Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, том 11, № 2, 100–125

УДК 517.956.222

Т. Н. Зинченко

(Институт математики НАН Украины, Киев)

Эллиптические системы в расширенной соболевской шкале на замкнутом многообразии

djanta@ukr.net

Douglis–Nirenberg elliptic systems of differential equations given on a closed smooth manifold are investigated on the extended Sobolev scale. This scale consists of all Hilbert spaces that are interpolation spaces with respect to the Hilbert Sobolev scale. We prove that the operator corresponding to such a system is Fredholm on the extended Sobolev scale and generates isomorphisms between subspaces. An a priory estimate for the solutions of the system is obtained, and their regularity is studied.

Эллиптические по Дуглису–Ниренбергу системы дифференциальных уравнений, заданные на замкнутом гладком многообразии, исследованы в расширенной соболевской шкале. Она состоит из всех гильбертовых пространств, интерполяционных относительно гильбертовой соболевской шкалы. Доказано, что оператор, соответствующий такой системе, является нетеровым на расширенной соболевской шкале и порождает изоморфизмы между подпространствами. Получена априорная оценка решений системы и изучена их локальная регулярность.

1. Введение

Пространства Соболева играют фундаментальную роль в теории эллиптических дифференциальных уравнений. Линейные эллиптические операторы обладают рядом характерных свойств в шкалах соболевских пространств: нетеровость (т. е. конечность индекса оператора), априорные оценки решений, локальное повышение регулярности решений. Эти свойства имеют важные применения, причем наиболее содержательные результаты получаются в случае гильбертовой шкалы (см., например, монографии [1–4], обзоры [5, 6] и приведенную там литературу).

В этой связи несомненный интерес представляют гильбертовы функциональные пространства, интерполяционные относительно гильбертовой соболевской шкалы. Поскольку при интерполяции наследуется ограниченность линейных операторов, а также их нетеровость (при неизменном дефекте), то шкалы этих пространств служат эффективным инструментом для исследования эллиптических операторов.

Так, в недавних работах В. А. Михайлеца и А. А. Мурача была построена теория разрешимости общих эллиптических уравнений (скалярных и матричных) и эллиптических краевых задач в гильбертовых изотропных пространствах Хермандера [7, п. 2.2], образующих уточненную соболевскую шкалу (см. монографии [8, 9], обзор [10] и приведенные там ссылки). Показателем регулярности распределений, образующих эти пространства, служит не числовой (как у соболевских пространств), а функциональный параметр, правильно меняющийся на $+\infty$ по Й. Карамата. В основе этой теории лежит метод интерполяции с функциональным параметром пар гильбертовых и, в частности, соболевских пространств. Он позволил во всей полноте перенести классическую „соболевскую" теорию эллиптических уравнений на указанные пространства Хермандера.

Используя этот метод, можно распространить ряд теорем о характере разрешимости эллиптических уравнений и эллиптических краевых задач на класс *всех* гильбертовых пространств, интерполяционных относительно пар гильбертовых пространств Соболева. Этот важный класс был конструктивно описан и изучен в [11, 12, 13] и назван расширенной соболевской шкалой (см. также [8, 9, п. 2.4]). При этом были использованы фундаментальные теоремы Ж. Питре [14, 15] и В. И. Овчинникова [16, п. 11.4] теории интерполяции пространств. Указанная шкала образована гильбертовыми изотропными пространствами Хермандера, для которых показателем регулярности распределений служит произвольный функциональный параметр, RO-меняющийся на $+\infty$ по В. Г. Авакумовичу. Она содержит в себе уточненную соболевскую шкалу.

В настоящей работе исследованы эллиптические по А. Дуглису–

Л. Ниренбергу [17] системы линейных дифференциальных уравнений в расширенной соболевской шкале на замкнутом гладком многообразии. Они образуют очень широкий класс: он содержит в себе однородные по порядку эллиптические системы и более общие системы, эллиптические по И. Г. Петровскому, а также иные важные эллиптические системы, встречающиеся в гидродинамике, теории упругости, акустике. Так, линеаризированная система уравнений Навье-Стокса является примером таких систем.

Цель настоящей работы — доказать теоремы о характере разрешимости эллиптических по Дуглису-Ниренбергу систем в расширенной соболевской шкале и исследовать локальную регулярность их решений в пространствах Хермандера, образующих эту шкалу. В частности, будет установлено, что матричный дифференциальный оператор, соответствующий такой системе, является нетеровым в подходящих парах этих пространств и порождает изоморфизмы между их подпространствами конечной коразмерности.

Результаты этой работы анонсированы в [18]. В статьях [19–24] исследованы иные важные классы эллиптических систем в расширенной соболевской шкале: эллиптические по Петровскому системы, равномерно эллиптические системы, системы с периодическими коэффициентами на прямой, эллиптические уравнения и системы с параметром. В этой шкале изучены также эллиптические краевые задачи для скалярного эллиптического уравнения [25, 26].

Отметим, что в последнее время пространства Хермандера и их различные аналоги, именуемые пространствами обобщенной гладкости, вызывают значительный интерес с точки зрения применений [27–30].

Статья состоит из семи пунктов. Пункт 1 является вступлением. В п. 2 приведено определение эллиптической по Дуглису-Ниренбергу системы дифференциальных уравнений, заданной на бесконечно гладком замкнутом многообразии Γ. В п. 3 дано определение гильбертовых пространств Хермандера, которые образуют расширенные соболевские шкалы на $\mathbb{R}^n$ и на Γ. Там же дано определение RO-меняющихся функций на $+\infty$ по В. Г. Авакумовичу, приведены их важные свойства и характерные примеры. В п. 4 сформулированы основные результаты статьи о свойствах эллиптических по Дуглису-Ниренбергу систем в расширенной соболевской шкале. Пункт 5 содержит необходимые для доказательств свойства расширенной соболевской шкалы, в частности, интерполяционные свойства. Там же приведено определение интерполяции с функциональным параметром пар гильбертовых пространств и сформулированы важные ее свойства. В п. 6 доказаны основные результаты статьи. В заключительном п. 7 сделаны выводы к работе.

2. Эллиптические системы

Пусть Γ — бесконечно гладкое замкнутое (т. е. компактное и без края) многообразие размерности $n \geq 1$. Предполагается, что на Γ задана некоторая C^∞-плотность dx.

В работе комплексные линейные топологические пространства $C^\infty(\Gamma)$ основных функций и $\mathcal{D}'(\Gamma)$ обобщенных функций (распределений) на Γ рассматриваются как взаимно антидвойственные относительно расширения по непрерывности скалярного произведения в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma, dx)$. Это расширение обозначаем через $(h, \omega)_\Gamma$, где $h \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ и $\omega \in C^\infty(\Gamma)$. Вообще, в работе функции и распределения предполагаются комплекснозначными, причем последние трактуются как антилинейные функционалы.

