Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, Т. 11, № 3, 196-213

УДК 517.5

А. С. Романюк (Ин–т математики НАН Украины, Киев)

ОЦЕНКИ ЭНТРОПИЙНЫХ ЧИСЕЛ И ε-ЭНТРОПИИ КЛАССОВ НИКОЛЬСКОГО–БЕСОВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

We obtain the order estimates of the entropy numbers and ε-entropy of the Nikol'skii-Besov classes $B^r_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables in the space L_q for some values of the parameters p and q.

Установлены порядковые оценки энтропийных чисел и ε-энтропии классов Никольского-Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q для ряда значений параметров p и q .

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — евклидово пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_d)$ и $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$; $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [0, 2\pi]$, обозначает множество функций f, 2π-периодических по каждой переменной и таких, что

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \ \ 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty, p = \infty.$$

В последующих рассуждениях будем рассматривать только те функции $f \in L_p(\pi_d)$, для которых выполнено условие

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, \ \ j = \overline{1, d},$$

и множество таких функций будем обозначать $L^0_p(\pi_d)$.

Для функции $f \in L^0_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, рассмотрим разность первого порядка по j-ой переменной с шагом h:

$$\Delta_{h,j} f(x) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_d) - f(x)$$

и определим разность l-го порядка

$$\Delta^l_{h,j} f(x) = \overbrace{\Delta_{h,j} \cdots \Delta_{h,j}}^{l} f(x)$$

в точке x_j с шагом h.

Далее, если $k = (k_1, \cdots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, то смешанная разность порядка k с векторным шагом $h = (h_1, \dots, h_d)$ определяется следующим образом:

$$\Delta^k_h f(x) = \Delta^{k_1}_{h_1,1} \cdots \Delta^{k_d}_{h_d,d} f(x).$$

Пусть заданы вектор $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, и параметры $1 \le \theta,\ p \le \infty$. Тогда функция $f \in L^0_p(\pi_d)$ принадлежит классу $B^r_{p,\theta}$, если

$$\left(\int\limits_{\pi_d} \|\Delta^k_h f(\cdot)\|^\theta_p \prod_{j=1}^d \frac{dh_j}{h_j^{1+r_j\theta}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1, \ \ 1 \le \theta < \infty,$$

и

$$\sup_h \|\Delta^k_h f(\cdot)\|_p \prod_{j=1}^d h_j^{-r_j} \le 1, \ \ \theta = \infty.$$

При этом для векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$ и $r = (r_1, \dots, r_d)$ предполагаются выполненными условия $k_j > r_j$, $j = \overline{1,d}$. Напомним, что классы $B^r_{p,\theta}$ являются аналогами классов функций, введенных О. В. Бесовым [1] и $B^r_{p,\infty} = H^r_p$, где H^r_p — аналоги классов, введенных С. М. Никольским (см., например, [2, с. 189]). С более подробной информацией о классах $B^r_{p,\theta}$ можно ознакомиться в работах [3, 4]. Далее, нам будет удобно пользоваться определением классов $B^r_{p,\theta}$ в несколько другом виде.

Для векторов $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, и $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1,d}$, положим

$$\rho(s) = \left\{ k = (k_1, \dots, k_d) : 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, \ j = \overline{1,d} \right\}$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$ введем обозначение

$$\delta_s(f,x) = \sum_{k\in\rho(s)} \widehat{f}(k)e^{i(k,x)},$$

где $\widehat{f}(k) = \int\limits_{\pi_d} f(t)e^{-i(k,t)}dt$ — коэффициенты Фурье функции f.

Пусть $1 < p < \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$. Тогда классы $B^r_{p,\theta}$ можно определить следующим образом (см., например, [3, 4]):

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f : \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f,\cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1,\ 1 \le \theta < \infty \right\},$$

$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f :\ \|f\|_{B^r_{p,\infty}} \asymp \sup_s 2^{(s,r)} \|\delta_s(f,\cdot)\|_p \le 1 \right\}.$$

Отметим, что при соответствующем видоизменении "блоков" $\delta_s(f,x)$, приведенное определение классов $B^r_{p,\theta}$ можно распространить и на крайние значения $p = 1$ и $p = \infty$ (см., например, [4] (замечание 2.1)).

Пусть $V_l(t)$, $l \in \mathbb{N}$, обозначает ядро Валле-Пуссена вида

$$V_l(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{l} \cos kt + 2\sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k-l}{l}\right) \cos kt.$$

Сопоставим каждому вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j) \right)$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, положим

$$A_s(f,x) = f(x) * A_s(x),$$

где "$*$" обозначает операцию свертки. Тогда при $1 \le p \le \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f :\ \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f,\cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1,\quad 1 \le \theta < \infty \right\},$$

$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f : \ \|f\|_{B^r_{p,\infty}} \asymp \sup_s 2^{(s,r)} \|A_s(f,\cdot)\|_p \le 1 \right\}.$$

Всюду ниже будем предполагать, что координаты векторов $r = (r_1, \dots, r_d)$, которые содержатся в определении классов, упорядочены в виде: $0 < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_d$. Вектору $r = (r_1, \dots, r_d)$ сопоставим вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$, $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $j = \overline{1, d}$, которому, в свою очередь, сопоставляется вектор $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_d)$, где $\gamma_j = \gamma'_j$ при $j = \overline{1, \nu}$ и $1 < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu + 1, d}$.

