

УДК 519.6

Умови збіжності та алгоритмічні аспекти програмної реалізації FD-методу розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна–Гордона

В.Л. Макаров¹, Д.В. Драгунов², Д.А. Сембер³

¹ *Інститут математики НАН України, Київ;
makarov@imath.kiev.ua*

² *Інститут математики НАН України, Київ;
dragunovdenis@gmail.com*

³ *Інститут математики НАН України, Київ;
semberdmitry@gmail.com*

We propose a functional-discrete method for solving the Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation. Sufficient conditions for the superexponential convergence of this method are obtained. Also presented a detailed description of software implementation of the proposed method by using numerical integration scheme. The obtained theoretical results are illustrated by a numerical example.

Предложен функционально-дискретный метод решения задачи Коши для нелинейного уравнения Клейна–Гордона. Найдены достаточные условия, обеспечивающие суперэкспоненциальную скорость сходимости метода. Предложен подход к программной реализации разработанного метода с использованием численных схем интегрирования. Полученные теоретические результаты продемонстрированы на численном примере.

1. Вступ

Відомо, що рівняння Клейна–Гордона:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \mathbb{N}(u(x, y)) = f(x, y), \quad (1)$$

яке є релятивістською версією рівняння Шредінгера, що описує скалярні (або псевдоскалярні) безспінові елементарні частинки, широко застосовується в сучасній фізиці. Воно є моделлю, яка описує хвильову функцію нейтрально зарядженої елементарної частинки [1]. Також рівняння Клейна–Гордона має важливі застосування у фізиці плазми. Зокрема, в поєднанні з рівнянням Захарова воно описує взаємодію хвиль Ленгмюра та іонно-звукових хвиль у плазмі [2]. В астрофізиці в поєднанні з рівнянням Максвелла рівняння Клейна–Гордона описує мінімально зв'язане заряджене поле бозона в сферично-симетричному просторі-часі [3]. Окрім того, в поєднанні з самим рівнянням Шредінгера воно описує систему скалярних консервативних нуклонів, які пов'язані взаємодією Юкави з нейтральними скалярними мезонами [4].

Взагалі, рівняння (1) при різних $\mathbb{N}(u(x, y))$ охоплює безліч узагальнених рівнянь Клейна–Гордона, які зустрічаються у фізиці. Наприклад, при $\mathbb{N}(u(x, y)) = \pm(u(x, y) - u^3(x, y))$ рівняння (1) описує рух системи в теорії поля [5]. Якщо $\mathbb{N}(u(x, y)) = \sin(u(x, y))$, то (1) стає добре відомим рівнянням синус-Гордона (sine-Gordon equation), яке, зокрема, описує рух жорсткого маятника, прикріпленого до еластичної струни [6], або ж рух рідин, що швидко обертаються [7]. Рівняння синус-Гордона зустрічається також при вивченні поширення магнітного потоку в переходах Джозефсона, а також динаміки доменної стінки в магнітних кристалах [8].

Існує велика кількість чисельних та аналітичних методів розв'язання рівняння Клейна–Гордона (1). Зокрема, до аналітичних методів можна віднести розширений sine-cosine метод [10], tanh-метод [9], метод гомотопій [11] та ін. Серед чисельних методів можна виділити, наприклад, групу скінченно-різницевих методів (див., наприклад, [12]), а також Рунге–Кутта Фур'є псевдо-спектральні схеми [13]. Запропонований в даній праці функціонально-дискретний метод (FD-метод) являє собою симбіоз скінченно-різницевого методу та методу гомотопій, завдяки чому йому притаманні основні властивості як аналітичних, так і дискретних методів одночасно. Цей метод базується

на загальній схемі FD-методу розв'язування операторних рівнянь, наведений в [14, 15], і походить з функціонально-дискретного методу розв'язування задачі Штурма–Луівілля [16].

Постановку задачі Коші для рівняння Клейна–Гордона (1) та теорему про існування її розв'язку наведено в п. 2. У п. 3 подано опис алгоритму FD-методу розв'язування задачі Коші для рівняння (1). У п. 4 доведено допоміжне твердження про апроксимаційні властивості однієї задачі Коші для гіперболічного рівняння з кусково-сталим коефіцієнтом (теорема 4.1). Ця теорема є ключовою в доведенні теореми 5.1, яка забезпечує достатні умови збіжності запропонованого FD-методу (п. 5). У п. 6 наведено один з практичних підходів реалізації розв'язування задачі Коші для рівняння Клейна–Гордона (1) з використанням чисельних схем інтегрування. Чисельний приклад подано в п. 7.

2. Постановка задачі

Розглянемо задачу Коші для рівняння Клейна–Гордона вигляду

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \mathbb{N}(u(x, y)) = f(x, y), \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u'_y(x, y)|_{y=0} = \psi(x), \quad (3)$$

$(x, y) \in \Omega$, де $\Omega = \{(x, y) | -\infty < x < +\infty, y > 0\}$.

Позначимо через $C^k(\mathbb{R}^m)$ простір функцій, неперервно-диференційованих на \mathbb{R}^m до k -го порядку включно. Через $C_b^k(\mathbb{R}^m)$ позначимо підмножину простору $C^k(\mathbb{R}^m)$, до якої входять функції $f(x) \in C^k(\mathbb{R}^m)$, що задовольняють нерівність

$$\|f\|_{C_b^k(\mathbb{R}^m)} \stackrel{def}{=} \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |\partial^\alpha f(x)| < \infty, \quad (4)$$

де $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультиіндекс, $\alpha_i \geq 0$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ – частинна похідна порядку $|\alpha|$. Неважко показати, що лінійний простір $C_b^k(\mathbb{R}^m)$, оснащений нормою $\|\cdot\|_{C_b^k(\mathbb{R}^m)}$, є банаховим простором (див. [17]).

Має місце теорема, що є певним доповненням відповідних результатів з [18], де розглядається випадок $f(x, y) \equiv 0$.

Теорема 2.1. (про локальне існування розв'язку задачі Коші для квазілінійного хвильового рівняння). Нехай $\mathbb{N}(u) \in C^2(\mathbb{R})$, $\phi(x) \in C_b^2(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in C_b^1(\mathbb{R})$, $f(x, y) \in C_b^1(D_\varepsilon)$. Тоді двічі неперервно-диференційований розв'язок $u(x, y)$ задачі Коші (2), (3) існує принаймні на множині

$$D_\varepsilon = \{\mathbb{R} \times (0; \varepsilon)\}, \quad (5)$$

де

$$\varepsilon = \min \left\{ 1; \sqrt{2} \left(\max_{|u| \leq M_1} |\mathbb{N}(u)| \right)^{-\frac{1}{2}}; \sqrt{2q_1} \left(\max_{|u| \leq M_1} |\mathbb{N}'(u)| \right)^{-\frac{1}{2}} \right\}, \quad (6)$$

$$M_1 = \|u_1(x, y)\|_{C(\mathbb{R} \times [0, 1])} + 1, \quad (7)$$

$u_1(x, y)$ – розв'язок задачі Коші (2), (3) при $\mathbb{N}(u) \equiv 0$, $0 < q_1 < 1$, і на цій множині він єдиний.

Доведення. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $\mathbb{N}(0) = 0$ (цього завжди можна досягти, змінивши відповідним чином функцію $f(x, y)$).

Розглянемо послідовність функцій $u_n(x, y)$, які є розв'язками рекурентної системи задач Коші:

$$\frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial x^2} = \mathbb{N}(u_{n-1}(x, y)) + f(x, y),$$

$$u_n(x, 0) = \phi(x),$$

$$\left. \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \psi(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

де $u_0(x, y) = 0$. Використовуючи формулу Д'Аламбера, знаходимо

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2}(\phi(x+y) + \phi(x-y)) + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^y \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$u_n(x, y) = \frac{1}{2}(\phi(x+y) + \phi(x-y)) + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^y \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} f(\xi, \eta) d\xi d\eta +$$

$$+\frac{1}{2} \int_0^y \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} \mathbb{N}(u_{n-1}(\xi, \eta)) d\xi d\eta, \quad n = 2, 3, \dots,$$

звідси

$$u_n(x, y) = u_1(x, y) + \frac{1}{2} \int_0^y \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} \mathbb{N}(u_{n-1}(\xi, \eta)) d\xi d\eta. \quad (8)$$

Диференціюючи (8), одержуємо

$$\frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial x} + \frac{1}{2} \int_0^y \left[\mathbb{N}(u_{n-1}(x + (y - \eta), \eta)) - \mathbb{N}(u_{n-1}(x - (y - \eta), \eta)) \right] d\eta, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_n(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial y} + \frac{1}{2} \int_0^y \left[\mathbb{N}(u_{n-1}(x + (y - \eta), \eta)) + \mathbb{N}(u_{n-1}(x - (y - \eta), \eta)) \right] d\eta. \quad (10)$$

Продовжуючи диференціювання, з (9), (10) отримуємо такі рівності:

$$\frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_1(x, y)}{\partial y^2} + \mathbb{N}(u_{n-1}(x, y)) + \frac{1}{2} \int_0^y \left[\mathbb{N}'(u_{n-1}(\xi, \eta)) (u_{n-1}(\xi, \eta))'_\xi \right]_{\xi=x-(y-\eta)}^{\xi=x+(y-\eta)} d\eta; \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \int_0^y \left[\mathbb{N}'(u_{n-1}(\xi, \eta)) (u_{n-1}(\xi, \eta))'_\xi \right]_{\xi=x-(y-\eta)}^{\xi=x+(y-\eta)} d\eta; \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial x \partial y} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \int_0^y \left[\mathbb{N}'(u_{n-1}(\xi, \eta)) (u_{n-1}(\xi, \eta))'_\xi \right] \Big|_{\xi=x+(y-\eta)} + \\
 & + \mathbb{N}'(u_{n-1}(\xi, \eta)) (u_{n-1}(\xi, \eta))'_\xi \Big|_{\xi=x-(y-\eta)} d\eta. \quad (13)
 \end{aligned}$$

З формули (8), враховуючи (5), (6), (7), одержуємо оцінку

$$\begin{aligned}
 \|u_n(x, y)\|_{C(D_\varepsilon)} & \leq \|u_1(x, y)\|_{C(D_\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2}{2} \|\mathbb{N}(u_{n-1}(x, y))\|_{C(D_\varepsilon)} \leq \\
 & \leq \|u_1(x, y)\|_{C(D_1)} + 1 = M_1, \quad (14)
 \end{aligned}$$

тобто послідовність $\{u_n(x, y)\}$ є рівномірно обмеженою на множині D_ε .

Доведемо, що вона є рівномірно збіжною в просторі $C(D_\varepsilon)$, оснащеному чебишовською метрикою. Для цього розглянемо допоміжну послідовність функцій $\{\hat{u}_n(x, y)\}$, визначену таким чином:

$$\hat{u}_n(x, y) \stackrel{def}{=} u_{n+1}(x, y) - u_n(x, y).$$

З формули (8) випливає, що

$$\begin{aligned}
 \|\hat{u}_n(x, y)\|_{C(D_\varepsilon)} & \leq \frac{\varepsilon^2}{2} L_1 \|u_n(x, y) - u_{n-1}(x, y)\|_{C(D_\varepsilon)} = \\
 & = \frac{\varepsilon^2}{2} L_1 \|\hat{u}_{n-1}(x, y)\|_{C(D_\varepsilon)}, \quad (15)
 \end{aligned}$$

де $L_1 = \max_{|u| \leq M_1} |\mathbb{N}'(u)|$.

Очевидно, що для вибраного нами ε (6), з формули (15) легко одержати нерівність

$$\begin{aligned}
 \|\hat{u}_n(x, y)\|_{C(D_\varepsilon)} & \leq q \|\hat{u}_{n-1}(x, y)\|_{C(D_\varepsilon)} \leq \dots \leq q^{n-1} \|\hat{u}_1(x, y)\|_{C(D_\varepsilon)} = \\
 & = q^{n-1} \|u_1(x, y)\|_{C(D_\varepsilon)}, \quad (16)
 \end{aligned}$$

де $q = \frac{\varepsilon^2 L_1}{2}$. Для збіжності ітераційного процесу потрібно, щоб q було меншим ніж 1. Візьмемо, наприклад, $q = q_1$, тоді $\varepsilon = \sqrt{\frac{2q_1}{L_1}}$.