На многообразии Γ рассматривается система p линейных дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^{p} A_{j,k} u_k = f_j, \quad j = 1, \ldots, p. \tag{1}$$

Здесь $A_{j,k}$, где $j, k = 1, \ldots, p$, — скалярные линейные дифференциальные операторы на Γ с коэффициентами класса $C^\infty(\Gamma)$. Соотношения (1) понимаются как равенства распределений на Γ.

Запишем систему уравнений (1) в матричной форме: $Au = f$, где $A := (A_{j,k})_{j,k=1}^{p}$ — матричный дифференциальный оператор, а

$$u := \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_p) \quad \text{и} \quad f := \mathrm{col}(f_1, \ldots, f_p)$$

— функциональные столбцы, принадлежащие $(\mathcal{D}'(\Gamma))^p$.

Предполагается, что система (1) эллиптическая на Γ по Дуглису–Ниренбергу [5, с. 51], т. е. существуют целые числа $l_1, \ldots, l_p$ и $m_1, \ldots, m_p$ такие, что:

i) $\mathrm{ord} A_{j,k} \leq l_j + m_k$ для всех $j, k \in \{1, \ldots, p\}$ (если $l_j + m_k < 0$, то $A_{j,k} \equiv 0$);

ii) для каждой точки $x \in \Gamma$ и произвольного ковектора $\xi \in T^*_x\Gamma \setminus \{0\}$ выполняется условие

$$\det\bigl(a^{(0)}_{j,k}(x,\xi)\bigr)^{p}_{j,k=1} \neq 0.$$

Здесь $a^{(0)}_{j,k}(x,\xi)$ — главный символ дифференциального оператора $A_{j,k}$ в случае $\mathrm{ord} A_{j,k} = l_j + m_k$, либо $a^{(0)}_{j,k}(x,\xi) \equiv 0$ в противном случае. (Как обычно, $T^*_x\Gamma$ обозначает кокасательное пространство к многообразию Γ в точке x).

Отметим, что числа l_j и m_k, где $j,k \in \{1,\dots,p\}$, можно выбрать так, чтобы все $l_j \leq 0$ (даже $\max\{l_1,\dots,l_p\} = 0$) и все $m_k \geq 0$. Если все $l_j = 0$, то система (1) называется эллиптической по Петровскому.

3. RO-меняющиеся функции и расширенная соболевская шкала

В работе эллиптическая система (1) будет исследована в функциональных пространствах $H^{\varphi}(\Gamma)$, для которых показателем регулярности служит произвольный функциональный параметр $\varphi \in \mathrm{RO}$. Здесь и далее RO — множество всех измеримых по Борелю функций $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$, для которых существуют числа $\alpha > 1$ и $c \geq 1$ такие, что

$$c^{-1} \leq \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leq c \quad \text{для всех} \quad t \geq 1, \;\; \lambda \in [1,\alpha] \tag{2}$$

(постоянные α и c могут зависеть от φ). Такие функции называют RO (или OR)-меняющимися на бесконечности.

Класс RO-меняющихся функций введен В. Г. Авакумовичем [31] в 1936 г. и достаточно полно изучен (см. [32, приложение 1] и [33, п. 2.0–2.2]). Этот класс допускает простое и конструктивное описание:

$$\varphi \in \mathrm{RO} \;\Leftrightarrow\; \varphi(t) = \exp\left(\beta(t) + \int\limits_{1}^{t} \frac{\gamma(\tau)}{\tau}\, d\tau\right) \quad \text{при} \quad t \geq 1,$$

где вещественные функции β и γ измеримы по Борелю и ограничены на полуоси $[1,\infty)$.

Отметим, что условие (2) равносильно следующему: существуют числа $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leq s_1$, и $c_0, c_1 > 0$ такие, что

$$c_0 \lambda^{s_0} \leq \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leq c_1 \lambda^{s_1} \quad \text{для всех} \quad t \geq 1, \;\; \lambda \geq 1. \tag{3}$$

Для произвольной функции $\varphi \in \mathrm{RO}$ определены нижний и верхний индексы Матушевской [34]

$$\sigma_0(\varphi) := \sup\{s_0 \in \mathbb{R} : \text{верно левое неравенство в (3)}\},$$
$$\sigma_1(\varphi) := \inf\{s_1 \in \mathbb{R} : \text{верно правое неравенство в (3)}\}.$$

Здесь $-\infty < \sigma_0(\varphi) \leq \sigma_1(\varphi) < \infty$. В важном случае, когда $\sigma_0(\varphi) = \sigma_1(\varphi) =: \sigma$, число σ называют порядком изменения функции $\varphi \in \mathrm{RO}$ на бесконечности.

Приведем некоторые характерные примеры RO-меняющихся функций. Ограничимся непрерывными функциями $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$.

Пример 1. К классу RO принадлежит любая функция вида

$$\varphi(t) := t^s (\log t)^{r_1} (\log\log t)^{r_2} \ldots (\underbrace{\log \ldots \log}_{k \text{ раз}} t)^{r_k}, \quad t \gg 1,$$

где $s, r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$. Для нее $\sigma_0(\varphi) = \sigma_1(\varphi) = s$.

Вообще, к классу RO принадлежит любая функция φ, которая правильно меняется на бесконечности по Й. Карамата [35], т. е. удовлетворяет условию

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\varphi(\lambda\, t)}{\varphi(t)} = \lambda^s \quad \text{для всех} \quad \lambda > 0$$

Здесь число $s \in \mathbb{R}$ суть порядок изменения функции φ на бесконечности. Это следует из интегрального описания правильно меняющихся функций (см., например, [32, с. 10]).

Пример 2. К классу RO принадлежит функция

$$\varphi(t) := t^{s + p \sin(\log\log t)^r}, \quad t \gg 1,$$

где $s \in \mathbb{R}$, $p > 0$ и $0 < r \leq 1$. Она не имеет (числового) порядка изменения на бесконечности, поскольку $\sigma_0(\varphi) = s - p$ и $\sigma_1(\varphi) = s + p$.

Используя класс параметров RO, определим необходимые в работе функциональные пространства сначала на $\mathbb{R}^n$, а затем на многообразии Γ; при этом следуем [8, 9, п. 2.4.2].

Пусть $\varphi \in \mathrm{RO}$. Линейное пространство $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех медленно растущих распределений w в $\mathbb{R}^n$ таких, что их преобразование Фурье $\widehat{w}$ локально суммируемо по Лебегу в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\,|\widehat{w}(\xi)|^2\,d\xi < \infty.$$

Здесь $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$ — сглаженный модуль вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$. В пространстве $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ определено скалярное произведение распределений w_1 и w_2 по формуле

$$(w_1, w_2)_{H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\,\widehat{w_1}(\xi)\,\overline{\widehat{w_2}(\xi)}\,d\xi.$$

Оно задает на $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ структуру гильбертова пространства.