Полученные результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений. Для функций $\mu_1(N)$ и $\mu_2(N)$ запись $\mu_1 \ll \mu_2$ означает, что существует постоянная $C > 0$ такая, что $\mu_1(N) \le C\mu_2(N)$. Соотношение $\mu_1 \asymp \mu_2$ равносильно тому, что выполнены порядковые неравенства $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_1 \gg \mu_2$. Отметим, что все постоянные $C_i, i = 1, 2, \ldots$, которые будут встречаться в работе, могут зависеть только от тех параметров, которые содержатся в определении классов, метрики и размерности пространства $\mathbb{R}^d$. В некоторых случаях мы будем указывать эту зависимость в явном виде. Если $\mathfrak{M}$ — некоторое конечное множество, то через $|\mathfrak{M}|$ будем обозначать количество его элементов.

Теперь определим асимптотические характеристики, которые будем исследовать.

Пусть $\mathscr{X}$ банахово пространство и $B_{\mathscr{X}}$ — единичный шар в $\mathscr{X}$ с центром в точке 0. Обозначим через $B_{\mathscr{X}}(y, r)$ шар радиуса r с центром в точке y, т.е.

$$B_{\mathscr{X}}(y, r) = \left\{ x \in \mathscr{X} \ : \ \|x - y\| \le r \right\}.$$

Для компактного множества $\mathscr{A}$ и числа $\varepsilon > 0$ определим величину

$$N_\varepsilon\big(\mathscr{A}, \mathscr{X}\big) = \min \left\{ n : \exists \, y^1, \dots, y^n \in \mathscr{X} : \mathscr{A} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_{\mathscr{X}}(y^j, \varepsilon) \right\}.$$

Тогда величина (см., например, [5, 6])

$$H_\varepsilon\big(\mathscr{A}, \mathscr{X}\big) = \log N_\varepsilon\big(\mathscr{A}, \mathscr{X}\big)$$

называется ε-энтропией множества $\mathscr{A}$ относительно банахова пространства $\mathscr{X}$ (здесь и далее $\log := \log_2$).

С ε-энтропией множества $\mathscr{A}$ связано понятие энтропийных чисел $\varepsilon_k\big(\mathscr{A}, \mathscr{X}\big)$ (см., например, [7]):

$$\varepsilon_k\big(\mathscr{A}, \mathscr{X}\big) = \inf\Big\{\varepsilon : \exists\, y^1, \ldots, y^{2^k} \in \mathscr{X} : \mathscr{A} \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} B_{\mathscr{X}}(y^j, \varepsilon)\Big\}.$$

Обратим внимание, что непосредственно из определений величин $H_\varepsilon\big(\mathscr{A}, \mathscr{X}\big)$ и $\varepsilon_k\big(\mathscr{A}, \mathscr{X}\big)$ имеем: если $H_\varepsilon\big(\mathscr{A}, \mathscr{X}\big) \le k$, то $\varepsilon_k\big(\mathscr{A}, \mathscr{X}\big) \le \varepsilon$; и наоборот — оценка $\varepsilon_k\big(\mathscr{A}, \mathscr{X}\big) \le \varepsilon$ влечет оценку $H_\varepsilon\big(\mathscr{A}, \mathscr{X}\big) \le k$. Иными словами, если выполнены неравенства $k < H_\varepsilon\big(\mathscr{A}, \mathscr{X}\big) \le k+1$, то имеют место соотношения $\varepsilon_{k+1}\big(\mathscr{A}, \mathscr{X}\big) \le \le \varepsilon \le \varepsilon_k(\mathscr{A}, \mathscr{X})$. Это обстоятельство дает возможность из оценок для энтропийных чисел $\varepsilon_k\big(\mathscr{A}, \mathscr{X}\big)$ получать оценки для ε-энтропии $H_\varepsilon\big(\mathscr{A}, \mathscr{X}\big)$.

Мы не будем останавливаться на истории исследования ε-энтропии и энтропийных чисел тех или иных компактов в банаховых пространствах, а ограничимся только указанием на ряд работ [5 – 16], в которых можно ознакомиться с соответствующими результатами и обширной библиографией.

Для формулировки вспомогательных утверждений нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения.