Тоді

$$\begin{aligned} \|u_n(x, y) - u_m(x, y)\|_{C(D_\varepsilon)} &\leq (q^m + q^{m+1} + \dots + q^{n-1}) \|u_1(x, y)\|_{C(D_\varepsilon)} = \\ &= \frac{q^m - q^{n-1}}{1 - q} \|u_1(x, y)\|_{C(D_\varepsilon)} \leq \frac{q^m}{1 - q} \|u_1(x, y)\|_{C(D_\varepsilon)}, \quad \text{при } m < n. \end{aligned}$$

З цієї нерівності випливає, що послідовність функцій $\{u_n(x, y)\}$ є рівномірно збіжною в просторі $C(D_\varepsilon)$ до деякої неперервної функції $u(x, y) \in C(D_\varepsilon)$. Враховуючи (14) з рівностей (9)–(13), неважко одержати наступні оцінки:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u_m(x, y)}{\partial x} \right\|_{C(D_\varepsilon)}, \left\| \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial u_m(x, y)}{\partial y} \right\|_{C(D_\varepsilon)} &\leq \\ &\leq \frac{\varepsilon L_1}{2} \|u_{n-1}(x, y) - u_{m-1}(x, y)\|_{C(D_\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_m(x, y)}{\partial y^2} \right\|_{C(D_\varepsilon)}, \left\| \frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_m(x, y)}{\partial x^2} \right\|_{C(D_\varepsilon)}, \\ \left\| \frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_m(x, y)}{\partial x \partial y} \right\|_{C(D_\varepsilon)} &\leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \left[L_1 \left\| \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u_m(x, y)}{\partial x} \right\|_{C(D_\varepsilon)} + \right. \\ &\left. + \max_{|u| < M_1} |N''(u)| \left\| \frac{\partial u_{m-1}(x, y)}{\partial x} \right\|_{C(D_\varepsilon)} \|u_{n-1}(x, y) - u_{m-1}(x, y)\|_{C(D_\varepsilon)} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Оцінимо множник $\left\| \frac{\partial u_{m-1}(x, y)}{\partial x} \right\|_{C(D_\varepsilon)}$ з нерівності (18). З (9) отримуємо:

$$\left\| \frac{\partial u_{m-1}(x, y)}{\partial x} \right\|_{C(D_\varepsilon)} \leq \left\| \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial x} \right\|_{C(D_\varepsilon)} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{L_1}{2} \int_0^y \max_{(x,y) \in D_\varepsilon} |u_{m-2}(x+y-\eta, \eta) - u_{m-2}(x-y+\eta, \eta)| d\eta = \\
 & = \left\| \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial x} \right\|_{C(D_\varepsilon)} + \frac{L_1}{2} \int_0^y \max_{(x,y) \in D_\varepsilon} \left| \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \frac{\partial u_{m-2}(t, \eta)}{\partial t} dt \right| d\eta \leq \\
 & \leq \left\| \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial x} \right\|_{C(D_\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2 L_1}{2} \left\| \frac{\partial u_{m-2}(x, y)}{\partial x} \right\|_{C(D_\varepsilon)}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

З нерівності (19) одержимо

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial u_{m-1}(x, y)}{\partial x} \right\|_{C(D_\varepsilon)} & \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon^2 L_1}{2}} \left\| \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial x} \right\|_{C(D_\varepsilon)} + \\
 & + \left(\frac{\varepsilon^2 L_1}{2} \right)^{m-2} \left\| \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial x} \right\|_{C(D_\varepsilon)} = \\
 & = \left(\frac{1}{1-q} + q^{m-2} \right) \left\| \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial x} \right\|_{C(D_\varepsilon)}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Отже, з формули (18), враховуючи оцінки (17) та (20), отримуємо:

$$\begin{aligned}
 & \left\| \frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_m(x, y)}{\partial y^2} \right\|_{C(D_\varepsilon)}, \quad \left\| \frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_m(x, y)}{\partial x^2} \right\|_{C(D_\varepsilon)}, \\
 & \left\| \frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_m(x, y)}{\partial x \partial y} \right\|_{C(D_\varepsilon)} \leq \\
 & \leq \left[\frac{\varepsilon^2 L_1^2}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \max_{|u| < M_1} |\mathbb{N}''(u)| \times \right. \\
 & \left. \times \left(\frac{1}{1-q} + q^{m-2} \right) \left\| \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial x} \right\|_{C(D_\varepsilon)} \right] \|u_{n-1}(x, y) - u_{m-1}(x, y)\|_{C(D_\varepsilon)}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Нерівності (17) та (21), з урахуванням вже доведеної нами фундаментальності послідовності $\{u_n(x, y)\}$ у просторі $C(D_\varepsilon)$, доводять фундаментальність послідовностей $\left\{\frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x}\right\}$, $\left\{\frac{\partial u_n(x, y)}{\partial y}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial x^2}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial y^2}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial x \partial y}\right\}$ у тому самому просторі $C(D_\varepsilon)$. Отже, нами доведено, що функція $u(x, y)$, яка є границею послідовності $\{u_n(x, y)\}$ у просторі $C(D_\varepsilon)$, належить простору $C^2(D_\varepsilon)$. Крім того, очевидно, що функція $u(x, y)$ задовольняє задачу Коші (2), (3) принаймні на множині D_ε .

Нехай в D_ε є два розв'язки задачі Коші (2), (3), $u(x, y), v(x, y)$ з $\|u - v\|_{C(D_\varepsilon)} \neq 0$, тоді

$$u(x, y) - v(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^y \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} [\mathbb{N}(u(\xi, \eta)) - \mathbb{N}(v(\xi, \eta))] d\xi d\eta,$$

звідки одержуємо нерівність

$$\|u - v\|_{C(D_\varepsilon)} \leq q \|u - v\|_{C(D_\varepsilon)},$$

яка призводить до протиріччя. Теорему доведено. \square

Зауваження 2.1. Доведену теорему можна узагальнити на багатовимірний випадок, коли замість $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ у рівнянні (2) стоїть оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$. У випадках $m = 2, 3$ замість формули Д'Аламбера слід використовувати формулу Кірхгофа.

3. Загальний опис алгоритму FD-методу розв'язування рівняння Клейна–Гордона

Нехай умови теореми 2.1 є виконаними і, більш того, $N(u) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Надалі будемо розглядати задачу Коші (2), (3) в області $D \subseteq \Omega$:

$$D = \{(x, y) | 0 < y \leq Y_M, X_M - (Y_M - y) < x < X_M + (Y_M - y), \\ -\infty < X_M < +\infty, Y_M > 0, Y_M < \varepsilon\},$$

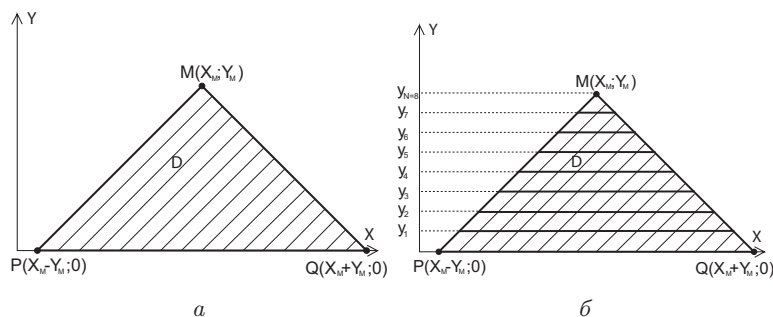


Рис 1. Область D (а) та її розбиття (б).

де стала ε визначається теоремою 2.1 (див. рис.1,а).

Згідно із загальною схемою FD-методу розв'язування операторних рівнянь, викладеною в [14], будемо наближати точний розв'язок $u(x, y)$ задачі функцією $\bar{u}^m(x, y)$, яку можна подати у вигляді суми $\bar{u}^m(x, y) = \sum_{k=0}^m \bar{u}^{(k)}(x, y)$, $m \in \mathbb{N}$. Для визначення функцій $\bar{u}^{(k)}(x, y)$ введемо таке розбиття області D (див. рис.1,б):

$$y_j = y_0 + jh, \quad y_0 = 0, \quad h = Y_M/N, \quad j = \overline{1, N} \quad (22)$$

для деякого фіксованого натурального N .

Далі розглянемо наступне узагальнення задачі Коші (2), (3):

$$\frac{\partial^2 u(x, y, \tau)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x, y, \tau)}{\partial x^2} - \mathbb{N}(u_{\perp}(x, y, \tau)) - \tau [\mathbb{N}(u(x, y, \tau)) - \mathbb{N}(u_{\perp}(x, y, \tau))] = f(x, y), \quad (x, y, \tau) \in D_{\tau}, \quad (23)$$

$$u(x, 0, \tau) = \phi(x), \quad u'_y(x, y, \tau)|_{y=0} = \psi(x),$$

$$\forall x \in [X_M - Y_M, X_M + Y_M], \quad \forall \tau \in [0, 1],$$

$$(u(x, y_j + 0, \tau) - u(x, y_j - 0, \tau)) \equiv [u(x, y, \tau)]_{y=y_j} = 0, \quad (24)$$

$$[u'_y(x, y, \tau)]_{y=y_j} = 0, \quad \forall x \in [X_M - (Y_M - y_j); X_M + (Y_M - y_j)],$$

$$\forall j \in \overline{1, N-1}.$$

де $u(x, y, \tau) \in C^2(D_\tau)$,

$$D_\tau = \{(x, y, \tau) \in [X_M - (Y_M - y), X_M + (Y_M - y)] \times (0, Y_M] \times [0, 1]\},$$

$$u_\perp(x, y, \tau) \equiv u(x, y_j, \tau), \quad \forall j \in \overline{0, N-1},$$

$$\forall (x, y, \tau) \in [X_M - (Y_M - y), X_M + (Y_M - y)] \times (y_j, y_{j+1}] \times [0, 1].$$

Нехай мають місце такі припущення:

- а) розв'язок $u(x, y, \tau)$ задачі (23), (24) існує для будь-якого $\tau \in [0, 1]$;
 б) розв'язок $u(x, y, \tau)$ можна бути знайти у вигляді ряду

$$u(x, y, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} u^{(i)}(x, y) \tau^i; \quad (25)$$

крім того,

$$\frac{\partial u(x, y, \tau)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial u^{(i)}(x, y)}{\partial x} \tau^i, \quad \frac{\partial u(x, y, \tau)}{\partial y} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial u^{(i)}(x, y)}{\partial y} \tau^i,$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y, \tau)}{\partial x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^2 u^{(i)}(x, y)}{\partial x^2} \tau^i, \quad \frac{\partial^2 u(x, y, \tau)}{\partial y^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^2 u^{(i)}(x, y)}{\partial y^2} \tau^i$$

$$\forall (x, y, \tau) \in D_\tau,$$

де функції $u^{(i)}(x, y)$ не залежать від τ .