Пространство $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ — гильбертов изотропный случай пространств $\mathcal{B}_{p,k}$, введенных и систематически исследованных Л. Хермандером [7, п. 2.2]. Именно, $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_{p,k}$, если $p = 2$ и $k(\xi) = \varphi(\langle\xi\rangle)$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$. Отметим, что в гильбертовом случае $p = 2$ пространства Хермандера совпадают с пространствами, независимо введенными и изученными Л. Р. Волевичем и Б. П. Панеяхом [36, § 2].

Определим теперь пространства на многообразии Γ. Произвольно выберем конечный атлас из C^{∞}-структуры на Γ, образованный локальными картами $\alpha_j : \mathbb{R}^n \leftrightarrow U_j$, где $j = 1, \ldots, r$. Здесь открытые множества U_j составляют покрытие многообразия Γ. Пусть функции $\chi_j \in C^{\infty}(\Gamma)$, где $j = 1, \ldots, r$, образуют разбиение единицы на Γ, удовлетворяющее условию $\operatorname{supp}\chi_j \subset U_j$.

Линейное пространство $H^{\varphi}(\Gamma)$ состоит из всех распределений $h \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, что $(\chi_j\, h) \circ \alpha_j \in H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ для каждого $j = 1, \ldots, r$. Здесь $(\chi_j\, h) \circ \alpha_j$ — представление распределения $\chi_j\, h$ в локальной карте α_j. В пространстве $H^{\varphi}(\Gamma)$ определено скалярное произведение распределений h_1 и h_2 по формуле

$$(h_1, h_2)_{\varphi} := \sum_{j=1}^{r} ((\chi_j\, h_1) \circ \alpha_j, (\chi_j\, h_2) \circ \alpha_j)_{H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)}.$$

Оно задает на $H^{\varphi}(\Gamma)$ структуру гильбертова пространства и определяет норму $\|h\|_{\varphi} := (h,h)_{\varphi}^{1/2}$.

Важно, что пространство $H^{\varphi}(\Gamma)$ с точностью до эквивалентности норм не зависит от выбора атласа и разбиения единицы [8, с. 139] (теорема 2.21). Это пространство сепарабельно; для него выполняются непрерывные и плотные вложения $C^{\infty}(\Gamma) \hookrightarrow H^{\varphi}(\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Gamma)$.

Если $\varphi(t) \equiv t^{s}$ при некотором $s \in \mathbb{R}$, то $H^{\varphi}(\mathbb{R}^{n}) =: H^{(s)}(\mathbb{R}^{n})$ и $H^{\varphi}(\Gamma) =: H^{(s)}(\Gamma)$ есть (гильбертовы) пространства Соболева порядка s, заданные на $\mathbb{R}^{n}$ и Γ соответственно.

Класс пространств

$$\left\{ H^{\varphi}(\mathbb{R}^{n} \text{ или } \Gamma) : \varphi \in \mathrm{RO} \right\}$$

называют расширенной соболевской шкалой на $\mathbb{R}^{n}$ или Γ соответственно (см. [9, п. 2.4.2] и [13]). Необходимые в работе свойства расширенной соболевской шкалы на многообразии Γ будут приведены ниже в п. 5.

4. Основные результаты

Сформулируем основные результаты статьи о свойствах эллиптической по Дуглису-Ниренбергу системы (1) в расширенной соболевской шкале.

Обозначим через A^{+} матричный дифференциальный оператор, формально сопряженный к A относительно полуторалинейной формы $(\cdot,\cdot)_{\Gamma}$. Он, напомним, определяется условием $(Au,v)_{\Gamma} = (u, A^{+}v)_{\Gamma}$ для любых $u, v \in (C^{\infty}(\Gamma))^{p}$. Здесь и далее полагаем

$$(f,v)_{\Gamma} = (f_{1},v_{1})_{\Gamma} + \ldots + (f_{p},v_{p})_{\Gamma}$$

для вектор-функций $f := (f_{1},\ldots,f_{p})$ и $v := (v_{1},\ldots,v_{p})$. Отметим, что A^{+} — матрица, транспонированная к матрице $(A^{+}_{j,k})_{j,k=1}^{p}$, где $A^{+}_{j,k}$ — скалярный дифференциальный оператор, формально сопряженный к оператору $A^{+}_{j,k}$. Поэтому эллиптичность (по Дуглису–Ниренбергу) системы $Au = f$ эквивалентна эллиптичности формально сопряженной системы $A^{+}v = g$.

Положим

$$N := \left\{ u \in (C^{\infty}(\Gamma))^{p} : \; Au = 0 \;\text{ на }\; \Gamma \right\},$$
$$N^{+} := \left\{ v \in (C^{\infty}(\Gamma))^{p} : \; A^{+}v = 0 \;\text{ на }\; \Gamma \right\}.$$

Поскольку обе системы $Au = f$ и $A^{+}v = g$ эллиптичны на Γ, то пространства N и N^{+} конечномерны [5, теорема 3.2.1].

Теорема 1. *Матричный дифференциальный оператор A является ограниченным и нетеровым в паре гильбертовых пространств*

$$A : \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma) \to \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma) \quad \text{для каждого} \quad \varphi \in \mathrm{RO}. \tag{4}$$

Ядро оператора (4) *равно N, а область значений совпадает с пространством*

$$\Big\{ f \in \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma) : \ (f, v)_{\Gamma} = 0 \ \text{для любого} \ v \in N^{+} \Big\}. \tag{5}$$

Индекс этого оператора равен $\dim N - \dim N^{+}$ *и не зависит от φ.*

Здесь и далее полагаем $\rho(t) := t$ при $t \geq 1$ (это делаем для того, чтобы не указывать аргумент t в верхних индексах, фигурирующих в обозначениях пространств). Заметим, что поскольку $\varphi\rho^{m_k}, \varphi\rho^{-l_j} \in \mathrm{RO}$, то определены пространства, записанные в (4).

Напомним, что линейный ограниченный оператор $T : E_1 \to E_2$, где E_1 и E_2 — банаховы пространства, называется нетеровым, если его ядро $\ker T$ и коядро $\operatorname{coker} T := E_2/T(X)$ конечномерны. Если оператор T нетеров, то его область значений $T(X)$ замкнута в E_2 (см., например, [4, лемма 19.1.1]). Индексом нетерового оператора T называется число $\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \dim\operatorname{coker} T$.