Пусть, по прежнему $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ и $\gamma' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_d')$ — векторы, которые определены выше. Для $n \in \mathbb{N}$ положим

$$Q_n^{\gamma} = \bigcup_{(s,\gamma) \le n} \rho(s),\ Q_n^{\gamma'} = \bigcup_{(s,\gamma') \le n} \rho(s),\ \Delta Q_n^{\gamma'} = Q_n^{\gamma'} \backslash Q_{n-1}^{\gamma'}$$

и

$$\mathfrak{N}_n^{\gamma'} = \big\{s = (s_1, \ldots, s_d),\ n-1 < (s, \gamma') \le n,\, n \ge d\big\}.$$

Заметим, что $|\Delta Q_n^{\gamma'}| \asymp 2^n\, n^{\nu-1}$.

Через $S_{Q_n^{\gamma'}}(f, x)$ обозначим ступенчатую гиперболическую сумму Фурье функции $f \in L_1(\pi_d)$ вида

$$S_{Q_n^{\gamma'}}(f, x) = \sum_{(s,\gamma') \le n} \delta_s(f, x).$$

Имеют место утверждения.

Теорема А [17]. *Пусть* $1 < p < q < \infty,\ 1 \le \theta < \infty,\ r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. *Тогда*

$$\sup_{f \in B^r_{p,\theta}} \|f(\cdot) - S_{Q_n^{\gamma'}}(f,\cdot)\|_q \asymp 2^{-n\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)_+},$$

где $a_+ = \max\{0, a\}$.

Лемма А. *Пусть* $f \in L^0_p(\pi_d),\ \ 1 < p < \infty$. *Тогда*

$$\Big\| \sum_s \delta_s(f,\cdot) \Big\|_p \ll \left(\sum_s \|\delta_s(f,\cdot)\|_p^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}, \tag{1}$$

где $p^* = \min\{2, p\}$.

Неравенство (1) является простым следствием теоремы Литтлвуда–Пэли (см., например, теорему А из введения работы [18]) и оно неоднократно использовалось в работах многих авторов.

Лемма Б [18, с. 11]. *Справедлива оценка*

$$\sum_{(s,\gamma') \ge l} 2^{-\alpha(s,\gamma)} \asymp 2^{-\alpha\, l} l^{\nu-1},\ \alpha > 0.$$

Пусть $G \subset \mathbb{Z}^d$. Тогда через $T(G)$ обозначим множество тригонометрических полиномов t вида

$$T(G) = \big\{ t : \widehat{t}(k) = 0 \ \text{при}\ k \,\overline{\in}\, G \big\}.$$

Для $1 \le q \le \infty$ положим

$$T(G)_q = \big\{ t \in T(G) : \|t\|_q \le 1 \big\}.$$

Лемма В [9]. *Пусть* $1 < p \le 2 \le q < \infty$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\varepsilon_M\big(T(Q_n^\gamma)_p, L_q\big) \ll \begin{cases} C(p,q)\,|Q_n^\gamma|\,M^{-1}\,(\ln(|Q_n^\gamma|\,M^{-1}))^2, & 2M \le |Q_n^\gamma|, \\ C(p,q)\,2^{-M/|Q_n^\gamma|}, & 2M \ge |Q_n^\gamma|. \end{cases} \tag{2}$$

Приведем два замечания к оценкам (2).

***Замечание* 1**. Легко убедиться, что такого вида оценки имеют место и для множества полиномов $T(Q_n^{\gamma'})_p$ после соответствующей замены в правой части (2) множества Q_n^{γ} на $Q_n^{\gamma'}$.

***Замечание* 2**. В силу следствия из теоремы Литтлвуда–Пэли (см., например, [18, с. 7]) имеем $\|S_{Q_n^{\gamma}}(f,\cdot)\|_q \le C(q)\,\|f(\cdot)\|_q$, $1<q<\infty$, и поэтому в лемме B можно считать, что элементы соответствующей ε-сети также принадлежат $T(Q_n^{\gamma})$. Такого же характера заключение можно сделать и по отношению к множеству полиномов $T(Q_n^{\gamma'})$.

2. Основные результаты. Предварительно отметим, что при доказательстве полученных результатов используются и развиваются подходы, которые были предложены в работах [8, 9] при исследовании соответствующих вопросов на классах Соболева $W^r_{p,\alpha}$ и Никольского H^r_p периодических функций многих переменных.

Справедливо утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $1\le q<\infty$, $2\le p\le\infty$, $1\le\theta<\infty$ *и* $r_1>1$. *Тогда*

$$\varepsilon_M\big(B^r_{p,\theta},L_q\big)\ll M^{-r_1}(\log^{\nu-1}M)^{r_1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{3}$$

Доказательство. Заметим, что оценку (3) достаточно установить для случая $p=2$ и $2<q<\infty$, поскольку $B^r_{p,\theta}\subset B^r_{2,\theta}$, $2<p<\infty$, и $\|\cdot\|_q\le\|\cdot\|_2$, $1<q\le2$.