З припущень "а" "б" випливає, що $u(x, y) = u(x, y, 1) \stackrel{def}{=} u^{(\infty)}(x, y)$, тобто розв'язок $u(x, y)$ задачі Коші (2), (3) можна з довільною точністю знайти за допомогою функції $u^{(m)}(x, y)$. Підставляючи ряд (25) у задачу (23), (24) та прирівнюючи функціональні коефіцієнти при однакових степенях τ , одержимо задачу Коші відносно невідомої функції $u^{(0)}(x, y)$, яку будемо називати *базовою задачею*:

$$\frac{\partial^2 u^{(0)}(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u^{(0)}(x, y)}{\partial x^2} = f(x, y) + \mathbb{N}(u^{(0)}(x, y_{j-1})), \quad (26)$$

$$(x, y) \in D_j = [X_M - (Y_M - y), X_M + (Y_M - y)] \times (y_{j-1}, y_j], \quad j = \overline{1, N},$$

$$(u^{(0)}(x, y_j + 0) - u^{(0)}(x, y_j - 0)) \equiv [u^{(0)}(x, y)]_{y=y_j} = 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} [u_y^{(0)}(x, y)]_{y=y_j} &= 0, \quad \forall x \in [X_M - (Y_M - y_j), X_M + (Y_M - y_j)], \\ &\forall j \in \overline{1, N-1}, \end{aligned}$$

$$u^{(0)}(x, 0) = \phi(x), \quad u_y^{(0)}(x, 0) = \psi(x), \quad \forall x \in [X_M - Y_M; X_M + Y_M],$$

і рекурентну послідовність задач Коші відносно функцій $u^{(k)}(x, y)$, $k = 1, 2, \dots$:

$$\frac{\partial^2 u^{(k)}(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u^{(k)}(x, y)}{\partial x^2} = \mathbb{N}'(u_{\perp}^{(0)}(x, y)) u_{\perp}^{(k)}(x, y) - F_k(x, y) \quad \forall (x, y) \in D, \quad (28)$$

$$\left[u^{(k)}(x, y) \right]_{y=y_j} = 0, \quad \left[\frac{\partial u^{(k)}(x, y)}{\partial y} \right]_{y=y_j} = 0,$$

$$\forall x \in [X_M - (Y_M - y_j), X_M + (Y_M - y_j)] \quad \forall j \in \overline{1, N-1}, \quad (29)$$

$$u^{(k)}(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u^{(k)}(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad x \in [X_M - Y_M, X_M + Y_M], \quad k = 1, 2, \dots,$$

де

$$u_{\perp}(x, y) = u(x, y_j) \quad \forall (x, y) \in D_{j+1} \quad \forall j \in \overline{0, N-1},$$

$$\begin{aligned} F_k(x, y) &= A_k(\mathbb{N}; u_{\perp}^{(0)}(x, y); u_{\perp}^{(1)}(x, y); \dots; u_{\perp}^{(k-1)}(x, y); 0) + \\ &+ A_{k-1}(\mathbb{N}; u_{\perp}^{(0)}(x, y); u_{\perp}^{(1)}(x, y); \dots; u_{\perp}^{(k-1)}(x, y)) - \end{aligned} \quad (30)$$

$$- A_{k-1}(\mathbb{N}; u_{\perp}^{(0)}(x, y); u_{\perp}^{(1)}(x, y); \dots; u_{\perp}^{(k-1)}(x, y)), \quad (x, y) \in D, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тут $A_n(N; v_0, v_1, \dots, v_n)$ – поліноми Адомаєна n -го порядку для функції $N(\cdot)$ (див., наприклад, [19, 20]), які можна обчислити за формулою

$$\begin{aligned} A_n(N; v_0, v_1, \dots, v_n) &= \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n}{d\tau^n} N\left(\sum_{s=0}^{\infty} v_s \tau^s\right) \right|_{\tau=0} = \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n \\ \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_{n+1} = 0 \\ \alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}} N^{(\alpha_1)}(v_0) \frac{v_1^{\alpha_1 - \alpha_2}}{(\alpha_1 - \alpha_2)!} \cdots \frac{v_n^{\alpha_n - \alpha_{n+1}}}{(\alpha_n - \alpha_{n+1})!}. \end{aligned}$$

4. Апроксимаційні властивості базової задачі

Точний розв'язок ${}^{(0)}u(x, y)$ базової задачі (26), (27) з використанням формули Д'Аламбера, можна подати у вигляді (див., наприклад, [21]):

$${}^{(0)}u(x, y) = \frac{1}{2} \left({}^{(0)}u(x - (y - y_{j-1}), y_{j-1}) + {}^{(0)}u(x + (y - y_{j-1}), y_{j-1}) \right) + \frac{1}{2} \int_{x-(y-y_{j-1})}^{x+(y-y_{j-1})} \frac{\partial {}^{(0)}u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=y_{j-1}} d\xi + \quad (31)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{y_{j-1}}^y \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} \left[f(\xi, \eta) - \mathbb{N}({}^{(0)}u(\xi, y_{j-1})) \right] d\xi d\eta \quad \forall (x, y) \in D_j, \quad j = \overline{1, N},$$

$$\left[{}^{(0)}u(x, y) \right]_{y=y_j} = 0, \quad \left[\frac{\partial {}^{(0)}u(x, y)}{\partial y} \right]_{y=y_j} = 0,$$

$$\forall x \in [X_M - (Y_M - y_j), X_M + (Y_M - y_j)], \quad \forall j = \overline{1, N-1},$$

$${}^{(0)}u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial {}^{(0)}u(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \psi(x) \quad \forall x \in [X_M - Y_M; X_M + Y_M].$$

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови теореми 2.1, а $u(x, y)$ та ${}^{(0)}u(x, y)$ ¹ розв'язки задач відповідно (2), (3) та (26), (27). Тоді для достатньо малого h виконується оцінка:*

$$\|u(x, y) - {}^{(0)}u(x, y)\|_{\infty, \overline{D}} \leq hK_1 \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\infty, \overline{D}},$$

де $\|u(x, y) - {}^{(0)}u(x, y)\|_{\infty, \overline{D}} = \max_{(x, y) \in \overline{D}} |u(x, y) - {}^{(0)}u(x, y)|$, стала K_1 не залежить від h .

¹Не виключається існування глобального розв'язку.

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію

$$Z(x, y) = u(x, y) - u^{(0)}(x, y).$$

Очевидно, що вона є неперервною в області D і задовольняє допоміжну задачу Коші:

$$\frac{\partial^2 Z(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Z(x, y)}{\partial x^2} = \mathbb{N}(u^{(0)}(x, y_{j-1})) - \mathbb{N}(u(x, y)), \quad (32)$$

$$(Z(x, y_j + 0) - Z(x, y_j - 0)) \equiv [Z(x, y)]_{y=y_j} = 0, \quad (33)$$

$$\left[\frac{\partial Z(x, y)}{\partial y} \right]_{y=y_j} = 0 \quad \forall x \in [X_M - (Y_M - y_j), X_M + (Y_M - y_j)],$$

$$\forall j \in \overline{1, N-1},$$

$$Z(x, 0) = \frac{\partial Z(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad \forall x \in [X_M - Y_M, X_M + Y_M].$$

Для доведення теореми достатньо показати, що для досить малого значення h існує незалежна від нього стала γ така, що має місце оцінка

$$\|Z(x, y)\|_{\overline{D}_j} \leq h\gamma, \quad \forall j \in \overline{1, N-1}, \quad (34)$$

де $\|Z(x, y)\|_{\overline{D}_j} = \max_{(x, y) \in \overline{D}_j} |Z(x, y)|$. Дійсно, оскільки $\|Z(x, y)\|_{\infty, \overline{D}} = \max_{(x, y) \in \overline{D}} |Z(x, y)|$, то

$$\begin{aligned} \|Z(x, y)\|_{\infty, \overline{D}} &= \max_{(x, y) \in \bigcup_{j=1}^N \overline{D}_j} |Z(x, y)| = \max_{j=1, N} \max_{(x, y) \in \overline{D}_j} |Z(x, y)| = \\ &= \max_{j=1, N} \|Z(x, y)\|_{\overline{D}_j}. \end{aligned}$$

Припустимо, що для функції $\mathbb{N}(u)$ існує стала $L > 0$ така, що виконується нерівність

$$|\mathbb{N}(u_1) - \mathbb{N}(u_2)| \leq L|u_1 - u_2| \quad (35)$$

$\forall u_1, u_2 \in R$ таких, що

$$\begin{cases} \|u(x, y) - u_1\|_{\overline{D}} \leq 1, \\ \|u(x, y) - u_2\|_{\overline{D}} \leq 1. \end{cases} \quad (36)$$

Введемо такі позначення:

$$Z(x, y) \equiv Z_j(x, y), (x, y) \in D_j, j = \overline{1, N},$$

$$W_n^\pm = \frac{\partial Z_n(x, y)}{\partial x} \pm \frac{\partial Z_n(x, y)}{\partial x}.$$

З рівняння (32), використовуючи формулу Д'Аламбера, отримуємо

$$Z_n(x, y) = \frac{1}{2} \left(Z_{n-1}(x - (y - y_{n-1}), y_{n-1}) + Z_{n-1}(x + (y - y_{n-1}), y_{n-1}) \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x - (y - y_{n-1})}^{x + (y - y_{n-1})} \left. \frac{\partial Z_{n-1}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta = y_{n-1}} d\xi + \quad (37)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{y_{n-1}}^y \int_{x - (y - \eta)}^{x + (y - \eta)} \left[\mathbb{N}^{(0)}(u(\xi, y_{n-1})) - \mathbb{N}(u(\xi, \eta)) \right] d\xi d\eta.$$

Тоді

$$\frac{\partial Z_n(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2} \left[\left. \frac{\partial Z_{n-1}(\xi, y_{n-1})}{\partial \xi} \right|_{\xi = x + (y - y_{n-1})} - \right.$$

$$\left. - \left. \frac{\partial Z_{n-1}(\xi, y_{n-1})}{\partial \xi} \right|_{\xi = x - (y - y_{n-1})} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\left. \frac{\partial Z_{n-1}(x + (y - y_{n-1}), \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta = y_{n-1}} + \right.$$

$$\left. + \left. \frac{\partial Z_{n-1}(x - (y - y_{n-1}), \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta = y_{n-1}} \right] + \quad (38)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{y_{n-1}}^y \left[\mathbb{N}^{(0)}(u(x + (y - \eta), y_{n-1})) - \mathbb{N}(u(x + (y - \eta), \eta)) + \right.$$

$$\left. + \mathbb{N}^{(0)}(u(x - (y - \eta), y_{n-1})) - \mathbb{N}(u(x - (y - \eta), \eta)) \right] d\eta;$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Z_n(x, y)}{\partial x} = & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial Z_{n-1}(\xi, y_{n-1})}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x+(y-y_{n-1})} + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial Z_{n-1}(\xi, y_{n-1})}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x-(y-y_{n-1})} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial Z_{n-1}(x+(y-y_{n-1}), \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=y_{n-1}} + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial Z_{n-1}(x-(y-y_{n-1}), \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=y_{n-1}} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{y_{n-1}}^y \left[\mathbb{N} \left(\begin{smallmatrix} (0) \\ u \end{smallmatrix} (x+(y-\eta), y_{n-1}) \right) - \mathbb{N} \left(u(x+(y-\eta), \eta) \right) - \right. \\
 & \left. - \mathbb{N} \left(\begin{smallmatrix} (0) \\ u \end{smallmatrix} (x-(y-\eta), y_{n-1}) \right) + \mathbb{N} \left(u(x-(y-\eta), \eta) \right) \right] d\eta.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Підсумовуючи формули (38), (39), одержуємо

$$\begin{aligned}
 W_n^\pm(x, y) = & W_{n-1}^\pm(x \pm (y - y_{n-1}), y_{n-1}) \pm \\
 \pm \int_{y_{n-1}}^y & \left[\mathbb{N} \left(\begin{smallmatrix} (0) \\ u \end{smallmatrix} (x \pm (y - \eta), y_{n-1}) \right) - \mathbb{N} \left(u(x \pm (y - \eta), \eta) \right) \right] d\eta,
 \end{aligned} \tag{40}$$

звідси приходимо до оцінки

$$\begin{aligned}
 \left\| W_n^\pm(x, y) \right\|_{\overline{D}_n} \leq & \left\| W_{n-1}^\pm(x, y) \right\|_{\overline{D}_{n-1}} + Lh \left\| Z_{n-1}(x, y) \right\|_{\overline{D}_{n-1}} + \\
 & + \frac{Lh^2}{2} \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}_n}.
 \end{aligned} \tag{41}$$