Замечание 1. Пусть $\varphi \in \mathrm{RO}$. Пространства $H^{\varphi}(\Gamma)$ и $H^{1/\varphi}(\Gamma)$ взаимно двойственны (с точностью до эквивалентности норм) относительно полуторалинейной формы $(\cdot,\cdot)_{\Gamma}$ (сравнить с [8, теорема 2.3]). (Заметим здесь, что $\varphi \in \mathrm{RO} \Leftrightarrow 1/\varphi \in \mathrm{RO}$.) Отсюда следует, что ограниченные операторы

$$A^{+} : \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{l_j}}(\Gamma) \to \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-m_k}}(\Gamma), \tag{6}$$

$$A : \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi^{-1}\rho^{m_k}}(\Gamma) \to \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi^{-1}\rho^{-l_j}}(\Gamma)$$

взаимно сопряжены относительно формы $(\cdot,\cdot)_\Gamma$. В силу теоремы 1 оператор (6) нетеров. Его ядро равно N^+, область значений совпадает с подпространством

$$\left\{g\in\bigoplus_{k=1}^{p}H^{\varphi\rho^{-m_k}}(\Gamma):\ (g,u)_\Gamma=0\ \text{для всех}\ u\in N\right\},$$

а индекс равен $\dim N^+-\dim N$ и не зависит от φ.

В случае, когда $N=\{0\}$ и $N^+=\{0\}$, оператор (4) является изоморфизмом. В общей ситуации изоморфизм удобно задавать с помощью следующих проекторов.

Пусть $\varphi\in\mathrm{RO}$. Разложим пространства, в которых действует нетеров оператор (4), в прямые суммы (замкнутых) подпространств:

$$\bigoplus_{k=1}^{p}H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma)=$$
$$=N\dotplus\left\{u\in\bigoplus_{k=1}^{p}H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma):\ (u,w)_\Gamma=0\ \text{для всех}\ w\in N\right\},$$

$$\bigoplus_{j=1}^{p}H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma)=$$
$$=N^+\dotplus\left\{f\in\bigoplus_{j=1}^{p}H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma):\ (f,v)_\Gamma=0\ \text{для всех}\ v\in N^+\right\}.$$

Обозначим через P и P^+ соответственно проекторы пространств

$$\bigoplus_{k=1}^{p}H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma)\quad\text{и}\quad\bigoplus_{j=1}^{p}H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma)$$

на вторые слагаемые в указанных суммах параллельно первым слагаемым. Эти проекторы (как отображения) не зависят от φ.

Теорема 2. *Сужение оператора* (4) *на подпространство*

$$P\left(\bigoplus_{k=1}^{p}H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma)\right)$$

является изоморфизмом

$$A:\, P\Big(\bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma)\Big) \leftrightarrow P^{+}\Big(\bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma)\Big) \tag{7}$$

для каждого $\varphi \in \mathrm{RO}$.

Замечание 2. Учитывая замечание 1, делаем вывод на основании теоремы 2, что нетеров оператор (6) порождает изоморфизм

$$A^{+}:\, P^{+}\Big(\bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{l_j}}(\Gamma)\Big) \to P\Big(\bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-m_k}}(\Gamma)\Big)$$

для любого $\varphi \in \mathrm{RO}$.

Для решения эллиптического уравнения $Au = f$ выполняется следующая априорная оценка в расширенной соболевской шкале.

Теорема 3. *Пусть произвольно заданы параметры: функциональный* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *и числовой* $\sigma > 0$. *Тогда существует число* $c = c(\varphi, \sigma) > 0$ *такое, что для любых вектор-функций*

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma), \quad f \in \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma), \tag{8}$$

удовлетворяющих уравнению $Au = f$ *на* Γ, *справедлива априорная оценка*

$$\begin{gathered}\Big(\sum_{k=1}^{p} \|u_k\|^2_{\varphi\rho^{m_k}}\Big)^{1/2} \leq \\ \leq c\Big(\sum_{j=1}^{p} \|f_j\|^2_{\varphi\rho^{-l_j}}\Big)^{1/2} + c\Big(\sum_{k=1}^{p} \|u_k\|^2_{\varphi\rho^{m_k-\sigma}}\Big)^{1/2}.\end{gathered} \tag{9}$$

Замечание 3. Отметим что, поскольку $\sigma > 0$, то норма

$$\Big(\sum_{k=1}^{p} \|u_k\|^2_{\varphi\rho^{m_k-\sigma}}\Big)^{1/2}$$

мажорируется нормой

$$\left(\sum_{k=1}^{p}\|u_k\|^2_{\varphi\rho^{m_k}}\right)^{1/2}.$$

Более того, для соответствующих этим нормам гильбертовых пространст выполняется компактное вложение

$$\bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma) \hookrightarrow \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k-\sigma}}(\Gamma).$$

Если $N=\{0\}$, то в правой части оценки (9) отсутствует член

$$c\left(\sum_{k=1}^{p}\|u_k\|^2_{\varphi\rho^{m_k-\sigma}}\right)^{1/2}.$$

Исследуем локальную регулярность решения эллиптической системы $Au=f$. Пусть V — произвольное открытое непустое подмножество многообразия Γ. Обозначим

$$H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(V) := \bigl\{h \in \mathcal{D}'(\Gamma):$$
$$\chi h \in H^{\varphi}(\Gamma) \text{ для всех } \chi \in C^{\infty}(\Gamma) \text{ таких, что } \operatorname{supp}\chi \subset V\bigr\}.$$

Топология в линейном пространстве $H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(V)$ задается с помощью полунорм $h \mapsto \|\chi h\|_{\varphi}$, где χ — такое как в определении этого пространства. Если $V=\Gamma$, то $H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(V)=H^{\varphi}(\Gamma)$.

Теорема 4. *Пусть $\varphi \in \mathrm{RO}$. Предположим, что вектор-функция $u \in (\mathcal{D}'(\Gamma))^p$ является решением уравнения $Au=f$ на V, где*

$$f \in \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}_{\mathrm{loc}}(V). \tag{10}$$

Тогда

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}_{\mathrm{loc}}(V). \tag{11}$$

В качестве применения этой теоремы приведем следующее достаточное условие непрерывности компонент решения u и их обобщенных производных.

Теорема 5. *Пусть произвольно заданы целые числа $k \in \{1, \dots, p\}$, $\lambda \geq 0$ и функциональный параметр $\varphi \in \mathrm{RO}$ такой, что*

$$\int_{1}^{\infty} t^{2\lambda+n-1-2m_k}\, \varphi^{-2}(t)\, dt < \infty. \tag{12}$$

Предположим, что вектор-функция $u \in (\mathcal{D}'(\Gamma))^p$ является решением уравнения $Au = f$ на открытом множестве $V \subseteq \Gamma$, где f удовлетворяет условию (10). Тогда компонента u_k решения имеет на множестве V непрерывные производные до порядка λ включительно, т. е. $u_k \in C^{\lambda}(V)$.