Итак, пусть $f\in B^r_{2,\theta}$, $1\le\theta<2$. Тогда согласно неравенству

$$\left(\sum_l|a_l|^{\mu_2}\right)^{\frac{1}{\mu_2}}\le\left(\sum_l|a_l|^{\mu_1}\right)^{\frac{1}{\mu_1}},\quad 1\le\mu_1\le\mu_2<\infty,$$

(см. [19, с. 43]) и лемме A можем записать

$$\Big\|\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}}\delta_s(f,\cdot)\Big\|_2\ll\left(\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}}\|\delta_s(f,\cdot)\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\leq \left(\sum_{s \in \mathfrak{N}_n^{\gamma'}} \|\delta_s(f,\cdot)\|_2^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 2^{-n\,r_1} \left(\sum_{s \in \mathfrak{N}_n^{\gamma'}} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f,\cdot)\|_2^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-n\,r_1} \|f\|_{B^r_{2,\theta}} \leq 2^{-n\,r_1}. \qquad (4)$$

Пусть теперь $\theta \in (2,\infty)$. Тогда, воспользовавшись леммой A, неравенством Гельдера с показателем $\frac{\theta}{2}$ и леммой Б, будем иметь

$$\Big\| \sum_{s \in \mathfrak{N}_n^{\gamma'}} \delta_s(f,\cdot) \Big\|_2 \ll \left(\sum_{s \in \mathfrak{N}_n^{\gamma'}} \|\delta_s(f,\cdot)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s \in \mathfrak{N}_n^{\gamma'}} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f,\cdot)\|_2^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{s \in \mathfrak{N}_n^{\gamma'}} 2^{-2(s,r)\frac{\theta}{\theta-2}} \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^r_{2,\theta}} \left(\sum_{s \in \mathfrak{N}_n^{\gamma'}} 2^{-2(s,r)\frac{\theta}{\theta-2}} \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \ll 2^{-n\,r_1}\, n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}. \qquad (5)$$

Таким образом, согласно (4) и (5) для $f \in B^r_{2,\theta}$, $1 \leq \theta < \infty$, имеем

$$\Big\| \sum_{s \in \mathfrak{N}_n^{\gamma'}} \delta_s(f,\cdot) \Big\|_2 \ll 2^{-n\,r_1}\, n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (6)$$

Далее, по числу M подберем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялись неравенства $|Q^{\gamma'}_{m-1}| < M \leq |Q^{\gamma'}_m|$. Тогда, приняв во внимание соотношения $|Q^{\gamma'}_m| \asymp |Q^{\gamma'}_{m-1}| \asymp 2^m\, m^{\nu-1}$, будем иметь $M \asymp 2^m\, m^{\nu-1}$.

Положим $\sigma = \min\left\{\frac{1}{2}(r_1-1),\, \frac{1}{2}\right\}$ и

$$\overline{M}_n = \begin{cases} C_\sigma\, 2^{-\frac{1}{2}(m-n)} & \text{при } n < m, \\ C_\sigma\, M\, 2^{-\sigma(n-m)} & \text{при } n \geq m, \end{cases}$$

где $C_\sigma > 0$ подобрано так, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n \leq M.$$

Заметим, что такое $C_\sigma > 0$ существует, поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n = C_\sigma \sum_{n=1}^{m-1} 2^{-\frac{1}{2}(m-n)} + C_\sigma \sum_{n=m}^{\infty} M\, 2^{-\sigma(n-m)} \leq$$

$$\leq C_\sigma\, 2^{-\frac{1}{2}m}\, 2^{\frac{1}{2}(m-1)} + C_\sigma\, M \ll M.$$

Обозначим $M_n = [\,\overline{M}_n\,]$, где $[\,a\,]$ — целая часть числа a. Тогда $M_n = 0$, если $C_\sigma\, M\, 2^{-\sigma(n-m)} < 1$, т.е. при $n > m_1 = m + \sigma^{-1} \log C_\sigma\, M$.