З рівностей (37) та (38) маємо:

$$\left\| Z_n(x, y) \right\|_{\overline{D}_n} \leq \left(1 + \frac{h^2 L}{2} \right) \left\| Z_{n-1}(x, y) \right\|_{\overline{D}_{n-1}} + \frac{h}{2} \left\| \frac{\partial Z_{n-1}(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}_{n-1}} +$$

$$+ \frac{Lh^3}{6} \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}_n}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial Z_{n-1}(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}} &\leq \frac{1}{2} \left(\left\| W_{n-2}^+(x, y) \right\|_{\overline{D}_{n-2}} + \left\| W_{n-2}^-(x, y) \right\|_{\overline{D}_{n-2}} \right) + \\ &+ Lh \left\| Z_{n-2}(x, y) \right\|_{\overline{D}_{n-2}} + \frac{Lh^2}{2} \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}_{n-1}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Підставивши (43) у праву частину (42), отримаємо

$$\begin{aligned} \left\| Z_n(x, y) \right\|_{\overline{D}_n} &\leq \left(1 + \frac{h^2 L}{2} \right) \left\| Z_{n-1}(x, y) \right\|_{\overline{D}_{n-1}} + \frac{Lh^2}{2} \left\| Z_{n-2}(x, y) \right\|_{\overline{D}_{n-2}} + \\ &+ \frac{h}{4} \left(\left\| W_{n-2}^+(x, y) \right\|_{\overline{D}_{n-2}} + \left\| W_{n-2}^-(x, y) \right\|_{\overline{D}_{n-2}} \right) + \\ &+ \frac{Lh^3}{2} \left(\frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}_{n-1}} + \frac{1}{3} \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}_n} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Збільшимо праві частини (37) та (44), замінивши тут і далі $\left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}_p}$, $p = \overline{1, N}$ на $\left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}}$, а потім знак нерівності \leq на знак рівності $=$. Як наслідок, одержимо мажорантну рекурентну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{Lh^2}{2} \right) a_{n-1} + \frac{Lh^2}{2} a_{n-2} + \frac{h}{4} (b_{n-2}^+ + b_{n-2}^-) + \frac{Lh^3}{2} \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}}, \\ b_n^\pm &= b_{n-1}^\pm + Lh a_{n-1} + \frac{Lh^2}{2} \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}}, \quad n = 3, 4, \dots, \end{aligned} \quad (45)$$

у тому сенсі, що

$$\left\| Z_n(x, y) \right\|_{\overline{D}_n} \leq a_n, \quad \left\| W_n^\pm(x, y) \right\|_{\overline{D}_n} \leq b_n^\pm.$$

Доповнимо систему (45) початковими умовами

$$a_1 = \frac{Lh^3}{6} \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}} \geq \left\| Z_1(x, y) \right\|_{\overline{D}_1},$$

$$\begin{aligned}
 b_1^\pm &= \frac{Lh^2}{4} \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}} \geq \left\| \frac{\partial Z_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Z_1(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}_1}, \\
 a_2 &= Lh^3 \left(\frac{7}{6} + \frac{Lh^2}{2} \right) \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}} \geq \|Z_2(x, y)\|_{\overline{D}_2}, \\
 b_2^\pm &= \frac{Lh^2}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{Lh^2}{3} \right) \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}} \geq \|W_2^\pm(x, y)\|_{\overline{D}_2}.
 \end{aligned} \tag{46}$$

Перейдемо від (45) (46) до векторно-матричної форми запису:

$$\begin{aligned}
 \vec{c}_n &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{Lh^2}{2} & 0 & 0 \\ Lh & 1 & 0 \\ Lh & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{c}_{n-1} + \begin{bmatrix} \frac{Lh^2}{2} & \frac{h}{4} & \frac{h}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{c}_{n-2} + \\
 &+ \frac{Lh^2}{2} \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}} \begin{bmatrix} h \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad n = 3, 4, \dots, \\
 \vec{c}_1 &= \frac{Lh^2}{2} \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}} \begin{bmatrix} h/3 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \\
 \vec{c}_2 &= \frac{Lh^2}{2} \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}} \begin{bmatrix} h(7/3 + Lh^2/2) \\ 3/2 + Lh^2/3 \\ 3/2 + Lh^2/3 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{47}$$

де

$$\vec{c}_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n^+ \\ b_n^- \end{bmatrix}.$$

Виконаємо оцінку (47), використовуючи першу векторну і матричну норми. Отримуємо:

$$\begin{aligned}
 \|\vec{c}_n\|_{\mathbb{R}^3} &\leq (1+Lh) \|\vec{c}_{n-1}\|_{\mathbb{R}^3} + \frac{h}{2}(1+Lh) \|\vec{c}_{n-2}\|_{\mathbb{R}^3} + \frac{Lh^2}{2} \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}}, \\
 &n = 3, 4, \dots, \\
 \|\vec{c}_1\|_{\mathbb{R}^3} &\leq \frac{Lh^2}{4} \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}} = c_1,
 \end{aligned} \tag{48}$$

$$\|\vec{c}_2\|_{\mathbb{R}^3} \leq \frac{Lh^2}{2} (3/2 + Lh^2/3) \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}} = c_2.$$

Розв'язок (48), одержаний стандартним способом, має вигляд

$$\|\vec{c}_n\|_{\mathbb{R}^3} \leq s\lambda_1^{n-1} + t\lambda_2^{n-1} + g, \quad n = 1, 2, \dots,$$

де

$$\lambda_i = \frac{1}{2} \left(1 + Lh + (-1)^{i+1} \sqrt{(1 + Lh)^2 + 2h(1 + Lh)} \right), \quad i = 1, 2,$$

$$s = \frac{c_1\lambda_2 - c_2 + g(1 - \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad t = \frac{c_1\lambda_1 - c_2 + g(1 - \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$g = \frac{-Lh \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}}}{1 + L(2 + h)}.$$

Враховуючи оцінки

$$|s|, |t|, |g| \leq hL \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}},$$

$$(\lambda_1)^{n-1} \leq (\lambda_1)^N \leq \left[1 + (1 + L) \frac{\varepsilon}{N} \right]^N \leq \exp(\varepsilon(1 + L)),$$

$$|\lambda_2| \leq \frac{h}{2}$$

переконуємося у справедливості твердження теореми. \square

Очевидно, що з теореми 4.1 випливає наслідок:

Наслідок 4.1. *За виконання умов теореми 1 розв'язок $u(x, y) \in C^2(\mathbb{R} \times (0; \varepsilon))$ задачі Коші (2), (3) є єдиний.*

5. Достатні умови збіжності FD-методу

Перейдемо безпосередньо до встановлення достатніх умов збіжності FD-методу розв'язування задачі Коші (2), (3). Для цього використаємо техніку, що була застосована при доведенні теореми 4.1.

Застосовуючи формулу Д'Аламбера до k -го рівняння системи (28), (29), отримуємо рівність

$$\begin{aligned} u_n^{(k)}(x, y) = & \frac{1}{2} \left(u_{n-1}^{(k)}(x - (y - y_{n-1}), y_{n-1}) + u_{n-1}^{(k)}(x + (y - y_{n-1}), y_{n-1}) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x - (y - y_{n-1})}^{x + (y - y_{n-1})} \frac{\partial u_{n-1}^{(k)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta = y_{n-1}} d\xi + \\ & + \frac{1}{2} \int_{y_{n-1}}^y \int_{x - (y - \eta)}^{x + (y - \eta)} \left[-F_k(\xi, \eta) + \mathbb{N}' \left(u_{n-1}^{(0)}(\xi, y_{n-1}) \right) u_{n-1}^{(k)}(\xi, y_{n-1}) \right] d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (49)$$

З (49) неважко одержати такі рівності:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{n-1}^{(k)}(x, y)}{\partial y} = & \frac{1}{2} \left(-\Phi_{n-2}^{(k)-}(x, y) + \Phi_{n-2}^{(k)+}(x, y) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{y_{n-2}}^y \left[-F_k(x + (y - \eta), \eta) + \right. \\ & \left. + \mathbb{N}' \left(u_{n-1}^{(0)}(x + (y - \eta), y_{n-2}) \right) u_{n-2}^{(k)}(x + (y - \eta), y_{n-2}) \right] d\eta + \\ & + \frac{1}{2} \int_{y_{n-2}}^y \left[-F_k(x - (y - \eta), \eta) + \right. \\ & \left. + \mathbb{N}' \left(u_{n-1}^{(0)}(x - (y - \eta), y_{n-2}) \right) u_{n-2}^{(k)}(x - (y - \eta), y_{n-2}) \right] d\eta, \end{aligned} \quad (50)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(k)\pm}(x, y) &\equiv \frac{\partial u_n^{(k)}(x, y)}{\partial x} \pm \frac{\partial u_n^{(k)}(x, y)}{\partial y} = \Phi_n^{(k)\pm}(x + y - y_{n-1}, y) \pm \\ &\pm \int_{y_{n-1}}^y \left[-F_k(x \pm (y - \eta), \eta) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{N}'\left(u_{n-1}^{(0)}(x \pm (y - \eta), y_{n-1})\right) u_{n-1}^{(k)}(x \pm (y - \eta), y_{n-1}) \right] d\eta. \end{aligned} \quad (51)$$

З формул (49)–(51) одержимо наступну рекурентну систему нерівностей:

$$\begin{aligned} \|u_n^{(k)}(x, y)\|_{\overline{D}_n} &\leq \left(1 + \frac{h^2}{2} \|\mathbb{N}'(u(x, y))\|_{\overline{D}}\right) \|u_{n-1}^{(k)}(x, y)\|_{\overline{D}_{n-1}} + \\ &+ \frac{h}{2} \left(\|\Phi_{n-2}^{(k)+}(x, y)\|_{\overline{D}_{n-2}} + \|\Phi_{n-2}^{(k)-}(x, y)\|_{\overline{D}_{n-2}} \right) + \\ &+ h^2 \|\mathbb{N}'(u^{(0)}(x, y))\|_{\overline{D}} \|u_{n-2}^{(k)}(x, y)\|_{\overline{D}_{n-2}} + \frac{3h^2}{2} \|F_k(x, y)\|_{\overline{D}}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \|\Phi_n^{(k)\pm}(x, y)\|_{\overline{D}_n} &\leq \|\Phi_{n-1}^{(k)\pm}(x, y)\|_{\overline{D}_{n-1}} + \\ &+ h \|\mathbb{N}'(u^{(0)}(x, y))\|_{\overline{D}} \|u_{n-1}^{(k)}(x, y)\|_{\overline{D}_{n-1}} + h \|F_k(x, y)\|_{\overline{D}}, \quad n = 3, 4, \dots, \end{aligned}$$

яку доповнюємо початковими умовами

$$\|u_1^{(k)}(x, y)\|_{\overline{D}_1} \leq \frac{h^2}{2} \|F_k(x, y)\|_{\overline{D}} = \alpha_1,$$

$$\|u_2^{(k)}(x, y)\|_{\overline{D}_2} \leq \frac{h^2}{2} \|F_k(x, y)\|_{\overline{D}} \left(4 + \frac{h^2}{2} \|\mathbb{N}'(u^{(0)}(x, y))\|_{\overline{D}}\right) = \alpha_2, \quad (53)$$

$$\|\Phi_1^{(k)\pm}(x, y)\|_{\overline{D}_1} \leq h \|F_k(x, y)\|_{\overline{D}} = \beta_1^\pm,$$

$$\left\| \Phi_2^{(k)\pm}(x, y) \right\|_{\overline{D}_2} \leq h \left\| F_k(x, y) \right\|_{\overline{D}} \left(2 + \frac{h^2}{2} \left\| \mathbb{N}' \left(u^{(0)}(x, y) \right) \right\|_{\overline{D}} \right) = \beta_2^\pm.$$

Запишемо у векторно-матричному вигляді систему рівнянь, розв'язок якої мажоруює розв'язок (52), (53):

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_n &= \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{h^2}{2} \left\| \mathbb{N}' \left(u^{(0)}(x, y) \right) \right\|_{\overline{D}} \right) & 0 & 0 \\ h \left\| \mathbb{N}' \left(u^{(0)}(x, y) \right) \right\|_{\overline{D}} & 1 & 0 \\ h \left\| \mathbb{N}' \left(u^{(0)}(x, y) \right) \right\|_{\overline{D}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{\gamma}_{n-1} + \\ &+ \begin{bmatrix} h^2 \left\| \mathbb{N}' \left(u^{(0)}(x, y) \right) \right\|_{\overline{D}} & \frac{h}{2} & \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{\gamma}_{n-2} + \\ &+ h \left\| F_k(x, y) \right\|_{\overline{D}} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}h \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad n = 3, 4, \dots, \\ \vec{\gamma}_1 &= \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1^+ \\ \beta_1^- \end{bmatrix}, \quad \vec{\gamma}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2^+ \\ \beta_2^- \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (54)$$

де

$$\vec{\gamma}_n = \begin{bmatrix} \left\| u_n^{(k)}(x, y) \right\|_{\overline{D}_n} \\ \left\| \Phi_n^{(k)+}(x, y) \right\|_{\overline{D}_n} \\ \left\| \Phi_n^{(k)-}(x, y) \right\|_{\overline{D}_n} \end{bmatrix}.$$