Отметим, что условие (12) не только достаточное в теореме 5, но и необходимое на классе всех рассматриваемых решений u.

В случае, когда все числа $l_j = 0$, т. е. когда система $Au = f$ эллиптична по Петровскому на Γ, из теоремы 5 (при $\lambda = m_k$) следует достаточное условие классичности решения u.

Следствие 1. *Пусть вектор-функция $u \in (\mathcal{D}'(\Gamma))^p$ является решением уравнения $Au = f$ на открытом множестве $V \subseteq \Gamma$, где $f \in (H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(V))^p$, а функциональный параметр $\varphi \in \mathrm{RO}$ удовлетворяет условие*

$$\int_{1}^{\infty} t^{n-1}\, \varphi^{-2}(t)\, dt < \infty.$$

Тогда

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} C^{m_k}(V), \tag{13}$$

то есть решение u является классическим на V.

Отметим, что, если выполняется вложение (13), то функция $f = Au$ вычисляется (в локальных координатах) на V с помощью классических производных, поскольку на каждую компоненту $u_k \in C^{m_k}(V)$ действуют дифференциальные операторы $A_{j,k}$ порядка $\leq m_k$.

Приведенные в этом пункте результаты хорошо известны в соболевском случае, когда $\varphi(t) \equiv t^s$ и $s \in \mathbb{R}$ (см., например, обзор [5, п. 3.2] и приведенную там литературу). В статье [37] эти результаты доказаны в важном случае, когда $\varphi(t) \equiv t^s \varphi_0(t)$, где число $s \in \mathbb{R}$, а функция φ_0 медленно меняется по Карамата на бесконечности. (Соответствующие пространства $H^{\varphi}(\Gamma) =: H^{s,\varphi_0}(\Gamma)$ образуют уточненную соболевскую шкалу на Γ).

5. Вспомогательные факты и результаты

В этом пункте будут сформулированы свойства расширенной соболевской шкалы на многообразии Γ, необходимые для доказательства основных результатов. Приведем сначала свойства, связанные с вложениями пространств.

Пусть $\varphi, \varphi_1 \in \mathrm{RO}$. Функция $\varphi(t)/\varphi_1(t)$ ограничена в окрестности бесконечности тогда и только тогда, когда $H^{\varphi_1}(\Gamma) \hookrightarrow H^{\varphi}(\Gamma)$; это вложение непрерывно и плотно. Оно компактно тогда и только тогда, когда $\varphi(t)/\varphi_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Это прямо следует из свойств пространств Хермандера [7, теоремы 2.2.2 и 2.2.3]. В частности, выполняются компактные и плотные вложения

$$\begin{gathered} H^{(s_1)}(\Gamma) \hookrightarrow H^{\varphi}(\Gamma) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\Gamma) \\ \text{для всех} \;\; s_1 > \sigma_1(\varphi), \;\; s_0 < \sigma_0(\varphi). \end{gathered} \tag{14}$$

Пусть заданы целое число $\lambda \geq 0$ и функциональный параметр $\omega \in \mathrm{RO}$. Тогда

$$\int\limits_1^{\infty} t^{2\lambda+n-1}\,\omega^{-2}(t)\,dt < \infty \;\Leftrightarrow\; H^{\omega}(\Gamma) \hookrightarrow C^{\lambda}(\Gamma), \tag{15}$$

причем вложение непрерывно. Здесь, как обычно, $C^{\lambda}(\Gamma)$ — пространство Гельдера на Γ порядка λ. Это свойство вытекает из теоремы вложения Хермандера [7, теорема 2.2.7] (см. [20, лемма 2], где оно установлено для расширенной соболевской шкалы на $\mathbb{R}^n$).

В связи с (15) отметим следующее. Если $H^{\omega}(\Gamma) = H^{(s)}(\Gamma)$ — пространство Соболева порядка s, т. е. $\omega(t) = t^s$ при $t \geq 1$, то левая часть формулы (15) равносильна неравенству $s > \lambda + n/2$, и мы приходим к теореме вложения Соболева.

Перейдем теперь к важному интерполяционному свойству расширенной соболевской шкалы. Оно состоит в том, что каждое пространство $H^{\varphi}(\Gamma)$, где $\varphi \in \mathrm{RO}$, есть результат интерполяции с подходящим функциональным параметром пары соболевских пространств $H^{(s_0)}(\Gamma)$

и $H^{(s_1)}(\Gamma)$, фигурирующих в (14). В этой связи напомним определение интерполяции с функциональным параметром общих гильбертовых пространств и некоторые ее свойства (см., например, монографию [8, п. 1.1]). Для целей работы достаточно ограничиться сепарабельными пространствами.

Пусть задана упорядоченная пара $X := [X_0, X_1]$ сепарабельных комплексных гильбертовых пространств X_0 и X_1 такая, что выполняется непрерывное и плотное вложение $X_1 \hookrightarrow X_0$. Пару X называем допустимой. Для нее существует изометрический изоморфизм $J : X_1 \leftrightarrow X_0$ такой, что J — самосопряженный положительно определенный оператор в пространстве X_0 с областью определения X_1. Оператор J определяется парой X однозначно; он называется порождающим для X.

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех измеримых по Борелю функций $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, отделенных от нуля на каждом множестве $[r, \infty)$ и ограниченных на каждом отрезке $[a, b]$, где $r > 0$ и $0 < a < b < \infty$.

Пусть $\psi \in \mathcal{B}$. В пространстве X_0 определен с помощью спектральной теоремы оператор $\psi(J)$, как борелевская функция ψ от неограниченного самосопряженного оператора J. Обозначим через $[X_0, X_1]_\psi$ или, короче, X_ψ область определения оператора $\psi(J)$, наделенную скалярным произведением

$$(w_1, w_2)_{X_\psi} := (\psi(J)w_1, \psi(J)w_2)_{X_0}$$

и соответствующей нормой $\|w\|_{X_\psi} = (w, w)^{1/2}_{X_\psi}$. Пространство X_ψ гильбертово и сепарабельно, причем выполняется непрерывное и плотное вложение $X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Функцию $\psi \in \mathcal{B}$ называем интерполяционным параметром, если для произвольных допустимых пар $X = [X_0, X_1]$, $Y = [Y_0, Y_1]$ гильбертовых пространств и для любого линейного отображения T, заданного на X_0, выполняется следующее. Если при каждом $j \in \{0, 1\}$ сужение отображения T на пространство X_j является ограниченным оператором $T : X_j \to Y_j$, то и сужение отображения T на пространство X_ψ является ограниченным оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$. Тогда говорят, что пространство X_ψ получено интерполяцией с функциональным параметром ψ пары X.