Положим

$$S_{\Delta Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta}) = \left\{ g = \sum_{k \in \Delta Q_n^{\gamma'}} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},\ f \in B^r_{2,\theta} \right\}$$

и

$$\|S_{\Delta Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta})\|_q = \sup_{g \in S_{\Delta Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta})} \|g(\cdot)\|_q. \tag{7}$$

В принятых обозначениях можем записать

$$\varepsilon_M\big(B^r_{2,\theta}, L_q\big) \leq \sum_{n \leq m_1} \varepsilon_{M_n}\big(S_{\Delta Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta}), L_q\big) +$$

$$+ \sum_{n > m_1} \|S_{\triangle\, Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta})\|_q = I_1 + I_2. \tag{8}$$

Оценим сначала слагаемое I_2. Для $f \in B^r_{2,\theta}$, в силу теоремы A, будем иметь

$$\|S_{\Delta Q_n^{\gamma'}}(f,\cdot)\|_q = \|S_{Q_n^{\gamma'}}(f,\cdot) - S_{Q_{n-1}^{\gamma'}}(f,\cdot) + f(\cdot) - f(\cdot)\|_q \leq$$

$$\leq \|f(\cdot) - S_{Q_n^{\gamma'}}(f,\cdot)\|_q + \|f(\cdot) - S_{Q_{n-1}^{\gamma'}}(f,\cdot)\|_q \ll$$

$$\ll 2^{-n\left(r_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}\right)}\ n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

Следовательно, согласно (7) справедлива оценка

$$\|S_{\Delta Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta})\|_q \ll 2^{-n\left(r_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}\right)}\ n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{9}$$

Таким образом, воспользовавшись (9), находим

$$I_2 = \sum_{n>m_1} \|S_{\Delta Q_n^{\gamma'}}(B_{2,\theta}^r)\|_q \ll \sum_{n>m_1} 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}\right)}\, n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll$$

$$\ll \sum_{n>m_1} 2^{-n(r_1-1)}\, n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll$$

$$\ll 2^{-m_1(r_1-1)}\, m_1^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} = J_1. \qquad (10)$$

Чтобы продолжить оценку величины J_1, рассмотрим два случая.

Предположим сначала, что $r_1 \geq 2$. В таком случае $\sigma = \frac{1}{2}$ и соответственно $m_1 = m + \log{(C_\sigma M)^2}$. Тогда для J_1 получим

$$J_1 = 2^{-m(r_1-1)}(C_\sigma M)^{-2(r_1-1)}\left(m + \log(C_\sigma M)^2\right)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \asymp$$

$$\asymp 2^{-m(r_1-1)} 2^{-2(r_1-1)m}\, m^{-2(\nu-1)(r_1-1)}\, m^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll$$

$$\ll 2^{-m\, r_1}\, m^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (11)$$

Пусть теперь выполнено условие $1 < r_1 < 2$. Тогда $\sigma = \frac{1}{2}(r_1 - 1)$ и, следовательно, $m_1 = m + \log(C_\sigma M)^{\frac{2}{r_1-1}}$. В таком случае величина J_1 допускает оценку

$$J_1 = 2^{-m(r_1-1)}(C_\sigma M)^{-2}\left(m + \log(C_\sigma M)^{\frac{2}{r_1-1}}\right)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \asymp$$

$$\asymp 2^{-m(r_1-1)} 2^{-2\,m}\, m^{-2(\nu-1)}\, m^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll 2^{-m\, r_1}\, m^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (12)$$

Таким образом, приняв во внимание (11) и (12), из (10) будем иметь

$$I_2 \ll 2^{-m\, r_1}\, m^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (13)$$

Теперь перейдем к оценке величины I_1. С этой целью представим ее в виде двух слагаемых

$$I_1 = \sum_{n\leq m} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\Delta\, Q_n^{\gamma'}}(B_{2,\theta}^r), L_q\right) + \sum_{m<n\leq m_1} \varepsilon_{M_n}\left(S_{\Delta Q_n^{\gamma'}}(B_{2,\theta}^r), L_q\right). \qquad (14)$$

Для оценки первого слагаемого, воспользовавшись леммой B и соотношением (6), будем иметь

$$\sum_{n\le m} \varepsilon_{M_n}\bigl(S_{\triangle\, Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta}), L_q\bigr) \ll$$

$$\ll \sum_{n\le m} 2^{-n\, r_1}\, n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}\, \varepsilon_{M_n}\bigl(T(Q_n^{\gamma'})_2,\, L_q\bigr) \ll$$

$$\ll \sum_{n\le m} 2^{-n\, r_1}\, n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}\, 2^{-C_\sigma M\, 2^{-\frac{1}{2}(m-n)} |Q_n^{\gamma'}|^{-1}} = J_2. \qquad (15)$$

Далее, приняв во внимание соотношения $|Q_n^{\gamma'}| \asymp 2^n\, n^{\nu-1}$ и $M \asymp 2^m\, m^{\nu-1}$, легко убедиться, что величина J_2 допускает оценку

$$J_2 \ll 2^{-m\, r_1}\, m^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}. \qquad (16)$$

Чтобы оценить второе слагаемое правой части (14), также воспользуемся леммой B и соотношением (6). Выполнив элементарные преобразования, будем иметь

$$\sum_{m<n\le m_1} \varepsilon_{M_n}\bigl(S_{\triangle\, Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta}), L_q\bigr) \ll \sum_{m<n\le m_1} 2^{-n\, r_1}\, n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}\, M^{-1} \times$$

$$\times 2^{\sigma(n-m)}\, |Q_n^{\gamma'}| \ln^2(|Q_n^{\gamma'}| M^{-1}) \ll 2^{-r_1\, m}\, m^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (17)$$

