Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, Т. 11, № 3, 166-172

УДК 517.983

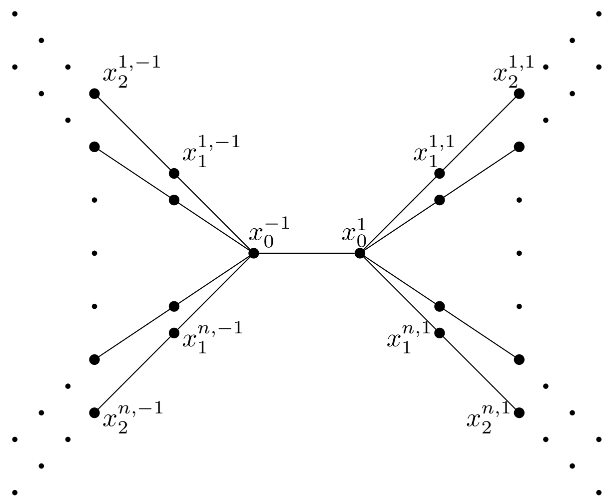
В. О. Лебідь (Ін–т математики НАН України, Київ)

СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДВОЗІРКОВОГО ГРАФА З НЕСКІНЧЕННИМИ ПРОМЕНЯМИ

The detailed spectral analysis of two star graph with semibounded infinite chains is given. The spectrum of self-adjoint operator which is generated by the adjacency matrix of the graph is defined, the spectral measure is constructed, eigenvectors and spectral expansion in eigenvectors are provided.

Проведено детальний спектральний аналіз двозіркового графа з нескінченними променями. Охарактеризовано спектр самоспряженого оператора, який породжений матрицею суміжності даного графа, побудовано спектральну міру, наведені у явній формі власні вектори та спектральний розклад за власними векторами.

Нехай $S(n,\infty;n,\infty)$ — двозірковий зв'язний граф, який складається із двох однакових зіркових графів $S(n,\infty)$(лівого і правого) з n нескінченними променями, центри яких з'єднані одним ребром.



Матриця суміжності такого графа породжує обмежений самоспряжений оператор $\mathbb{A}$ у гільбертовому просторі $l_2(V)$, де V — множина вершин графа $S(n,\infty;n,\infty)$ (див. [1]). Оператор $\mathbb{A}$ діє на вектор $x = (x_0^k, x_i^{j,k})_{i=1,j=1,k=\pm 1}^{\infty\ \ n} \in l_2(V)$ так

$$
\begin{aligned}
&(\mathbb{A}x)_0^k = \sum_{j=1}^{n} x_1^{j,k} + x_0^{-k}, (\mathbb{A}x)_i^{j,k} = x_{i-1}^{j,k} + x_{i+1}^{j,k},\\
&x_0^{j,k} \equiv x_0^k \quad \text{для кожного } k = \pm 1,\ j = \overline{1,n},\ i \geq 1.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Тут компоненти векторів x та $\mathbb{A}x$ із простору $l_2(V)$, що відповідають центрам двозіркових графів позначаємо нижнім індексом 0 та верхнім індексом $k(k=-1$ для лівого зіркового графа та $k=1$ для правого зіркового графа). Компоненту, що відповідає i-й вершині на j-му промені позначаємо нижнім індексом i та двома верхніми індексами j,k.

Теорема 1. *Двозірковому графу $S(n,\infty;n,\infty)$ відповідає обмежений самоспряжений оператор $\mathbb{A}$ вигляду* (1), *який визначений на всьому просторі $l_2(V)$. Існує унітарний оператор $\mathfrak{U}$ такий, що*

$$
\mathfrak{U}\mathbb{A}\mathfrak{U}^{-1} = J_1^{\sqrt{n}} \oplus J_{-1}^{\sqrt{n}} \oplus \underbrace{J_0 \oplus \ldots \oplus J_0}_{2n-2}, \tag{2}
$$

де $J_{\pm 1}^{\sqrt{n}}$, J_0 — матриці Якобі, що мають вигляд

$$
J_{\pm1}^{\sqrt{n}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \sqrt{n} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \sqrt{n} & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \text{ та } J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.
$$