Оцінимо ліву і праву частини (54), використовуючи першу векторну і матричну норми. Матимемо

$$\begin{aligned} \|\gamma_n\|_{\mathbb{R}^3} &\leq \left(1 + \frac{h^2}{2} \left\| \mathbb{N}' \left(u^{(0)}(x, y) \right) \right\|_{\overline{D}} \right) \|\gamma_{n-1}\|_{\mathbb{R}^3} + \\ &+ h \left(1 + \frac{h^2}{2} \left\| \mathbb{N}' \left(u^{(0)}(x, y) \right) \right\|_{\overline{D}} \right) \|\gamma_{n-2}\|_{\mathbb{R}^3} + h \left\| F_k(x, y) \right\|_{\overline{D}}, \quad n = 3, 4, \dots, \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \|\gamma_1\|_{\mathbb{R}^3} &\leq h \|F_k(x, y)\|_{\overline{D}}, \\ \|\gamma_2\|_{\mathbb{R}^3} &\leq h \left(1 + \frac{h^2}{2} \left\| \mathbb{N}' \left(\overset{(0)}{u}(x, y) \right) \right\|_{\overline{D}} \right) \|F_k(x, y)\|_{\overline{D}}. \end{aligned}$$

Розв'язок (55), одержаний стандартним способом, має вигляд

$$\|\vec{\gamma}_n\|_{\mathbb{R}^3} \leq s\lambda_1^{n-1} + t\lambda_2^{n-1} + g = \sigma_n \left(h, \left\| \mathbb{N}' \left(\overset{(0)}{u}(x, y) \right) \right\|_{\overline{D}} \right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

де

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{1}{2} \left(\mu + (-1)^i \sqrt{\mu^2 + 4h\mu} \right), \quad i = 1, 2, \quad (56) \\ \mu &= 1 + h \left\| \mathbb{N}' \left(\overset{(0)}{u}(x, y) \right) \right\|_{\overline{D}}, \quad g = \frac{h \|F_k(x, y)\|_{\overline{D}}}{1 - \mu - h\mu}, \\ s &= \frac{\|\gamma_1\|_{\mathbb{R}^3} \lambda_2 - \|\gamma_2\|_{\mathbb{R}^3} + g(1 - \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ t &= \frac{\|\gamma_1\|_{\mathbb{R}^3} \lambda_1 - \|\gamma_2\|_{\mathbb{R}^3} + g(1 - \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{aligned}$$

Враховуючи оцінки

$$\begin{aligned} (\lambda_1)^{n-1} &\leq (\lambda_1)^N \leq \left[1 + \left(2 + \left\| \mathbb{N}' \left(\overset{(0)}{u}(x, y) \right) \right\|_{\overline{D}} \right) \frac{\varepsilon}{N} \right]^N \leq \\ &\leq \exp \left(\varepsilon \left(2 + \left\| \mathbb{N}' \left(\overset{(0)}{u}(x, y) \right) \right\|_{\overline{D}} \right) \right), \\ &|\lambda_2| \leq h, \\ 0 < s &\leq \frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \|F_k(x, y)\|_{\overline{D}}, \quad 0 \leq t \leq h - \frac{h^2}{2}, \\ \forall t \in [0, 1], &\left\| \mathbb{N}' \left(\overset{(0)}{u}(x, y) \right) \right\|_{\overline{D}} \in [0, \infty), \\ |g| &\leq \|F_k(x, y)\|_{\overline{D}}, \end{aligned}$$

одержуємо нерівності

$$\left\| \overset{(k)}{u}_n(x, y) \right\|_{\overline{D}_n}, \quad \left\| \overset{(k)\pm}{\Phi}_n(x, y) \right\|_{\overline{D}_n} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\| \frac{\partial^{(k)} u_n(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial^{(k)} u_n(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}_n}, \left\| \frac{\partial^{(k)} u_n(x, y)}{\partial x} \right\|_{\overline{D}_n}, \left\| \frac{\partial^{(k)} u_n(x, y)}{\partial y} \right\|_{\overline{D}_n} \leq \\
 &\leq K_2 \left\| F_k(x, y) \right\|_{\overline{D}},
 \end{aligned} \tag{57}$$

де K_2 – стала, яка залежить тільки від $\left\| \mathbb{N}' \left(u^{(0)}(x, y) \right) \right\|_{\overline{D}}$ та ε . Більш тонкий аналіз функції $\sigma_n \left(h, \left\| \mathbb{N}' \left(u^{(0)}(x, y) \right) \right\|_{\overline{D}} \right)$ показує, що сталу K_2 можна замінити на вираз

$$\begin{aligned}
 &K_2 = 0, 3(1 + 2h)^{n-1} \leq 0, 3 \exp(2\varepsilon) = \sigma \\
 &\forall h \in [0, 1], \forall \left\| \mathbb{N}' \left(u^{(0)}(x, y) \right) \right\|_{\overline{D}} \in [0, \infty),
 \end{aligned} \tag{58}$$

що є принциповим для подальшого. Зауважимо, щоб нерівність $K_2 \leq 1$, була правильною достатньо, щоб $\varepsilon \leq 0, 6019864022$.

Отже, з (57) та (58) одержимо оцінку

$$\left\| u^{(k)}(x, y) \right\|_{1, \infty, \overline{D}} \leq \sigma \left\| F_k(x, y) \right\|_{\overline{D}}, \tag{59}$$

де $\left\| f(x, y) \right\|_{1, \infty, D} = \max \left\{ \left\| f(x, y) \right\|_{\infty, D}, \left\| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right\|_{\infty, D}, \left\| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right\|_{\infty, D} \right\}$. На підставі рівностей (28), (30) запишемо нерівність (59) у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
 &\left\| u^{(k)}(x, y) \right\|_{1, \infty, \overline{D}} \leq \\
 &\leq \sigma \left[A_k(\mathbb{N}; \left\| u_{\perp}^{(0)}(x, y) \right\|_{\overline{D}}; \left\| u_{\perp}^{(1)}(x, y) \right\|_{\overline{D}}; \dots; \left\| u_{\perp}^{(k)}(x, y) \right\|_{\overline{D}}) + \right. \\
 &\quad \left. + \left\| A_{k-1}(\mathbb{N}; u^{(0)}(x, y); u^{(1)}(x, y); \dots; u^{(k-1)}(x, y)) - \right. \tag{60} \\
 &\quad \left. - A_{k-1}(\mathbb{N}; u_{\perp}^{(0)}(x, y); u_{\perp}^{(1)}(x, y); \dots; u_{\perp}^{(k-1)}(x, y)) \right\|_{\overline{D}} - \tilde{\mathbb{N}}'(\left\| u^{(0)} \right\|_{\overline{D}}) \left\| u^{(k)} \right\|_{\overline{D}} \left. \right],
 \end{aligned}$$

де

$$\tilde{\mathbb{N}}(u) = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| u^i, \quad \mathbb{N}(u) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i u^i.$$

Для оцінки другого доданка в правій частині цього виразу скористаємось наступною лемою.

Лема 5.1.

$$\begin{aligned} & \left\| A_s(\mathbb{N}; \overset{(0)}{u}_\perp(x, y), \dots, \overset{(s)}{u}_\perp(x, y)) - A_s(\mathbb{N}; \overset{(0)}{u}(x, y), \dots, \overset{(s)}{u}(x, y)) \right\|_{\overline{D}} \leq \\ & \leq h A_s(\tilde{\mathbb{N}}_1; \|\overset{(0)}{u}\|_{1, \infty, \overline{D}}, \dots, \|\overset{(s)}{u}\|_{1, \infty, \overline{D}}), \quad \tilde{\mathbb{N}}_1(u) = \tilde{\mathbb{N}}'(u)u, \end{aligned}$$

Лема 5.1 є частинним випадком леми 1 з [22].

Застосовуючи лему 5.1, одержуємо оцінку для (60):

$$\begin{aligned} & \left\| \overset{(k)}{u}(x, y) \right\|_{1, \infty, \overline{D}} \leq \\ & \leq \sigma \left[A_k(\tilde{\mathbb{N}}(u); \|\overset{(0)}{u}_\perp\|_{1, \infty, \overline{D}}; \|\overset{(1)}{u}_\perp\|_{1, \infty, \overline{D}}; \dots; \|\overset{(k)}{u}_\perp\|_{1, \infty, \overline{D}}) + \right. \\ & \left. + h A_{k-1}(\tilde{\mathbb{N}}_1(u); \|\overset{(0)}{u}\|_{1, \infty, \overline{D}}; \|\overset{(1)}{u}\|_{1, \infty, \overline{D}}; \dots; \|\overset{(k-1)}{u}\|_{1, \infty, \overline{D}}) - \right. \\ & \left. - \tilde{\mathbb{N}}'(\|\overset{(0)}{u}\|_{1, \infty, \overline{D}}) \|\overset{(k)}{u}\|_{1, \infty, \overline{D}} \right]. \end{aligned}$$

Розглянемо послідовність дійсних чисел $\{v_k\}_{k=0}^\infty$, яка визначається так:

$$\begin{aligned} v_0 &= \|\overset{(0)}{u}\|_{1, \infty, \overline{D}}, \\ v_k &= \sigma \left[A_k(\tilde{\mathbb{N}}; v_0; v_1; \dots; v_k) + A_{k-1}(\tilde{\mathbb{N}}_1; v_0; v_1; \dots; v_{k-1}) - \tilde{\mathbb{N}}'(v_0)v_k \right]. \end{aligned} \quad (61)$$

Легко бачити, що послідовності $\{v_k\}_{k=0}^\infty$ має місце нерівність

$$\|\overset{(k)}{u}\|_{1, \infty, \overline{D}} \leq v_k h^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (62)$$

Доведемо, використовуючи метод твірних функцій, що для досить малих значень h ряд $\sum_{k=0}^\infty \|\overset{(k)}{u}\|_{1, \infty, \overline{D}}$ збіжний. Для цього достатньо показати, що степеневий ряд

$$g(z) = \sum_{k=0}^\infty v_k z^k \quad (63)$$

має ненульовий радіус збіжності.

Враховуючи рівності (61), приходимо до висновку, що функція $g(z)$ задовольняє нелінійне функціональне рівняння

$$g(z) - v_0 = \sigma \left[\tilde{N}(g(z)) - \tilde{N}(v_0) - \tilde{N}'(v_0)(g(z) - v_0) + z\tilde{N}_1(g(z)) \right]. \quad (64)$$

Розглянемо обернену функцію $z = g^{-1}$. З рівності (64) можемо легко отримати явну формулу для $z = z(g)$:

$$z(g) = \frac{g(z) - v_0 - \sigma \left(\tilde{N}(g(z)) - \tilde{N}(v_0) + \sigma \tilde{N}'(v_0)(g(z) - v_0) \right)}{\sigma \tilde{N}_1(g(z))}. \quad (65)$$

Враховуючи, що $z(v_0) = 0$, отримуємо значення $z'(v_0)$:

$$z'(v_0) = \frac{1}{\sigma \tilde{N}_1(v_0)} [1 - \sigma(1 + \sigma)\tilde{N}'(v_0)]. \quad (66)$$

З (66) неважко встановити, що $z'(v_0)$ є додатнім, якщо виконується нерівність

$$\sigma < \frac{2}{\tilde{N}'(v_0) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\tilde{N}'(v_0)}} \right)}. \quad (67)$$

Далі, з (65) одержуємо

$$\lim_{g \rightarrow \infty} z(g) = - \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\tilde{N}(g)}{g\tilde{N}'(g)} \leq 0.$$

Ця нерівність за умови, що виконується (67) (тобто, що $z'(v_0) > 0$), гарантує існування такого $g_{\max} > 0$, найближчого до v_0 , для якого

$$z_{\max} = \max_{g \in [v_0, \infty)} z(g) = z(g_{\max})$$

(якщо таких локальних максимумів є декілька), і це z_{\max} є радіусом збіжності ряду (63) (див. [23]).