Таким образом, с учетом (14) – (17), приходим к оценке

$$I_1 \ll 2^{-m\, r_1}\, m^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (18)$$

Наконец, подставив (13) и (18) в (8) и приняв во внимание, что $M \asymp 2^m\, m^{\nu-1}$, получаем искомую оценку величины $\varepsilon_M\bigl(B^r_{2,\theta}, L_q\bigr)$:

$$\varepsilon_M\bigl(B^r_{2,\theta}, L_q\bigr) \ll 2^{-m\, r_1}\, m^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1}.$$

Теорема 1 доказана.

Для доказательства следующего утверждения нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения.

Пусть

$$\overline{\rho}(s) = \left\{k = (k_1, \dots, k_d) :\ 2^{s_j - 1} \le k_j < 2^{s_j},\ j = \overline{1, d}\right\}$$

и

$$T(\overline{\rho}(s)) = \left\{ t(x) = \sum_{k \in \overline{\rho}(s)} \widehat{t}(k)\, e^{i(k,x)} \right\}.$$

Заметим, что каждый полином $t \in T(\overline{\rho}(s))$, $s_j \ge 2$, $j = \overline{1,d}$, может быть представлен в виде

$$t(x) = e^{i(k^s,\, x)} t^1(x),$$

где $k^s = (k_1^{s_1}, \dots, k_d^{s_d})$, $k_j^{s_j} = 2^{s_j-1} + 2^{s_j-2}$, $j = \overline{1,d}$ и $t^1(x)$ — полином степени 2^{s_j-2} по переменной x_j, $j = \overline{1,d}$.

Для $m = (m_1, \dots, m_d)$, $m_j \in \mathbb{Z}_+$, обозначим через $RT(m)$ множество действительных тригонометрических полиномов t вида:

$$t(x) = \sum_{\substack{|k_j| \le m_j \\ j = \overline{1,d}}} \widehat{t}(k) e^{i(k,x)}.$$

Пусть $T'(\overline{\rho}(s))$ обозначает множество тригонометрических полиномов t вида

$$t(x) = e^{i(k^s,x)}\, t^1(x),\ t^1 \in RT(2^{s-2}).$$

Для четного n определим множества

$$\Omega_n^* = \left\{s :\ \|s\|_1 = n,\ s_j - \text{четные числа},\ j = \overline{1,d}\right\},$$

$$Q_n' = \bigcup_{s \in \Omega_n^*} \overline{\rho}(s),$$

$$T'(Q_n') = \left\{ t(x) = \sum_{s \in \Omega_n^*} e^{i(k^s,x)} t_s^1(x),\ t_s^1 \in RT(2^{s-2}) \right\}.$$

Имеет место теорема.

Теорема 2. *Пусть $r_1 > 0$, $1 \le \theta < \infty$. Тогда*

$$\varepsilon_M(B^r_{\infty,\theta}, L_1) \gg M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}. \tag{19}$$

Доказательство. Заметим, что для доказательства оценки (19) достаточно рассмотреть случай $\nu = d$. Получим сначала оценку величины $\varepsilon_M\big(B^r_{\infty,\theta}, L_2\big)$. С этой целью рассмотрим множество тригонометрических полиномов

$$T^{'}(Q^{'}_n)_\infty = \big\{t \in T^{'}(Q^{'}_n) : \ \|t^1_s\|_\infty \le 1\big\}.$$

Для $f \in L_2(\pi_d)$ определим функции

$$f^R_n(x) = \sum_{s \in \Omega^*_n} e^{i(k^s,x)} \operatorname{Re}\big(\overline{\delta}_s(f,x) e^{-i(k^s,x)}\big),$$

$$f^I_n(x) = \sum_{s \in \Omega^*_n} e^{i(k^s,x)} \operatorname{Im}\big(\overline{\delta}_s(f,x) e^{-i(k^s,x)}\big),$$

где

$$\overline{\delta}_s(f,x) = \sum_{k \in \overline{\rho}(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)}.$$

Тогда $f^R_n \in T'(Q'_n)$ и для любого $t \in T'(Q'_n)$ имеем

$$\|f(\cdot\,) - t(\cdot\,)\|^2_2 \ge \|f^R_n(\cdot\,) + i\, f^I_n(\cdot\,) - t(\cdot\,)\|_2 =$$

$$= \sum_{s \in \Omega^*_n} \|t_s(\cdot\,) - \operatorname{Re}\big(\overline{\delta}_s(f,\cdot\,)e^{-i(k^s,\cdot)}\big) - i\operatorname{Im}\big(\overline{\delta}_s(f,\cdot\,)e^{-i(k^s,\cdot)}\big)\|^2_2 \ge$$

$$\ge \|t(\cdot\,) - f^R_n(\cdot\,)\|^2_2.$$

Отсюда делаем вывод, что если задана ε-сеть множества $T'(Q'_n)_\infty$ в L_2, то можно считать, что ее элементы принадлежат $T'(Q'_n)$.