Доведення. Нехай $\{e_0^k, e_i^{j,k}\}_{j=1,i\in\mathbb{N},k=\pm1}^{n}$ — стандартний базис у просторі $l_2(V)$, пов'язаний із вказаною нумерацією вершин V двозіркового графа $S(n,\infty;n,\infty)$. Розглянемо дійсну унітарну матрицю $U = \|u_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$, у якої перший рядок складається із чисел $\frac{1}{\sqrt{n}}$, тобто $u_{1j} = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad j = 1, \ldots n$. Оскільки матриця U — дійсна і унітарна, то

$$
\sum_{j=1}^{n} u_{kj} u_{mj} = \delta_{km},
$$

де δ_{km} — символ Кронекера. Звідси випливає, що

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} = 0 \quad \text{при } i = 2, \dots n.$$

Розглянемо у просторі $l_2(V)$ новий базис $\{\widehat{e}_0^k, \widehat{e}_i^{j,k}\}_{j=1, i\in\mathbb{N}, k=\pm 1}^{n}$ такий, що

$$\widehat{e}_0^k = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(e_0^k + k e_0^{-k}\Big), \widehat{e}_i^{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{m=1}^{n} u_{jm} e_i^{m,k} + k \sum_{m=1}^{n} u_{jm} e_i^{m,-k}\right)$$
$$\text{для кожного } i \in \mathbb{N},\ j = 1, 2, \dots n,\ k = \pm 1.$$

Згідно з (1) оператор $\mathbb{A}$ діє на вихідний базис так

$$(\mathbb{A}e)_0^k = \sum_{j=1}^{n} e_1^{j,k} + e_0^{-k}, (\mathbb{A}e)_i^{j,k} = e_{i-1}^{j,k} + e_{i+1}^{j,k},$$
$$e_0^{j,k} \equiv e_0^k \quad \text{для кожного } k = \pm 1,\ j = \overline{1, n},\ i \geq 1.$$

Враховуючи зв'язок між новим та вихідним базисами, маємо

$$\mathbb{A}\widehat{e}_0^k = k\widehat{e}_0^k + \sqrt{n}\widehat{e}_1^{1,k},\ \mathbb{A}\widehat{e}_1^{1,k} = \sqrt{n}\widehat{e}_0^k + \widehat{e}_2^{1,k},$$
$$\mathbb{A}\widehat{e}_i^{j,k} = \widehat{e}_{i-1}^{j,k} + \widehat{e}_{i+1}^{j,k} \text{ для кожного } k = \pm 1,\ j = \overline{2, n} \text{ та } i \geq 2$$

Таким чином, підпростори $H_{1,k} \subset l_2(V)$, у яких вектори $\{\widehat{e}_0^k, \widehat{e}_1^{1,k}, \dots, \widehat{e}_i^{1,k}, \dots\}$ $(k = \pm 1)$ утворюють стандартний базис, є інваріантними для оператора $\mathbb{A}$, і $\mathbb{A}$ діє в $H_{1,k}$ як матриця $J_k^{\sqrt{n}}$. Підпростори $H_{j,k}$ з базисом $\{\widehat{e}_1^{j,k}, \dots, \widehat{e}_i^{j,k}, \dots\}$ при кожному $j = \overline{2, n}$ та $k = \pm 1$ є інваріантними для оператора $\mathbb{A}$, який в $H_{j,k}$ зводиться до матриць Якобі J_0. Оператор $\mathfrak{U}$ у просторі $l_2(V)$, який переводить базис $\{e_0^k, e_i^{j,k}\}_{j=1, i\in\mathbb{N}, k=\pm 1}^{n}$ у базис $\{\widehat{e}_0^k, \widehat{e}_i^{j,k}\}_{j=1, i\in\mathbb{N}, k=\pm 1}^{n}$, є унітарним, і задовольняє твердження теореми.

Теорему доведено.

Отже, за розкладом (2) оператора $\mathbb{A}$ бачимо, що спектральний аналіз оператора $\mathbb{A}$ зводиться до спектрального аналізу матриць Якобі $J_{\pm 1}^{\sqrt{n}}$.