Функция $\psi \in \mathcal{B}$ является интерполяционным параметром тогда и только тогда, когда она псевдовогнута в окрестности бесконечности, т. е. $\psi(t) \asymp \psi_1(t)$ при $t \gg 1$ для некоторой положительной вогнутой функции $\psi_1(t)$. Это вытекает из теоремы Ж. Питре [14, 15] об описании всех интерполяционных функций положительного порядка. (Как обычно, $\psi \asymp \psi_1$ обозначает ограниченность обоих отношений ψ/ψ_1 и ψ_1/ψ на указанном множестве.)

Сформулируем необходимое нам интерполяционное свойство расширенной соболевской шкалы [8, теорема 2.22].

Предложение 1. *Пусть заданы функция $\varphi \in \mathrm{RO}$ и вещественные числа s_0, s_1 такие, что $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ и $s_1 > \sigma_1(\varphi)$. Положим*

$$\psi(t) := \begin{cases} t^{-s_0/(s_1-s_0)}\, \varphi\bigl(t^{1/(s_1-s_0)}\bigr) & \text{\textit{при}} \quad t \geq 1, \\ \varphi(1) & \text{\textit{при}} \quad 0 < t < 1. \end{cases} \tag{16}$$

Тогда функция $\psi \in \mathcal{B}$ является интерполяционным параметром, и

$$\bigl[H^{(s_0)}(\Gamma), H^{(s_1)}(\Gamma)\bigr]_{\psi} = H^{\varphi}(\Gamma)$$

с эквивалентностью норм.

При интерполяции наследуется не только ограниченность, но и нетеровость линейных операторов при некоторых дополнительных условиях. Сформулируем этот результат применительно к рассмотренному методу интерполяции [8, теорема 1.7].

Предложение 2. *Пусть $X = [X_0, X_1]$ и $Y = [Y_0, Y_1]$ — допустимые пары гильбертовых пространств. Пусть, кроме того, на X_0 задано линейное отображение T такое, что его сужения на пространства X_j, где $j = 0, 1$, являются ограниченными нетеровыми операторами $T : X_j \to Y_j$, имеющими общее ядро и одинаковый индекс. Тогда для произвольного интерполяционного параметра $\psi \in \mathcal{B}$ ограниченный оператор $T : X_{\psi} \to Y_{\psi}$ нетеров с теми же ядром и индексом, а его область значений равна $Y_{\psi} \cap T(X_0)$.*

В работе понадобится также следующее свойство интерполяции ортогональных сумм гильбертовых пространств (см., например, [8, теорема 1.5]).

Предложение 3. *Пусть задано $p \in \mathbb{N}$ допустимых пар гильбертовых пространств*

$$X^{(k)} := \bigl[X_0^{(k)}, X_1^{(k)}\bigr], \quad \text{\textit{где}} \quad k = 1, \ldots, p.$$

Тогда пара гильбертовых пространств

$$\Big[\bigoplus_{k=1}^{p} X_0^{(k)}, \bigoplus_{k=1}^{p} X_1^{(k)}\Big]$$

является допустимой, и для любого $\psi \in \mathcal{B}$ *верно*

$$\Big[\bigoplus_{k=1}^{p} X_0^{(k)}, \bigoplus_{k=1}^{p} X_1^{(k)}\Big]_\psi = \bigoplus_{k=1}^{p}\big[X_0^{(k)},\, X_1^{(k)}\big]_\psi$$

с равенством норм.

В заключение этого пункта сформулируем следующее свойство дифференциальных операторов на расширенной соболевской шкале.

Предложение 4. *Пусть* L *— произвольный линейный дифференциальный оператор на* Γ *порядка* r *с коэффициентами класса* $C^\infty(\Gamma)$. *Он является ограниченным оператором в паре пространств*

$$L:\, H^{\varphi}(\Gamma) \to H^{\varphi\rho^{-r}}(\Gamma) \quad \text{для любого } \varphi \in \mathrm{RO}.$$

Это свойство выводится из соболевского случая с помощью интерполяции на основании предложения 1 (см. [22, лемма 4.1])

Заметим, что из предложения 4 следует ограниченность оператора (4).

6. Доказательство основных результатов

Докажем теоремы 1–5 о свойства эллиптической системы $Au = f$.

Доказательство теоремы 1. Как отмечалось выше, теорема 1 известна в соболевском случае, когда $\varphi(t) \equiv t^s$ и $s \in \mathbb{R}$ (см., например, [5, теорема 3.2.1]).

Докажем ее для произвольного $\varphi \in \mathrm{RO}$ с помощью интерполяции с функциональным параметром. Выберем числа $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ и $s_1 > \sigma_1(\varphi)$ и рассмотрим ограниченные нетеровы операторы

$$A:\, \bigoplus_{k=1}^{p} H^{(s_r+m_k)}(\Gamma) \to \bigoplus_{j=1}^{p} H^{(s_r-l_j)}(\Gamma) \quad \text{для} \quad r = 0, 1, \tag{17}$$

действующие в пространствах Соболева. Эти операторы имеют общее ядро N, одинаковый индекс, равный $\dim N - \dim N^{+}$, и областью значений

$$A\biggl(\bigoplus_{k=1}^{p} H^{(s_r+m_k)}(\Gamma)\biggr) =$$
$$= \biggl\{ f \in \bigoplus_{j=1}^{p} H^{(s_r-l_j)}(\Gamma) : \, (f,v)_\Gamma = 0 \ \text{ для всех } \ v \in N^{+} \biggr\}. \tag{18}$$

Определим интерполяционный параметр ψ по формуле (16). В силу предложения 2 нетеровость операторов (17) влечет за собой нетеровость ограниченного оператора

$$\begin{gathered} A : \, \biggl[\bigoplus_{k=1}^{p} H^{(s_0+m_k)}(\Gamma), \bigoplus_{k=1}^{p} H^{(s_1+m_k)}(\Gamma) \biggr]_{\psi} \to \\ \to \biggl[\bigoplus_{j=1}^{p} H^{(s_0-l_j)}(\Gamma), \bigoplus_{j=1}^{p} H^{(s_1-l_j)}(\Gamma) \biggr]_{\psi}. \end{gathered} \tag{19}$$

Здесь, последовательно применяя предложения 3 и 1, получаем следующие равенства пространств с эквивалентностью норм в них :

$$\biggl[\bigoplus_{k=1}^{p} H^{(s_0+m_k)}(\Gamma), \bigoplus_{k=1}^{p} H^{(s_1+m_k)}(\Gamma) \biggr]_{\psi} =$$
$$= \bigoplus_{k=1}^{p} \bigl[H^{(s_0+m_k)}(\Gamma), H^{(s_1+m_k)}(\Gamma) \bigr]_{\psi} = \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma),$$

и

$$\biggl[\bigoplus_{j=1}^{p} H^{(s_0-l_j)}(\Gamma), \bigoplus_{j=1}^{p} H^{(s_1-l_j)}(\Gamma) \biggr]_{\psi} =$$
$$= \bigoplus_{j=1}^{p} \bigl[H^{(s_0-l_j)}(\Gamma), H^{(s_1-l_j)}(\Gamma) \bigr]_{\psi} = \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma).$$

Таким образом, (4) —это нетеровый оператор (19), который в силу предложения 2 имеет то же ядро N и индекс $\dim N - \dim N^{+}$, что и операторы (17). Кроме того, область значений оператора (4) совпадает с пространством

$$\bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma) \bigcap A\biggl(\bigoplus_{k=1}^{p} H^{(s_0+m_k)}(\Gamma)\biggr).$$

Следовательно, она равна (5) в силу (18).