Звідси дійшли висновку, що існують такі додатні сталі c, δ , для яких має місце нерівність

$$v_k R^k \leq \frac{c}{k^{1+\delta}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де $R = g_{\max}$, і які залежать лише від $\mathbb{N}(u)$ та v_0 . Або, враховуючи (62), маємо

$$\|u^{(k)}\|_{1,\infty,\bar{D}} \leq v_k \left(\frac{h}{R}\right)^k R^k \leq \frac{c}{k^{1+\delta}} \left(\frac{h}{R}\right)^k.$$

Остання нерівність дає змогу сформулювати наступне твердження

Твердження 5.1. *Для того щоб ряд $\sum_{j=0}^{\infty} u^{(j)}(x, y)$ збігався супер-експоненціально в нормі $\|\cdot\|_{1,\infty,\bar{D}}$, достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\frac{h}{R} = q < 1. \quad (68)$$

Нехай умова (68) виконується. Введемо позначення:

$$\bar{u}(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} u^{(j)}(x, y).$$

Покажемо, що $\bar{u}(x, y)$ співпадає з розв'язком $u(x, y)$ вихідної задачі (2), (3). З цією метою запишемо FD-метод у такій формі:

$$\begin{aligned} u^{(j+1)}(x, y) = & \frac{1}{2(j+1)!} \int_0^y \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \frac{\partial^{j+1}}{\partial \tau^{j+1}} \left\{ \mathbb{N}(u_{\perp}(\xi, \eta, \tau)) + \right. \\ & \left. + \tau [\mathbb{N}(u(\xi, \eta, \tau)) - \mathbb{N}(u_{\perp}(\xi, \eta, \tau))] \right\}_{\tau=0} d\xi d\eta, \quad j = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} u^{(0)}(x, y) = & \frac{1}{2} (\phi(x+y) + \phi(x-y)) + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \psi(\xi) d\xi + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^y \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \left\{ \mathbb{N}(u_{\perp}^{(0)}(\xi, \eta)) + f(\xi, \eta) \right\} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (70)$$

Просумуємо обидві частини (69) за j від 0 до ∞ і додамо (70). Одержимо рівняння

$$\bar{u}(x, y) = \frac{1}{2} (\phi(x+y) + \phi(x-y)) + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \psi(\xi) d\xi +$$

$$+\frac{1}{2} \int_0^y \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \left\{ \mathbb{N}(\bar{u}(\xi, \eta)) + f(\xi, \eta) \right\} d\xi d\eta.$$

З нього випливає, що $\bar{u}(x, y)$ є розв'язком задачі Коші (2), (3), а оскільки він єдиний, то $\bar{u}(x, y) = u(x, y)$.

Отже, нами доведено теорему.

Теорема 5.1. *Нехай виконуються умови теореми 2.1 і функція $\mathbb{N}(u)$ є аналітичною на всій числовій осі, тобто*

$$\mathbb{N}(u) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u^i, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Тоді виконуються припущення "а", "б" і єдиний розв'язок $u(x, y) \in C^2(\bar{D})$ задачі Коші (2), (3) можна як завгодно точно знайти за допомогою FD-методу (26)–(30). Крім того, мають місце наступні оцінки швидкості збіжності методу:

$$\|u(x, y) - \overset{(m)}{u}(x, y)\|_{1, \infty, D} \leq \frac{cR}{(m+1)^{1+\delta}(R-h)} \left(\frac{h}{R}\right)^{m+1}, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (71)$$

де $\|f(x, y)\|_{1, \infty, D} = \max\{\|f(x, y)\|_{\infty, D}, \|\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\|_{\infty, D}, \|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\|_{\infty, D}\}$, h – крок сітки FD-методу, $h < R$, а додатні дійсні сталі c, R, δ залежать лише від вхідних даних задачі².

6. Чисельна реалізація FD-методу розв'язування задачі Коші для рівняння Клейна–Гордона

Легко бачити, що обчислення поправок $\overset{(k)}{u}(x, y)$ FD-методу, що є розв'язками системи задач (26)–(30), пов'язане з обчисленням одинарних та подвійних інтегралів зі змінними межами інтегрування (див. формули (31), (49)). Враховуючи рекурсивний характер системи (26)–(30), можна дійти висновку, що виключно аналітична алгоритмічна реалізація FD-методу високого рангу (з використанням сучасних систем комп'ютерної алгебри, таких як Maple, Mathematica, Maxima тощо) є практично неможливою (головним чином через

²Детальніше про походження сталої R див. [24].

складність аналітичного знаходження таких інтегралів), так само як, наприклад, у випадку задачі Гурса для рівняння Клейна–Гордона (1) (див. [25]). Очевидо подолати такі труднощі можна використовуючи чисельні методи розв'язання системи задач (26)–(30). Наведемо один з можливих практичних підходів алгоритмічної реалізації FD-методу з використанням чисельних схем інтегрування.

Насамперед зазначимо, що перетворенням $\Phi : D \xrightarrow{\Phi} D_\Phi$

$$\Phi = \begin{cases} x = \xi + \eta, \\ y = \xi - \eta, \end{cases} \quad \Phi^{-1} = \begin{cases} \xi = \frac{1}{2}(x + y), \\ \eta = \frac{1}{2}(x - y) \end{cases} \quad (72)$$

задачі (26)–(30) можна подати у вигляді

$$-\frac{\partial^2 {}^{(0)}v(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = f(\xi + \eta, \xi - \eta) - \mathbb{N}({}^{(0)}v_\perp(\xi, \eta)), \quad (73)$$

$${}^{(0)}v(\xi, \xi) = \phi(2\xi), \quad {}^{(0)}v_\eta(\xi, \xi) = \phi'(2\xi) - \psi(2\xi), \quad (74)$$

$$\forall \xi \in \left[\frac{X_M - Y_M}{2}, \frac{X_M + Y_M}{2} \right],$$

$${}^{(0)}v(\xi, \eta) \in C(\Phi(\overline{D})) = C(\overline{D}_\Phi), \quad {}^{(0)}v_\eta(\xi, \eta) \in C(\overline{D}_\Phi), \quad (75)$$

$$-\frac{\partial^2 {}^{(k)}v(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = -\mathbb{N}'({}^{(0)}v_\perp(\xi, \eta)) {}^{(0)}v_\perp(\xi, \eta) - F_k(\xi + \eta, \xi - \eta), \quad (\xi, \eta) \in \overline{D}_\Phi, \quad (76)$$

$${}^{(k)}v(\xi, \eta) \in C(\overline{D}_\Phi), \quad {}^{(k)}v_\eta(\xi, \eta) \in C(\overline{D}_\Phi), \quad (77)$$

$${}^{(k)}v(\xi, \xi) = 0, \quad {}^{(k)}v_\eta(\xi, \xi) = 0, \quad \forall \xi \in \left[\frac{X_M - Y_M}{2}, \frac{X_M + Y_M}{2} \right], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (78)$$

де ${}^{(k)}v(\xi, \eta) = {}^{(k)}u(\xi + \eta, \xi - \eta)$, ${}^{(k)}v_\perp(\xi, \eta) = {}^{(k)}u_\perp(\xi + \eta, \xi - \eta)$, функції $F_k(\xi + \eta, \xi - \eta)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, визначаються згідно з (30).

Умови (75) та (77) є аналогами відповідних умов зшивки в системі (26)–(30). Умови (75) випливають з того, що розв'язок ${}^{(0)}u(x, y)$ базової задачі (26), (27) є неперервно-диференційованою функцією на замкненій області \overline{D} . Звідси відразу випливає умова неперервності

функції $v^{(0)}(\xi, \eta)$ на \overline{D}_Φ . Крім того, враховуючи очевидні співвідношення

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} \Big|_{\substack{\xi=\frac{1}{2}(x+y) \\ \eta=\frac{1}{2}(x-y)}} + \frac{1}{2} \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\substack{\xi=\frac{1}{2}(x+y) \\ \eta=\frac{1}{2}(x-y)}},$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} \Big|_{\substack{\xi=\frac{1}{2}(x+y) \\ \eta=\frac{1}{2}(x-y)}} - \frac{1}{2} \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\substack{\xi=\frac{1}{2}(x+y) \\ \eta=\frac{1}{2}(x-y)}},$$

можна дійти висновку, що

$$v_\xi(\xi, \eta) \in C(\overline{D}_\Phi), \quad v_\eta(\xi, \eta) \in C(\overline{D}_\Phi),$$

де $v(\xi, \eta) = u(\xi + \eta, \xi - \eta)$.

Неважко переконатися, що функція $v^{(0)}(\xi, \eta)$, що є розв'язком рівняння (73) та задовольняє умови (74), (75), автоматично задовольняє і умову $v'_\xi(\xi, \eta) \in C(\overline{D}_\Phi)$. Звідси, зокрема, випливає, що задачі (26), (27) та (73)–(75) є еквівалентними, тобто, якщо $u^{(0)}(x, y)$ – розв'язок задачі (26), (27), то функція $v^{(0)}(\xi, \eta) = u^{(0)}(\xi + \eta, \xi - \eta)$ – розв'язок задачі (73)–(75) і навпаки. Аналогічні міркування справедливі і стосовно задач (28), (29) та (76)–(78).

Легко бачити, що розв'язок $v^{(0)}(\xi, \eta)$ базової задачі (73)–(75) можна записати так:

$$v^{(0)}(\xi, \eta) = \phi(2\xi) + \int_{\xi}^{\eta} (\phi'(2t) - \psi(2t) + \int_{\eta}^{\xi} R_0(s, t) ds) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\phi(2\xi) + \frac{1}{2}\phi(2\eta) - \int_{\xi}^{\eta} \psi(2t) dt + \int_{\xi}^{\eta} \int_t^{\xi} R_0(s, t) ds dt \quad \forall (s, t) \in D_\Phi, \quad (79)$$

де $R_0(\xi, \eta) \equiv -f(\xi + \eta, \xi - \eta) + \mathbb{N}(v \perp(\xi, \eta))$. Аналогічну формулу маємо і для поправок $v^{(k)}(\xi, \eta)$, що є розв'язками системи задач (76)–(78) :

$$v^{(k)}(\xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} \int_t^{\xi} R_k(s, t) ds dt, \quad \forall (s, t) \in D_\Phi, k = 1, 2, \dots, \quad (80)$$

де $R_k(\xi, \eta) = -\mathbb{N}(\overset{(0)}{v} \perp(\xi, \eta)) \overset{(0)}{v} \perp(\xi, \eta) - F_k(\xi + \eta, \xi - \eta)$.

Формули (79), (80) можна також одержати з формули Д'Аламбера виконавши заміну змінних (72).

Водночас з точки зору програмної реалізації формули (79) та (80) є зручнішими, ніж формула Д'Аламбера в чистому вигляді (зокрема, це стосується більш зручної форми меж інтегрування). Тому прийнемо позначення $p = i+j, q = i-j$ і зосередимо увагу надалі на функціях $\overset{(k)}{v}(\xi, \eta)$, а точніше на їх сіткових проєкціях:

$$\overset{(k)}{V}[p, q] \equiv \overset{(k)}{V}[i+j, i-j] = \overset{(k)}{v}\left(\frac{1}{2}(x_i+y_j), \frac{1}{2}(x_i-y_j)\right) = \overset{(k)}{u}(x_i, y_j) = \overset{(k)}{U}[i, j], \quad (81)$$

де $x_i = X_M - Y_M + ih_1, y_j = jh_1, h_1 = h/n_I, n_I \in \mathbb{N}, n_I \geq 9, h$ – крок дискретизації FD-методу, $p, q \in \mathbb{Z}$ (див. рис.1,б).

Областю визначення сіткових функцій $\overset{(k)}{U}[i, j]$ буде множина $\omega_I = \{(i, j) | (x_i, y_j) \in \overline{D}\}$ (див. рис. 1,б). При цьому, як легко перевірити, область визначення сіткових функцій $\overset{(k)}{V}[p, q]$ згідно з означення (81) співпадає з множиною $\Phi^{-1}(\omega_I) = \{(i+j, i-j) | i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, (x_i, y_j) \in \overline{D}\}$ (див. рис. 3).

