu_2 T}{\mu_1-\mu_2}\Big),$$

$$g_{2n}^*(t) = \frac{\overline{a_n}}{\overline{a_{2n}}}g_n(t) = \frac{\overline{a_n}}{\overline{a_{2n}}}\frac{\overline{a_0}}{\overline{a_n}}\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\Big(t+\frac{\mu_2 T}{\mu_1-\mu_2}\Big) = g_{2n}'(t).$$

Продовжуючи цей процес, знайдемо, що $g_n'(t) = g_n^*(t)$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, тобто $g'(t) = g^*(t)$ у кожній точці $t \in [0,T]$, що й треба було довести. Абстрактна функція $u(t)$ задовольняє також умову (9). Для перевірки цього досить встановити, що координати елемента $g(t) = (B^*)^{-1}u(t)$, $t \in [0,T]$, задовольняють співвідношення (15). При $i = 0$ маємо:

$$\mu_1 g_0(0) - \mu_2 g_0(T) = \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} = 1 = \psi_0.$$

Якщо $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, то

$$\mu_1 g_i(0) - \mu_2 g_i(T) = 0 = \psi_i.$$

Візьмемо n-у координату $g(t)$:

$$\mu_1 g_n(0) - \mu_2 g_n(T) = \mu_1 \frac{\overline{a_0}\mu_2 T}{\overline{a_n}(\mu_1 - \mu_2)^2} -$$

$$-\mu_2 \frac{\overline{a_0}}{\overline{a_n}(\mu_1 - \mu_2)}\Big(T + \frac{\mu_2 T}{\mu_1 - \mu_2}\Big) =$$

$$= \frac{\overline{a_0}\mu_1\mu_2 T}{\overline{a_n}(\mu_1 - \mu_2)^2} - \frac{\overline{a_0}\mu_2^2 T}{\overline{a_n}(\mu_1 - \mu_2)^2} - \frac{\overline{a_0}\mu_2 T}{\overline{a_n}(\mu_1 - \mu_2)} =$$

$$= \frac{\overline{a_0}\mu_2 T(\mu_1 - \mu_2)}{\overline{a_n}(\mu_1 - \mu_2)^2} - \frac{\overline{a_0}\mu_2 T}{\overline{a_n}(\mu_1 - \mu_2)} = 0 = \psi_n$$

й т.д. Звідси випливає співвідношення

$$\mu_1 \lim_{t\to+0} u(t) - \mu_2 \lim_{t\to T-0} u(t) = \psi,$$

яке виконується у просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$.

Література

[1] *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

[2] *Готинчан Т. І., Атаманюк Р. М.* Різні форми означення просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького університету. – 2001. – № 111. – С. 21–26.

[3] *Гуревич Б. Л.* Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем // Докл. АН СССР. – 1954. – **99**, № 6. – С. 893–896.

[4] *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.

[5] *Городецкий В. В., Мартынюк О. В.* Операторы обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева в пространствах типа S // Сиб. мат. журн. – 2013. – **54**, № 3. – С. 569–584.

[6] *Городецький В. В., Мартинюк О. В.* Задача Коші та двоточкова задача для еволюційних рівнянь із операторами узагальненого диференціювання // Доповіді НАН України. – 2013. – № 3. – С. 7–13.

[7] *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.

[8] *Леонтьев А. Ф.* Обобщения рядов экспонент. – М.: Наука, 1981. – 320 с.

[9] *Мартинюк О. В.* Двоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з операторами узагальненого диференціювання // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 55–67.