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Теорема 2 вытекает из теоремы 1. В самом деле, N — ядро, а

$$P^{+}\biggl(\bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma)\biggr)$$

область значений оператора (4) для любого $\varphi \in \mathrm{RO}$, как утверждает теорема 1. Следовательно, ограниченный оператор (7) — биекция. Кроме того, этот оператор ограниченный. Поэтому он является взаимно непрерывным оператором (т. е. изоморфизмом) в силу теоремы Банаха об обратном операторе. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\varphi \in \mathrm{RO}$ и $\sigma > 0$. Обозначим для краткости

$$\mathcal{X} := \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma), \quad \mathcal{Y} := \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma) \quad \text{и} \quad \mathcal{Z} := \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k-\sigma}}(\Gamma).$$

Пусть вектор-функции (8) такие, что $Au = f$ на Γ. На основании теоремы 2 имеем:

$$\|u\|_{\mathcal{X}} \leq \|Pu\|_{\mathcal{X}} + \|u - Pu\|_{\mathcal{X}} \leq c_1\|APu\|_{\mathcal{Y}} + c_2\|u - Pu\|_{\mathcal{Z}}.$$

Здесь c_1 — норма оператора, обратного к (7), а c_2 — некоторое положительное число, не зависимое от u. Это число существует, поскольку вектор-функция $u - Pu$ принадлежит конечномерному пространству N, а в нем эквивалентны все нормы, в частности, нормы в пространствах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Z}$. Отсюда с учетом формул

$$APu = Au = f \quad \text{и} \quad \|u - Pu\|_{\mathcal{Z}} \leq (1 + c_3)\,\|u\|_{\mathcal{Z}}$$

получаем требуемую оценку (9). Здесь c_3 — норма проектора P в пространстве $\mathcal{Z}$. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пространство $\mathcal{D}'(\Gamma)$ является объединением соболевских пространств $H^{(s)}(\Gamma)$, где $s \in \mathbb{R}$. Поэтому ввиду (14) выполняется включение

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k-\sigma}}(\Gamma) \quad \text{для некоторого} \quad \sigma > 0. \tag{20}$$

Предварительно рассмотрим случай, когда $V = \Gamma$ (к нему сводится доказательство теоремы в общей ситуации). В силу теоремы 1 имеем:

$$\bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma) \cap A\biggl(\bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k-\sigma}}(\Gamma)\biggr) = A\biggl(\bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma)\biggr).$$

Поэтому, из условия

$$f \in \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma)$$

и включения (20) вытекает, что

$$f = Au \in A\biggl(\bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma)\biggr).$$

Таким образом, на Γ наряду с равенством $Au = f$ выполняется также равенство $Av = f$ для некоторого

$$v \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma).$$

Следовательно, $A(u - v) = 0$ на Γ; отсюда

$$w := u - v \in N \subset (C^{\infty}(\Gamma))^{p}$$

ввиду теоремы 1. Поэтому

$$u = v + w \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma),$$

и теорема 4 доказана в случае $V=\Gamma$.

Рассмотрим теперь общую ситуацию. Покажем, что из условия (10) вытекает следующее свойство повышения регулярности решения уравнения $Au=f$ на V: для каждого числа $r\geq 1$ справедлива импликация

$$u\in\bigoplus_{k=1}^{p}H^{\varphi\rho^{m_k-r}}_{\mathrm{loc}}(V)\Rightarrow u\in\bigoplus_{k=1}^{p}H^{\varphi\rho^{m_k-r+1}}_{\mathrm{loc}}(V). \tag{21}$$

Произвольно выберем функцию $\chi\in C^\infty(\Gamma)$ такую, что $\operatorname{supp}\chi\subset V$. Выберем еще функцию $\eta\in C^\infty(\Gamma)$, которая удовлетворяет условиям: $\operatorname{supp}\eta\subset V$ и $\eta\equiv 1$ в окрестности множества $\operatorname{supp}\chi$. Переставляя матричный дифференциальный оператор A и оператор умножения на функцию χ, можем записать:

$$A(\chi u)=A(\chi\eta u)=\chi A(\eta u)+A'(\eta u)=\chi f+A'(\eta u)\quad\text{на}\quad\Gamma. \tag{22}$$

Здесь $A'=(A'_{j,k})_{j,k=1}^{p}$ — матричный дифференциальный оператор с коэффициентами класса $C^\infty(\Gamma)$, который удовлетворяет условию $\operatorname{ord}A'_{j,k}\leq\operatorname{ord}A_{j,k}-1$. Тогда $\operatorname{ord}A'_{j,k}\leq m_k+l_j-1$ и в силу предложения 4 имеем импликацию

$$u\in\bigoplus_{k=1}^{p}H^{\varphi\rho^{m_k-r}}_{\mathrm{loc}}(V)\Rightarrow A'(\eta u)\in\bigoplus_{j=1}^{p}H^{\varphi\rho^{-l_j-r+1}}(\Gamma). \tag{23}$$

Кроме того, на основании условия (10) и неравенства $r\geq 1$ получаем включение

$$\chi f\in\bigoplus_{j=1}^{p}H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma)\subset\bigoplus_{j=1}^{p}H^{\varphi\rho^{-l_j-r+1}}(\Gamma). \tag{24}$$

На основании формул (22), (23), (24) и настоящей теоремы, уже доказанной в случае $V=\Gamma$, имеем:

$$u\in\bigoplus_{k=1}^{p}H^{\varphi\rho^{m_k-r}}_{\mathrm{loc}}(V)\Rightarrow A(\chi u)\in\bigoplus_{j=1}^{p}H^{\varphi\rho^{-l_j-r+1}}(\Gamma)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\chi u\in\bigoplus_{k=1}^{p}H^{\varphi\rho^{m_k-r+1}}(\Gamma).$$

Таким образом доказано (21) в силу произвольности выбора функции χ.