Рівності (81) очевидним чином задають відображення множини $\Phi^{-1}(\omega_I)$ на \overline{D}_Φ , яке діє за законом (див. рис. 1,б):

$$\Phi^{-1}(\omega_I) \ni (p, q) = (i+j, i-j) \longrightarrow \left(\frac{1}{2}(x_i+y_j), \frac{1}{2}(x_i-y_j)\right) = (\xi_p, \eta_q).$$

Аналогічно визначається відображення

$$\omega_I \rightarrow \overline{D} : \omega_I \ni (i, j) \longrightarrow (x_i, y_j) \in \overline{D}.$$

Означення 6.1. Для будь-якої функції $f(\xi, \eta)$, визначеної на \overline{D}_Φ , через $f[p, q]$ будемо позначати функцію двох дискретних аргументів p та q , визначену на $\Phi^{-1}(\omega_I)$, що діє за законом

$$f[p, q] = f(\xi_p, \eta_q), \quad (\xi_p, \eta_q) \in \Phi^{-1}(\omega_I).$$

З огляду на наведені вище міркування стає очевидно, що алгоритм FD-методу m -го рангу розв'язування задачі Коші для нелінійного хвильового рівняння в області \overline{D} можна звести до розв'язування

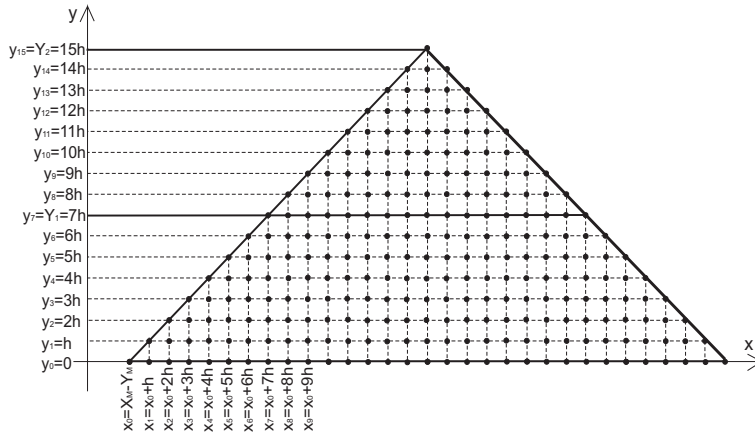


Рис 2. Область ω_I .

$(m + 1) \cdot N$ лінійних задач вигляду³

$$\frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = R(\xi, \eta),$$

$$w(ph_1 + \eta, \eta) = \phi_1(\eta), \tag{82}$$

$$w'_\xi(\xi, \xi - ph_1) = \psi_1(\xi), \quad p \in \mathbb{N}$$

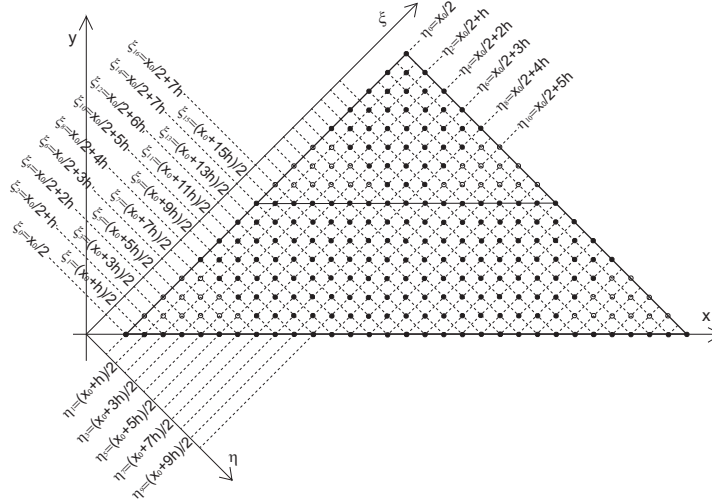
на області \tilde{D} (рис.4). Область \tilde{D} має форму рівнобічної трапеції і являє собою одну зі смуг розбиття FD-методу. Як бачимо, початкові умови задачі Коші (82) задано на нижній основі трапеції \tilde{D} .

З алгоритмічної точки зору задачу (82) доцільно розв'язувати в два етапи, кожен з яких полягає в обчисленні одинарного інтеграла зі змінною верхньою межею на області \tilde{D} :

$$w'_\xi(\xi, \eta) = \psi_1(\xi) - \int_{\xi - ph_1}^{\eta} R(\xi, \eta_1) d\eta_1,$$

$$w(\xi, \eta) = \phi_1(\eta) + \int_{ph_1 + \eta}^{\xi} w'_\xi(\xi_1, \eta) d\xi_1.$$

³ N – кількість смуг розбиття FD-методу (див. (22)).

Рис 3. Область $\Phi^{-1}(\omega_I)$.

Щоб знайти проекції $w'_\xi[i, j]$, $w[i, j]$ функцій $w'_\xi(\xi, \eta)$ і $w(\xi, \eta)$ відповідно на сітку $\Phi^{-1}(\omega_I) \cap \tilde{D}$, використаємо наступний алгоритм:

1. Обчислення $w'_\xi[i, j]$:

for $i := 2p + 8$ **to** $2p + K - 1$ **do**

begin

$j := i - 2p$;

$w'_\xi[i, j] := \psi_1(\xi_i)$;

$w'_\xi[i, j - 2] := w'_\xi[i, j] -$

$-\int_0^{h_1} I(R[i, j], R[i, j - 2], R[i, j - 4], R[i, j - 6], R[i, j - 8]; h_1; t) dt$;

$a := 4$;

repeat

$w'_\xi[i, j - a] := w'_\xi[i, j - a + 4] -$

$-\int_0^{2h_1} I(R[i, j - a + 4], R[i, j - a + 2], R[i, j - a]; h_1; t) dt$;

$a := a + 2$;

until $(i, j - a) \notin \Phi^{-1}(\omega_I) \cap \tilde{D}$;

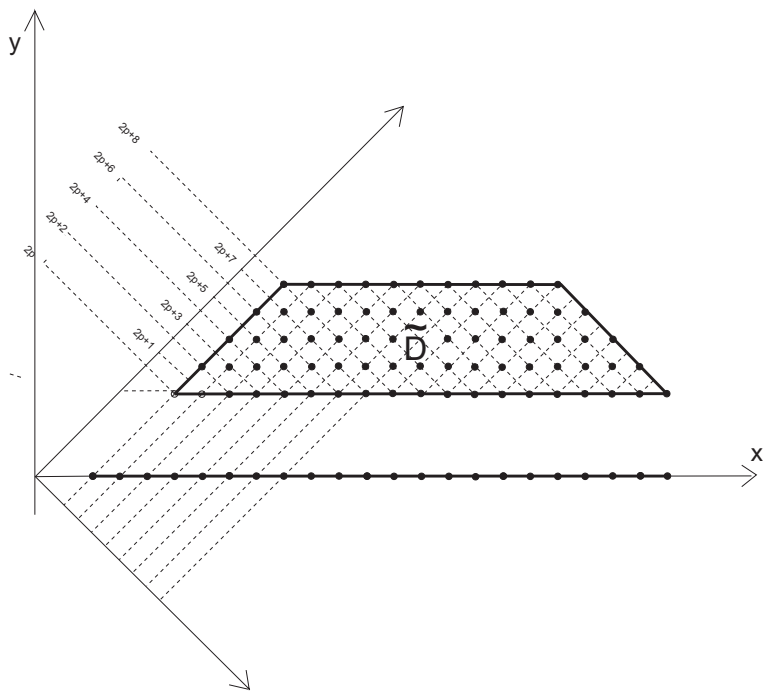


Рис 4. Область \tilde{D} .

end

```

2. Обчислення  $w[i, j]$  :
for  $j := 0$  to  $K - 9$  do
begin
 $i := j + 2p$ ;
 $w[i, j] := \phi_1(\eta_j)$ ;
 $w[i + 2, j] := w[i, j] +$ 
 $+ \int_0^{h_1} I(R[i, j], R[i + 2, j], R[i + 4, j], R[i + 6, j], R[i + 8, j]; h_1; t) dt$ ;
 $a := 4$ ;
repeat
 $w[i + a, j] := w[i + a - 4, j] +$ 

```

$$+ \int_0^{2h_1} I(R[i+a-4, j], R[i+a-2, j], R[i+a, j]; h_1; t) dt;$$

$a := a + 2;$
until $(i+a, j) \notin \Phi^{-1}(\omega_I) \cap \tilde{D};$
end

Тут літерою K позначено кількість точок множини $\Phi^{-1}(\omega_I)$, що лежать на нижній основі трапеції \tilde{D} , а $I(r_1, r_2, \dots, r_n; h_1; t)$ – інтерполяційний поліном від змінної t степеня $n-1$, побудований за точками $(r_1; 0), (r_2; h_1), (r_3; 2h_1), \dots, (r_n; (n-1)h_1)$.

Неважко перевірити, що в такому разі вираз $\int_0^{2h_1} I(r_1, r_2, r_3; h_1; t) dt$ – це добре відома формулу Сімпсона $\frac{h_1}{3}(r_1 + 4r_2 + r_3)$, порядок наближення якої на кроці становить $\mathcal{O}(h_1^5)$.

Формула $\int_0^{h_1} I(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5; h_1; t) dt$, яку також використано в алгоритмі, є різновидом формул Ньютона–Котеса і забезпечує обчислення значення відповідного інтеграла з точністю порядку $\mathcal{O}(h_1^5)$.

Наведений вище алгоритм дає змогу обчислити значення сіткових функцій $w'_\xi[\cdot, \cdot]$ та $w[\cdot, \cdot]$ в усіх точках множини $\Phi^{-1}(\omega_I) \cap \tilde{D}$, окрім фіксованої (незалежної від h_1) кількості точок, що знаходяться в кутах при основі трапеції \tilde{D} . Ці точки знаходяться на прямих

$$\xi = \xi_i, \quad i = 2p + 1, \dots, 2p + 7, \quad (83)$$

та

$$\eta = \eta_j, \quad j = K - 8, K - 7, \dots, K - 2. \quad (84)$$

Очевидно, що кількість вузлів інтегрування на кожній такій прямій в перетині з множиною \tilde{D} не перевищує чотирьох, що є недостатнім для забезпечення точності порядку $\mathcal{O}(h_1^5)$ з використанням формул Ньютона–Котеса. Проте знайти значення функцій $w'_\xi[\cdot, \cdot]$ та $w[\cdot, \cdot]$ у цих точках з точністю $\mathcal{O}(h_1^5)$ можливо: для цього достатньо використати інтерполювання по 5-ти точках в напрямку, перпендикулярному до напрямку прямих (83), (84).

Варто зазначити, що наведений тут алгоритм буде ефективним лише у випадку неперервної диференційованості правої частини $R(\xi, \eta)$

(82) до 4-го порядку включно. Це випливає з відомих теорем про точність квадратурних формул Ньютона–Котеса. У термінах вихідної задачі Коші (2), (3) маємо, що для застосування викладеного алгоритму необхідно, щоб виконувалися такі умови (додатково до умов теореми 5.1):

$$\phi(x) \in C^4([X_M - Y_M, X_M + Y_M]), \psi(x) \in C^3([X_M - Y_M, X_M + Y_M]),$$

$$f(x, y) \in C^4(\overline{D}).$$

7. Чисельний приклад

Розглянемо задачу Коші для рівняння Клейна–Гордона (1) з функцією $N(u) = u^3$, тобто в області $D = \{(x, y) | 0 < y \leq \varepsilon, y - \varepsilon < x < \varepsilon - y\}$ будемо шукати наближений розв’язок задачі Коші:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - u^3(x, y) = -\frac{6x^2y - 2y + y^3}{(1 + x^2)^3}, \quad (x, y) \in D, \quad (85)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u'_y(x, 0) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in [-1, 1]. \quad (86)$$

Точним розв’язком цієї задачі є функція

$$u^*(x, y) = \frac{y}{1 + x^2}.$$

Перевіримо для задачі (85), (86) виконання умов теореми 2.1, і знайдемо значення сталої ε (6).