Далее, положим $M = |Q'_n| \asymp 2^n\, n^{d-1}$ и воспользуемся оценкой из [9]:

$$\varepsilon_M\big(T'(Q_n)_\infty\, 2^{-r_1 n}, L_2\big) \gg 2^{-r_1 n} |\Omega^*_n|^{\frac{1}{2}} \asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2}}. \quad (20)$$

Поскольку имеет место включение

$$T'(Q'_n)_\infty\, 2^{-r_1 n} \subset C_1(d) H^r_\infty, \quad (21)$$

то $\forall\, f \in T'(Q'_n)_\infty\, 2^{-r_1 n}$ выполнено соотношение (см. [18, с. 32])

$$\|A_s(f,\cdot\,)\|_\infty \ll 2^{-(r,s)}.$$

Поэтому для $f \in T'(Q_n')_\infty \, 2^{-r_1 n}$ будем иметь

$$\|f\|_{B^r_{\infty,\theta}} \asymp \left(\sum_{s \in \Omega_n^*} 2^{(s,r)\theta} \, \|A_s(f,\cdot)\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \left(\sum_{s \in \Omega_n^*} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp n^{\frac{d-1}{\theta}}.$$

Отсюда, приняв во внимание (21), заключаем, что

$$T'(Q_n')_\infty \, 2^{-r_1 n} \, n^{-\frac{d-1}{\theta}} \subset C_2(d) \, B^r_{\infty,\theta}, \; 1 \le \theta < \infty. \tag{22}$$

Таким образом, согласно вложению (22) и оценке (20), можем записать

$$\varepsilon_M \big(B^r_{\infty,\theta}, L_2 \big) \gg \varepsilon_M \big(T'(Q_n')_\infty \, 2^{-r_1 n} \, n^{-\frac{d-1}{\theta}}, L_2 \big) \gg$$
$$\gg 2^{-r_1 n} n^{\frac{d-1}{2}} \, n^{-\frac{d-1}{\theta}} = 2^{-r_1 n} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)} \asymp$$
$$\asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}. \tag{23}$$

Отправляясь от (23), получим оценку (19). Из (23) следует, что в $T'(Q_n')_\infty \, 2^{-r_1 n} \, n^{-\frac{d-1}{\theta}}$ найдется 2^M функций $\{f_j(\cdot)\}_{j=1}^{2^M}$ таких, что для $i \ne j$ будет выполнена оценка

$$\|f_i(\cdot) - f_j(\cdot)\|_2 \gg 2^{-r_1 n} \, n^{(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}. \tag{24}$$

Покажем, что из (24) вытекает оценка

$$\|f_i(\cdot) - f_j(\cdot)\|_1 \gg 2^{-r_1 n} \, n^{(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}. \tag{25}$$

Действительно, воспользовавшись неравенством [20, с. 330]

$$\|f(\cdot)\|_a \le \|f(\cdot)\|_1^\alpha \, \|f(\cdot)\|_b^{1-\alpha}, \; f \in L_b, \; 1 < a < b,$$

$\alpha = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right)^{-1}$, можем записать

$$\|f(\cdot)\|_2 \le \|f(\cdot)\|_1^{\frac{1}{3}} \, \|f(\cdot)\|_4^{\frac{2}{3}}.$$

Отсюда имеем

$$\|f(\cdot)\|_1^{\frac{1}{3}} \ge \|f(\cdot)\|_2 \, \|f(\cdot)\|_4^{-\frac{2}{3}}. \tag{26}$$

Далее, пусть
$$f_j(x) = 2^{-r_1 n}\, n^{-\frac{d-1}{\theta}} \varphi_j(x),$$
где $\varphi_j \in T'(Q'_n)_\infty$.
Тогда в силу леммы A для $i \neq j$ будем иметь

$$\|f_i(\cdot) - f_j(\cdot)\|_4 \ll \left(\sum_{s \in \Omega_n^*} \|\delta_s((f_i - f_j), \cdot)\|_4^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll 2^{-r_1 n}\, n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in \Omega_n^*} \|\delta_s((\varphi_i - \varphi_j), \cdot)\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll 2^{-r_1 n}\, n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in \Omega_n^*} \big(\|\delta_s(\varphi_i, \cdot)\|_\infty + \|\delta_s(\varphi_j, \cdot)\|_\infty \big)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll 2^{-r_1 n}\, n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in \Omega_n^*} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{-r_1 n}\, n^{(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}. \qquad (27)$$

Таким образом, воспользовавшись оценками (24), (27) и соотношением (26), получаем (25):

$$\|f_i(\cdot) - f_j(\cdot)\|_1 \geq 2^{-3r_1 n}\, n^{3(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}\, 2^{2r_1 n}\, n^{2(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)} =$$

$$= 2^{-r_1 n}\, n^{(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}.$$

Отсюда следует искомая оценка

$$\varepsilon_M\big(B^r_{\infty,\theta}, L_1\big) \gg M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}.$$

Теорема 2 доказана.