Теперь с помощью (20) и (21) легко вывести требуемое включение (11). В формуле (20) можно считать, что σ — натуральное число. Применяя импликацию (21) последовательно для значений $r=\sigma$, $r=\sigma-1$, ..., $r=1$, выводим это включение:

$$u\in\bigoplus_{k=1}^{p}H^{\varphi\rho^{m_k-\sigma}}(\Gamma)\subset\bigoplus_{k=1}^{p}H^{\varphi\rho^{m_k-\sigma}}_{\mathrm{loc}}(V)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow u\in\bigoplus_{k=1}^{p}H^{\varphi\rho^{m_k-\sigma+1}}_{\mathrm{loc}}(V)\Rightarrow\ldots\Rightarrow u\in\bigoplus_{k=1}^{p}H^{\varphi\rho^{m_k}}_{\mathrm{loc}}(V).$$

Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Согласно теореме 4 выполняется включение $u_k\in H^{\varphi\rho^{m_k}}_{\mathrm{loc}}(V)$. Выберем произвольно точку $x\in V$ и функцию $\chi\in C^{\infty}(\Gamma)$ такую, что $\operatorname{supp}\chi\subset V$ и $\chi\equiv 1$ в некоторой окрестности точки x. Тогда в силу условия (12) и свойства (15), где берем $\omega(t):=\varphi(t)t^{m_k}$ при $t\geq 1$, получим:

$$\chi u_k\in H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma)\subset C^{\lambda}(\Gamma).$$

Отсюда в силу произвольности выбора точки $x\in V$ следует требуемое включение $u_k\in C^{\lambda}(V)$. Теорема 5 доказана.

7. Выводы

В статье исследована эллиптическая по Дуглису-Ниренбергу система линейных дифференциальных уравнений (1) в гильбертовых пространствах Хермандера, образующих расширенную соболевскую шкалу на бесконечно гладком замкнутом многообразии Γ. Доказано, что соответствующий системе матричный дифференциальный оператор является ограниченным и нетеровым в парах пространств (4) (теорема 1) и порождает изоморфизмы между их подпространствами (теорема 2). Получены новые априорные оценки решений этой системы (теорема 3). Доказана утверждение о локальной регулярности решений в пространствах Хермандера (теорема 4). Найдены новые достаточные условия непрерывности решений вместе с их производными заданного порядка (теорема 5).

Автор благодарит А. А. Мурача за руководство работой.

Список литературы

[1] *Agmon S.* Lectures on elliptic boundary value problems. – Princeton, N.J.: Van Nostrand Reinhold, 1965. – 292 p.

[2] *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наукова думка, 1965. – 800 с.

[3] *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – Москва: Мир, 1971. – 372 с.

[4] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: в 4-х т. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. – Москва: Мир, 1987. – 696 с.

[5] *Агранович М. С.* Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фунд. напр. Т. 63 – Москва: ВИНИТИ, 1990. – С. 5–129.

[6] *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci. Vol. 79. Partial differential equations, IX. – Berlin: Springer, 1997. – P. 1–144.

[7] *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с.

[8] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Институт математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (Доступно как arXiv:1106.3214.)

[9] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin/Boston: De Gruyter, 2014. – xii+297 p.

[10] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, No 2. – P. 211–281.

[11] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Интерполяционные пространства Хермандера и эллиптические операторы // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 205–226.

[12] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Об эллиптических операторах на замкнутом компактном многообразии // Доп. НАН України. – 2009. – № 3. – С. 29–35.

[13] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Расширенная соболевская шкала и эллиптические операторы // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 368–380.

[14] *Peetre J.* On interpolation functions // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1966. – **27**. – P. 167–171.

[15] *Peetre J.* On interpolation functions II // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1968. – **29**. – P. 91–92.

[16] *Ovchinnikov V. I.* The methods of orbits in interpolation theory // Math. Rep. – 1984. – **1**. – P. 349–515.

[17] *Douglis A., Nirenberg L.* Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1955. – **8**, № 4. – P. 503–538.

[18] *Зинченко Т. Н.* Эллиптические системы в расширенной соболевской шкале // Доп. НАН України. – 2013. – № 3. – С. 14–20.

[19] *Мурач А. А.* Об эллиптических системах в пространствах Хермандера // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 3. – С. 391–399.

[20] *Зинченко Т. Н., Мурач А. А.* Эллиптические по Дуглису–Ниренбергу системы в пространствах Хермандера // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 11. – С. 1477–1491.

[21] *Зинченко Т. Н., Мурач А. А.* Эллиптические системы с параметром в расширенной соболевской шкале // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 2. – С. 180–202.

[22] *Зинченко Т. Н., Мурач А. А.* Эллиптические по Петровскому системы в расширенной соболевской шкале // Укр. мат. вісник. – 2013. – **10**, № 3. – С. 433–449.

[23] *Murach A. A., Zinchenko T.* Parameter-elliptic operators on the extended Sobolev scale // Methods Funct. Anal. Topology. – 2013. – **19**, no. 1. – С. 29–39.

[24] *Зинченко Т. Н.* Про оцінки періодичних розв'язків еліптичних систем на прямій // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 185–201.

[25] *Аноп А. В.* Еліптичні крайові задачі в многозв'язній області в розширеній соболєвській шкалі // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 37–59.

[26] *Аноп А. В.* Загальна еліптична крайова задача в розширеній соболєвській шкалі // Доп. НАН України. – 2014. – № 4. – С. 7–14.

[27] *Jacob N.* Pseudodifferential Operators and Markov Processes (in 3 volumes). – London: Imperial College Press, 2001, 2002, 2005. – xxii+493 p., xxii+453 p., xxviii+474 p.

[28] *Nicola F., Rodino L.* Global Pseudodifferential Calculas on Euclidean Spaces. – Basel: Birkhäser, 2010. – x+306 p.

[29] *Paneah B.* The Oblique Derivative Problem. The Poincaré Problem.– Berlin: Wiley–VCH, 2000. – 348 p.

[30] *Triebel H.* The Structure of Functions. – Basel: Birkhäser, 2001. – xii+425 p.

[31] *Avakumović V. G.* O jednom O-inverznom stavu // Rad Jugoslovenske Akad. Znatn. Umjetnosti. – 1936. – **254**. – P. 167—186.

[32] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 144 с.

[33] *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular Variation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 512 p.

[34] *Matuszewska W.* On a generalization of regularly increasing functions // Studia Math. – 1964. – **24**. – P. 271–279.

[35] *Karamata J.* Sur certains "Tauberian theorems" de M. M. Hardy et Littlewood // Mathematica (Cluj). – 1930. – **3**. – P. 33–48.

[36] *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3–74.

[37] *Murach A. A.* Douglis-Nirenberg elliptic systems in the refined scale of spaces on a closed manifold // Methods Funct. Anal. Topology. – 2008. – **14**, no. 2. – P. 142–158.