Теорема 2. *Матриця Якобі $J_1^{\sqrt{n}}$ породжує у просторі l_2 обмежений самоспряжений оператор, спектр якого складається із абсолютно неперервної компоненти, що збігається із інтервалом $[-2, 2]$, та власних значень λ, що є нулями полінома*

$$p_+(\lambda) = n^2 + 1 + (n-2)\lambda - (n-1)\lambda^2, \tag{3}$$

для яких число $\mu = \frac{\lambda-1}{n}$ з умовою $|\mu| < 1$. Таким власним значенням відповідають власні вектори вигляду

$$e_\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \mu, \mu^2, \mu^3, \ldots, \mu^j, \ldots\right). \tag{4}$$

При $n = 2$ та $n = 3$ існує лише одне просте додатне власне значення $\lambda = \sqrt{5}$ та $\lambda = \frac{5}{2}$ відповідно, а при $n \geq 4$ – їх два.

При цьому, кожному $\lambda \in [-2, 2]$ відповідає узагальнений власний вектор

$$\varphi_\lambda = \big(\sqrt{n}P_0(\lambda), P_1(\lambda) - P_0(\lambda), \ldots, P_j(\lambda) - P_{j-1}(\lambda) - (n-1)P_{j-2}(\lambda), \ldots\big). \tag{5}$$

Справедливий розклад за приведеними власними векторами та рівність Парсеваля зі спектральною щільністю $\rho(\lambda) = \frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2\pi p_+(\lambda)}$ неперервного спектру.

Доведення. Матриця Якобі $J_1^{\sqrt{n}}$ породжує у просторі $l_2(\mathbb{N}_0)$ обмежений самоспряжений оператор, який будемо позначати тією ж літерою $J_1^{\sqrt{n}}$. Оператор $J_1^{\sqrt{n}}$ діє на вектор $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \in l_2(\mathbb{N}_0)$ так

$$J_1^{\sqrt{n}}x = (x_0 + \sqrt{n}x_1, \sqrt{n}x_0 + x_2, \ldots, x_{k-1} + x_{k+1}, \ldots).$$

Із вигляду оператора $J_1^{\sqrt{n}}$ випливає, що вектори e_μ ($|\mu| < 1$) вигляду (4) є його власними векторам, що відповідають власним значенням λ, які є нулями полінома (3). Для кожного $\lambda \in [-2, 2]$ вектор φ_λ задовольняє рівність $J_1^{\sqrt{n}}\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$.

Легко перевірити, що $(e_\mu, \varphi_\lambda)_{l_2} = 0$. Вектор $x \in l_2(\mathbb{N}_0)$ буде ортогональним до вектора e_μ тоді й тільки тоді, коли

$$\frac{1}{\sqrt{n}}x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k x_k = 0. \tag{6}$$

Розглянемо перетворення Фур'є за власними функціями (5). Враховуючи явний вигляд узагальненої власної функції φ_λ, для $x \in l_2(\mathbb{N}_0)$, $x \perp e_\mu$ маємо

$$\widetilde{x}(\lambda) = (x, \varphi_\lambda)_{l_2} = (\sqrt{n}x_0 - x_1 - (n-1)x_2)P_0(\lambda) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x_{k+1} - (n-1)x_{k+2})P_k(\lambda). \quad (7)$$

Рівність (7) можна розглядати як розклад функції $\widetilde{x}(\lambda)$ за ортонормованою системою поліномів $\{P_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$ у просторі $L_2([-2,2], \rho_0(\lambda)d\lambda)$, де $\rho_0(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-\lambda^2}$ (див., наприклад, [2]). Тому

$$\int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda)P_k(\lambda)\rho_0(\lambda)d\lambda = \begin{cases} \sqrt{n}x_0 - x_1 - (n-1)x_2, & \text{якщо } k = 0, \\ x_k - x_{k+1} - (p-1)x_{k+2}, & \text{якщо } k \geq 1. \end{cases} \quad (8)$$

Домножимо вираз (8) на μ^k і просумуємо за k. Оскільки $x \perp e_\mu$ і виконуються рівності (6), аналогічно, як у [3], із врахуванням факту, що функція $\frac{1}{1-\mu\lambda+\mu^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k P_k(\lambda)$ є твірною для системи поліномів $\{P_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$, отримуємо

$$x_k = \int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda)\varphi_{\lambda,k}\rho(\lambda)d\lambda, \ k = 1, 2 \dots .$$

Таким чином, кожний вектор $x \in l_2(\mathbb{N})$, ортогональний до e_μ, розкладається за узагальненими власними функціями φ_λ зі спектральною мірою $\rho(\lambda)d\lambda$, що є абсолютно неперервною відносно міри Лебега на інтервалі $[-2,2]$. Тому спектр оператора $J_1^{\sqrt{n}}$ містить однократну абсолютно неперервну компоненту, що збігається з інтервалом $[-2,2]$, та дискретні власні значення (їх кількість залежить від n). Теорему доведено.

