

Об определении собственных колебаний тонкостенных незамкнутых в меридиональном направлении оболочек вращения

Ю.В. Троценко

*Институт математики НАН Украины, Киев;
trots@imath.kiev.ua*

An approach for solving the spectral problem on free vibrations of thin-walled non-closed shells of revolution based on the Ritz method is proposed. This approach has the same convergence rate for both medium and small values of relative thickness of shells. The effectiveness of the method is demonstrated by calculating the natural frequencies and modes for a truncated conical shell. It is shown that the proposed algorithm has the uniform convergence to the solutions and their first four derivatives.

На основі методу Рітца запропоновано підхід для розв'язання спектральної задачі про вільні коливання тонкостінних незамкнених оболонок обертання, швидкість збіжності якої однакова як при середніх, так і при малих значеннях відносної товщини оболонки. На прикладі розрахунку частот і форм коливань зрізаної конічної оболонки показано, що запропонований алгоритм розв'язання задачі забезпечує рівномірну збіжність розв'язків і їх перших чотирьох похідних у всій області інтегрування рівнянь.

1. Введение

Система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающая собственные колебания тонкой упругой оболочки вращения, имеет одну из существенных особенностей, связанной

* Работа выполнена при частичной поддержке НИР № 0112U001015

с наличием малого параметра при старшей производной, который обусловлен тонкостенностью оболочки. Этот факт является определяющим при выборе существующих и разработке новых методов интегрирования таких уравнений.

Широкое использование асимптотических методов применительно к спектральным задачам теории оболочек изложено в работе [7]. Наибольшее применение для решения одномерных задач теории оболочек получил численный метод, основанный на сведении исходной краевой задачи к решению последовательности задач Коши. В связи с тем, что решения для оболочек обладают большой изменчивостью, то прямое применение методов типа Рунге-Кутты для решения задач Коши приводит к неустойчивости вычислений. Избежать этих трудностей (в определенной мере) позволяет метод дискретной ортогонализации решений, который был предложен С.К. Годуновым [6]. Однако рассматриваемый модифицированный метод Рунге-Кутты не обладает равномерной сходимостью по параметру, поскольку число шагов при интегрировании системы уравнений, необходимое для получения решений с заданной точностью, существенно возрастает с уменьшением относительной толщины оболочки. Обширные данные по решению задач динамики и статики оболочек различного вида, полученные на основе этого метода, содержатся в работах [8], [10].

Применение аналитических методов типа Ритца к решению задач теории оболочек существенно затруднено в связи с выбором систем базисных функций, которые бы учитывали наличие в точных решениях высоких градиентов в окрестностях граничных точек задачи. Развитию вариационного метода для решения нелинейной сингулярно возмущенной краевой задачи статики высокоэластичных мембран посвящена работа [16]. При этом, класс допустимых функций, на котором реализован метод Ритца, выбирался на основе установленной структуры асимптотических разложений фундаментальной системы решений соответствующей линеаризованной задачи, имеющей особенности как по параметру при старшей производной, так и по независимой переменной. Полученные на такой основе приближенные решения обладают свойством равномерной сходимости вместе со своими производными до определенного порядка во всех точках области интегрирования исходных нелинейных уравнений.

В данной работе предложен аналогичный подход для построения систем координатных функций при решении методом Ритца спектральной задачи о свободных колебаниях незамкнутых в мериди-

ональном направлении оболочек вращения. Эффективность такого подхода построения приближенных решений проанализирована на задаче о колебаниях цилиндрической и усеченной конической оболочки с жестко закрепленными торцами.

2. Постановка задачи

Рассмотрим оболочку, срединная поверхность которой является поверхностью вращения. У такой оболочки линиями главных кривизн будут ее меридианы и параллели. Будем предполагать, что оболочка ограничена двумя параллелями L_1 и L_2 . В качестве криволинейных координат возьмем длину дуги меридиана s ($s_1 \leq s \leq s_2$) и угол φ , определяющий положение точки на соответствующем параллельном круге. Обозначим через R_1 радиус кривизны меридиана, а через $r = r(s)$ – расстояние от точки меридиана до оси вращения. Второй радиус кривизны R_2 равен длине отрезка нормали к срединной поверхности от этой поверхности до оси оболочки (рис. 1).