Очевидно, що $N(u) = u^3 \in C^2(\mathbb{R})$, $\phi(x) \equiv 0 \in C_b^2(\mathbb{R})$, $\psi(x) = \frac{1}{1 + x^2} \in C_b^1(\mathbb{R})$, а права частина рівняння (85) належить класу функцій $C_b^1(D_\varepsilon)$ (див. (4)). Знайдемо значення сталої M_1 згідно з (7). Неважко переконатися, що

$$M_1 = \|u_1(x, y)\|_{C(\mathbb{R} \times [0, 1])} + 1 = 0.95547 + 1 < 2,$$

де

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2} [\operatorname{arctg}(x + y) - \operatorname{arctg}(x - y)] + \frac{1}{64} \left[(3x^6 - 12yx^5 + \right.$$

$$\left. + (9 + 18y^2)x^4 - (24y + 12y^3)x^3 + (41 + 24y^2 + 3y^4)x^2 - (12y + 12y^3)x + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +35+6y^2+3y^3) \operatorname{arctg}(x-y) - \left(3x^6+12yx^5+(9+18y^2)x^4+(24y+12y^3)x^3+ \right. \\
& + (41+24y^2+3y^4)x^2+(12y+12y^3)x+35+6y^2+3y^3) \operatorname{arctg}(x+y) + \\
& + \left(24yx^5+(48y+24y^3)x^3+(24y+24y^3)x \right) \operatorname{arctg} x + \\
& \left. + 6yx^4+(12y+18y^3)x^2+70y+10y^3 \right] / (1+x^2).
\end{aligned}$$

Тоді

$$\varepsilon = \min \left\{ 1; \sqrt{2} \left(\max_{|u| \leq 2} |u^3| \right)^{-\frac{1}{2}} ; \sqrt{2q_1} \left(\max_{|u| \leq 2} |3u^2| \right)^{-\frac{1}{2}} \right\}.$$

Нехай стала $q_1 = 1/2$. Тоді одержимо

$$\varepsilon = \min \left\{ 1; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}; \frac{1}{\sqrt{12}} \right\} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Отже, шукатимемо наближений розв'язок задачі Коші (85), (86) в області $D = \{(x, y) | 0 < y \leq \sqrt{3}/6, y - \sqrt{3}/6 < x < \sqrt{3}/6 - y\}$.

Застосовуючи до задачі (85), (86) FD-метод, одержуємо наступну систему рекурентних задач Коші:

$$\frac{\partial^2 u^{(0)}(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u^{(0)}(x, y)}{\partial x^2} = \frac{2y - 6x^2y - y^3}{(1+x^2)^3} + u^{(0)}(x, y_{j-1}),$$

$$(x, y) \in D_j = [y + \sqrt{3}/6; \sqrt{3}/6 - y] \times (y_{j-1}, y_j], \quad j = \overline{1, N},$$

$$(u^{(0)}(x, y_j + 0) - u^{(0)}(x, y_j - 0)) \stackrel{def}{=} [u^{(0)}(x, y)]_{y=y_j} = 0,$$

$$[u'_y(x, y)]_{y=y_j} = 0 \quad \forall x \in [y_{j-1} - \sqrt{3}/6; \sqrt{3}/6 - y_{j-1}] \quad \forall j \in \overline{1, N-1},$$

$$u^{(0)}(x, 0) = 0, \quad u'_y(x, 0) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in [-1; 1],$$

$$\frac{\partial^2 u^{(k)}(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u^{(k)}(x, y)}{\partial x^2} = 3 u^{(0)}(x, y_{j-1}) u^{(k)}(x, y_{j-1}) - F_k(x, y) \quad \forall (x, y) \in D,$$

$$\begin{aligned} \left[u^{(k)}(x, y) \right]_{y=y_j} &= 0, \quad \left[\frac{\partial u^{(k)}(x, y)}{\partial y} \right]_{y=y_j} = 0 \\ \forall x \in [y_{j-1} - \sqrt{3}/6; \sqrt{3}/6 - y_{j-1}] \quad \forall j \in \overline{1, N-1}, \\ u^{(k)}(x, 0) &= 0, \quad \left. \frac{\partial u^{(k)}(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad x \in [-1, 1], \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

де функцію $F_k(x, y)$ визначено згідно з (30). Для оцінки похибки ме-

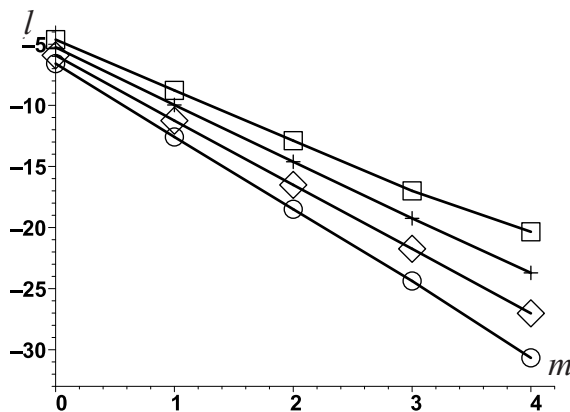


Рис 5. Графік залежності швидкості збіжності FD-методу від рангу m та кроків дискретизації h, h_s : $\square - l(0.01; 0.001; m)$; $+$ $- l(0.007; 0.0004; m)$; $\diamond - l(0.005; 0.0002; m)$; $\circ - l(0.003; 0.0001; m)$.

тоду використовуватимемо функцію

$$\delta(h; h_s; m) = \left\| u^{(m)}(x, y, h, h_s) - u^*(x, y) \right\|_{\overline{D}}, \quad (87)$$

де h – крок дискретизації FD-методу, h_s – крок квадратурної формули⁴.

Нижче наведено результати застосування FD-методу до задачі Коші (85), (86) в області $D = \{(x, y) | 0 < y < \sqrt{3}/6, y - \sqrt{3}/6 < x < \sqrt{3}/6 - y\}$ з кроками дискретизації квадратурної формули $h_s = 0.001; 0.0004; 0.0002; 0.0001$

⁴Тут для наближеного обчислення інтегралів використовували формулу Сімсона.

та кроками дискретизації FD-методу $h = 0.01; 0.007; 0.005; 0.003$ відповідно.

Для ілюстрації експоненціальної швидкості збіжності методу зручно розглянути функцію

$$l(m, h, h_s) = \ln(\delta(h; h_s; m)) = \ln\left(\|u^{(m)}(x, y, h, h_s) - u^*(x, y)\|_{\overline{D}}\right),$$

графіки якої при різних значеннях параметрів m, h , та h_s подано на рис. 5. Майже прямолінійний характер графіків свідчить про експоненціальну швидкість спадання похибки FD-методу при збільшенні рангу методу, що підтверджує теоретичні результати, одержані в статті.

Таблиця. Похибка FD-методу як функція від рангу (m) і кроків (h, h_s)

m	Значення $\delta(h; h_s; m)$	
	$\delta(0.01; 0.001; m)$	$\delta(0.007; 0.0004; m)$
0	0.00482008737297868	0.00247476450143269
1	4.20259567426333e-05	1.13911037650655e-05
2	3.95111377071091e-07	5.75286142525985e-08
3	3.7958256405744e-09	3.00014080324208e-10
4	4.33937223627304e-11	2.10684693653788e-12
m	Значення $\delta(h; h_s; m)$	
	$\delta(0.005; 0.0002; m)$	$\delta(0.003; 0.0001; m)$
0	0.00166433055655046	0.00125369326763414
1	5.19962629886347e-06	2.9639016211557e-06
2	1.79291471227014e-08	7.75676964050381e-09
3	6.4082143283881e-11	2.10828729150418e-11
4	3.42312053358461e-13	4.46870093332802e-14

8. Висновки

Описано та досліджено алгоритм FD-методу розв'язування задачі Коші для рівняння Клейна–Гордона (1). Зокрема, сформульовано та доведено теорему про існування розв'язку такої задачі (теорема 2.1). Доведено допоміжне твердження (теорема 4.1), з якого випливає єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння (1), а також яке є ключовим роль для встановлення достатніх умов збіжності FD-методу та оцінок швидкості його збіжності (теорема 5.1). Запропоновано підхід до програмної імплементації розв'язування задачі Коші для рівняння (1)

з використанням чисельних схем інтегрування. Наведено результати чисельного експерименту, які демонструють практичну суперекспоненціальну швидкість збіжності FD-методу і, таким чином, підтверджують одержані теоретичні результати.

- [1] *Li Yang*. Numerical studies of the Klein-Gordon-Schrödinger equations. A thesis submitted for the degree of master of science, 2006. – available at <http://www.math.nus.edu.sg/~bao/thesis/Yang-li.pdf>.
- [2] *Ozawa T., Tsutaya K., Tsutsumi Y.* Well-posedness in energy space for the Cauchy problem of the Klein-Gordon-Zakharov equations with different propagation speeds in three space dimension // *Math. Ann.* – 1999. – **313**. – P. 127–140.
- [3] *Dariescu C., Dariescu M.A.* Transition and regeneration rates in charged boson stars via perturbative calculations // *Int. Journal of Modern Phys. A.* – 2005. – **20**. – P. 2326–2330.
- [4] *Fukuda I., Tsutsumi M.* On coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations II // *J. Math. Anal. Appl.* – 1978. – **66**. – P. 358–378.
- [5] *Dashen R.F., Hasslacher B., Neuvau A.* Nonperturbative methods and extended hadron models in field theory II. Two dimensional model and extended hadrons // *Phys. Rev. D.* – 1974. – **10**. – P. 4130–4138.
- [6] *Shankar R.* Principles of quantum mechanics – Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 1978.
- [7] *Gibbon J.D., James I.M., Mozov I.M.* The sine-Gordon equation as a model for a rapidly rotating baroclinic fluid // *Phys. Scripta.* – 1979. – **20**. – P. 402–408.
- [8] *Barone A., Esposito F., Magee C., Scott A.* Theory and applications of the sine-Gordon equation // *Riv. del Nuovo cim.* – 1971. – **1**. – P. 227–267.
- [9] *Malfiet W.* The tanh method: a tool for solving certain classes of non-linear PDEs // *Math. Methods Appl. Sci.* – 2005. – **28**, N. 17. – P. 2031–2035.
- [10] *Wazwaz A.M.* A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations // *Math. Comput. Modelling.* – 2009. – **40**, N 5-6. – P. 499–508.
- [11] *Alomari A.K., Noorani M.S., Nazar R.M.* Approximate analytical solutions of the Klein-Gordon equation by means of the homotopy analysis method // *J. of Quality Measurement and Analysis.* – 2008. – **4**. – P. 45–57.
- [12] *Berikelashvili G., Jokhadze O., Kharibegashvili S., and Midodashvili B.* Finite difference solution of a nonlinear Klein-Gordon equation with an external source // *Math. Comp.* – 2011. – **80**, N 274. – P. 847–862.

- [13] *Kong L., Zhang J., Cao Y., Duan Y., Huang H.* Semi-explicit symplectic partitioned Runge–Kutta Fourier pseudo-spectral scheme for Klein–Gordon–Schrödinger equations // *Comput. Phys. Commun.* – 2010. – **181**. – P. 1369–1377.
- [14] *Gavrilyuk I.P., Lazurchak I.I., Makarov V.L., Sytnyk D.* A method with a controllable exponential convergence rate for nonlinear differential operator equations // *Comp. Methods Appl. Math.* – 2009. – **9**, N 1. – P. 63–78.
- [15] *Makarov V.L., Dragunov D.V.* A numerical-analytic method for solving the Cauchy problem for ordinary differential equations // *Ibid.* – 2011. – **11**, N 4. – P. 491–509.
- [16] *Макаров В. Л.* О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма–Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами // *Докл. АН СССР.* – 1991. – **320**, – 1. – С. 34–39.
- [17] *Hans Ringström.* Non-linear wave equations. – available at <http://www.math.kth.se/~hansr/nlw.pdf>.
- [18] *Strauss W. A.* Nonlinear wave equation // *CBMS Regional Conf. Ser. in Math.* – Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1989. – **73**.
- [19] *Seng V., Abbaoui K., Cherruault Y.* Adomian’s polynomials for nonlinear operators // *Math. Comput. Modelling.* – 1996. – **24**, N 1. – P. 59–65.
- [20] *Abbaoui K., Cherruault Y., Seng V.* Practical formulae for calculus of multi-variable Adomian polynomials // *Ibid.* – 1995. – **22**, N 1. – 89–93.
- [21] *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
- [22] *Makarov V.L., Dragunov D.V.* A superexponentially convergent functional-dicrete method for solving the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations. – available at <http://arxiv.org/pdf/1101.0096.pdf>.
- [23] *Einar Hille.* Analytic function theory. – Boston: Ginn. and Co., 1959. – 308 p.
- [24] *Makarov V.L., Dragunov D.V., Sember D.A.* FD-method for solving the nonlinear Klein-Gordon equation // *Укр. мат. журн.* – 2012. – **64**, № 10. – С. 1394–1415.
- [25] *Макаров В. Л., Драгунов Д. В., Сембер Д. А.* Алгоритмічні аспекти програмної реалізації FD-методу розв’язування нелінійного рівняння Кляйна–Гордона // *Нелін. коливання.* – 2013. – **16**, № 1. – С. 75–89.