Теперь, отправляясь от оценок (3) и (19) можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $1 \leq q < \infty$, $2 \leq p \leq \infty$, $2 \leq \theta < \infty$, $, r_1 > 1$. *Тогда*
$$\varepsilon_M\big(B^r_{p,\theta}, L_q\big) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}.$$

Далее, принимая во внимание связь между энтропийными числами $\varepsilon_M\big(B^r_{p,\theta}, L_q\big)$ и ε-энтропией $H_\varepsilon\big(B^r_{p,\theta}, L_q\big)$ (см. комментарий к определению этих характеристик) приведем утверждения, соответствующие теоремам 1–3, относящиеся к оценкам величин $H_\varepsilon\big(B^r_{p,\theta}, L_q\big)$.

Теорема $1'$. *Пусть* $1 \le q < \infty$, $2 \le p \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $r_1 > 1$. *Тогда*

$$H_\varepsilon\big(B^r_{p,\theta}, L_q\big) \ll \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(\nu-1)\left(1+\frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)}, \ \ \varepsilon \to 0.$$

Теорема $2'$. *Пусть* $r_1 > 0$, $1 \le \theta < \infty$. *Тогда*

$$H_\varepsilon\big(B^r_{\infty,\theta}, L_1\big) \gg \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(\nu-1)\left(1+\frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\right)}, \ \ \varepsilon \to 0.$$

Теорема $3'$. *Пусть* $1 \le q < \infty$, $2 \le p \le \infty$, $2 \le \theta < \infty$, $r_1 > 1$. *Тогда*

$$H_\varepsilon\big(B^r_{p,\theta}, L_q\big) \asymp \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(\nu-1)\left(1+\frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\right)}, \ \ \varepsilon \to 0.$$

В заключение работы отметим, что теоремы 1–3, $1'$–$3'$ дополняют ряд утверждений, которые были получены при исследовании энтропийных чисел и ε-энтропии классов H^r_p и $W^r_{p,\alpha}$ периодических функций многих переменных в работах [8–16].

1. *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1961. — **60**. — С. 42–81.

2. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969. — 480 с.

3. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$, $(0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi;\ j = 1, \ldots, n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1965. — **77**. — С. 5–34.

4. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **187**. — С. 143–161.

5. *Колмогоров А. Н.* Асимптотические характеристики некоторых вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН СССР. — 1956. — **108**, № 3. — С. 385 – 389.

6. *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. — 1959. — **14**, № 2. — С. 3 – 86.

7. *Höllig K.* Diameters of classes of smooth functions // Quantitative approximation. N.Y.: Acad. Press. — 1980. — P. 163 – 176.

8. *Темляков В. Н.* Об оценках ε-энтропии и поперечников классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Докл. АН СССР. — 1988. — **301**, № 2. — С. 288 – 291.

9. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **189**. — С. 138 – 168.

10. *Belinskií E. S.* Approximation of functions of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics, and estimates of ε-entropy // Anal. Math. — 1989. — **15**, № 2. — P. 67 – 74.

11. *Белинский Э. С.* Асимптотические характеристики классов функций с условиями на смешанную производную (смешанную разность) // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль: Ярослав. ун-т, 1990. — С. 22 – 37.

12. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L^1 // Мат. заметки. — 1994. — **56**, № 5. — С. 57 – 86.

13. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* Об оценке аппроксимативных характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Мат. заметки. — 1995. — **58**, № 6. — С. 922 – 925.

14. *Belinskií E. S.* Estimates of Entropy Numbers and Gaussian Measures for Classes of Functions with Bounded Mixed Derivative // J. of Approx. Theory. — 1998. — **93**, № 2. — P. 114 – 127.

15. *Temlyakov V. N.* An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the Kolmogorov widths // East J. Approx. — 1996. — **2**, № 1. — P. 89 – 98.

16. *Temlyakov V. N.* An inequality for the entropy numbers and its application // J. of Approx. Theory. — 2013. — **173**. — P. 110 – 121.

17. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. — 1991. — **43**, № 10. — С. 1398 – 1408.

18. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**. — С. 1 – 112.

19. *Харди Г., Литтлвуд И. Е., Полиа Дж.* Неравенства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.
20. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т. 1. — 615 с.