Теорема 3. *Матриця Якобі $J_{-1}^{\sqrt{n}}$ породжує у просторі l_2 обмежений самоспряжений оператор, спектр якого складається із абсолютно неперервної компоненти, що збігається із інтервалом $[-2,2]$, та власних значень λ, що є нулями полінома*

$$p_-(\lambda) = n^2 + 1 - (n-2)\lambda - (n-1)\lambda^2,$$

для яких число $\mu = \frac{\lambda+1}{n}$ *з умовою* $|\mu| < 1$. *Таким власним значенням відповідають власні вектори вигляду*

$$e_\mu = (\frac{1}{\sqrt{n}}, \mu, \mu^2, \mu^3, \dots, \mu^j, \dots).$$

При $n = 2$ *та* $n = 3$ *існує лише одне просте від'ємне власне значення* $\lambda = -\sqrt{5}$ *та* $\lambda = -\frac{5}{2}$ *відповідно, а при* $n \geq 4$ *— їх два.*

При цьому, кожному $\lambda \in [-2, 2]$ *відповідає узагальнений власний вектор*

$$\varphi_\lambda = \big(\sqrt{n}P_0(\lambda), P_1(\lambda)+P_0(\lambda), \dots, P_j(\lambda)+P_{j-1}(\lambda)-(n-1)P_{j-2}(\lambda), \dots\big).$$

Справедливі розклад за приведеними власними векторами та рівність Парсеваля зі спектральною щільністю $\rho(\lambda) = \frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2\pi p_-(\lambda)}$ *неперервного спектру.*

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 2.

Із теорем $1-3$ випливає, що спектр двозіркового зв'язного графа $S(n, \infty; n, \infty)$ складається із $2n$-кратної абсолютно неперервної компоненти, що збігається з інтервалом $[-2, 2]$, та при $n = 2$, $n = 3$ ще із двох простих власних значень $\lambda = \pm\sqrt{5}$ та $\lambda = \pm\frac{5}{2}$ відповідно. При $n \geq 4$ спектр містить чотири прості власні значення $\lambda = \pm\frac{n-2\pm\sqrt{(n-2)^2+4(n-1)(n^2+1)}}{2(n-1)}$. Індекс графа $S(n, \infty; n, \infty)$, тобто спектральний радіус оператора $\mathbb{A}$, визначається числом $ind\ S(n, \infty; n, \infty) = \frac{n-2+\sqrt{(n-2)^2+4(n-1)(n^2+1)}}{2(n-1)}$ при $n \geq 2$.

При $n = 1$ двозірковий граф $S(1, \infty; 1, \infty)$ є нескінченним в обидва боки ланцюгом, спектр якого складається лише з двократної абсолютно неперервної компоненти, що збігається із інтервалом $[-2, 2]$, $ind\ S(1, \infty; 1, \infty) = 2$ (див., наприклад, [4, 5]).

Робота виконана в рамках проекту 03-01-12 "Обернені задачі в сучасній математичній фізиці" спільних проектів НАН України та Сибірського відділення РАН.

Автор висловлює щиру подяку Л. П. Нижнику та Ю. С. Самойленку за конструктивні зауваження.

1. *Москалёва Ю. П., Самойленко Ю. С.* Введение в спектральную теорию графов. — К.: Центр учебной литературы, 2007. — 114 с.

2. *Simon B.* Szego's Theorem and Its Descendants: Spectral Theory for L2 Perturbations of Orthogonal Polynomials, Princeton University Press, Princeton, NY. — 2011. — xii. — 650 p.

3. *Лебідь В. О., Нижник Л. П.* Спектральний аналіз зіркового графа з одним нескінченним променем // Наукові записки НаУКМА. — 2013. — **139**. — С. 18 – 22.

4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наукова думка, 1965. — 798 с.

5. *Лебідь В. О., Нижник Л. П.* Спектральний аналіз локально скінченних графів з одним нескінченним променем // Доп. НАН України. — 2014. — № 3. — С. 29 – 35.