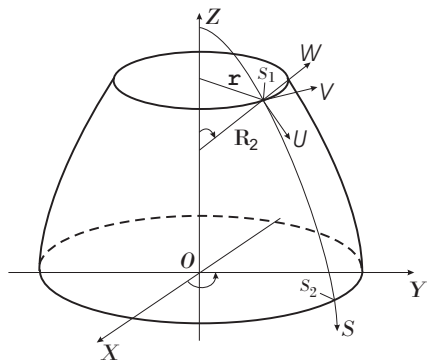


Рис 1. Оболочка вращения.

Проекции перемещения точек срединной поверхности на положительные направления меридиана и параллели, а также внешнюю нормаль к поверхности оболочки обозначим, соответственно, через u , v и w . Рассматривая установившиеся колебания оболочки с n волнами

по параллели, ее перемещения можно представить в виде

$$\begin{aligned} u(s, \varphi, t) &= e^{i\omega t} u(s) \cos n\varphi, \\ v(s, \varphi, t) &= e^{i\omega t} v(s) \sin n\varphi, \\ w(s, \varphi, t) &= e^{i\omega t} w(s) \cos n\varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Тогда определение вектор-функции $\vec{u} = (u, v, w)$ и частоты колебаний оболочки ω сводится к интегрированию однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений при соответствующих граничных условиях, выражающих условия закрепления торцов оболочки. Переходя к безразмерным величинам, эту систему уравнений можно записать в следующей форме:

$$A\vec{u} - \lambda\vec{u} = 0, \quad (2)$$

где

$$A = c^2 K + L, \quad c^2 = \frac{h^2}{12R_0^2}, \quad \lambda = \frac{(1-\nu^2)\rho R_0^2 \omega^2}{E},$$

h, R_0 – толщина и характерный линейный размер оболочки, E, ν, ρ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки.

Дифференциальные выражения, входящие в матрицы L и K , имеют вид

$$\begin{aligned} L_{11} &= -\frac{d}{ds} \frac{1}{r} \frac{d}{ds} r + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n^2}{r^2} - \frac{2}{R_1 R_2} \right), \quad L_{12} = -n \frac{d}{ds} \frac{1}{r} + \frac{1-\nu}{2} \frac{n}{r^2} \frac{d}{ds} r, \\ L_{13} &= \frac{1-\nu}{R_2} \frac{d}{ds} r - \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad L_{21} = \frac{n}{r^2} \frac{d}{ds} r - \frac{(1-\nu)n}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{r}, \\ L_{22} &= \left(\frac{n^2}{r^2} - \frac{1-\nu}{R_1 R_2} \right) - \frac{(1-\nu)}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{r} \frac{d}{ds} r, \quad L_{23} = \frac{n}{r} \left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \\ L_{31} &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{d}{ds} r - \frac{1-\nu}{r} \frac{d}{ds} \frac{r}{R_2}, \quad L_{32} = \frac{n}{r} \left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \\ L_{33} &= \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2}, \quad \Delta_n = \frac{1}{r} \frac{d}{ds} r \frac{d}{ds} - \frac{n^2}{r^2}, \\ K_{33} &= \Delta_n \Delta_n + \frac{1-\nu}{r} \left(\frac{d}{ds} \frac{r}{R_1 R_2} \frac{d}{ds} - \frac{n^2}{r R_1 R_2} \right). \end{aligned}$$

Операторы K_{ij} , при которых стоит малый параметр c^2 , содержат дифференцирование не выше второго порядка при $i, j \leq 2$ и не выше

третьего — при $i + j < 6$. Их явный вид, в отличие от L_{ij} , зависит от предположений, которые делаются в рамках различных теорий оболочек, использующих гипотезу Кирхгофа-Лява. Выражения для K_{ij} в случае оболочек произвольного очертания и наиболее общих соотношениях упругости приведен в [2]. Будем предполагать, что

$$K_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i + j < 6. \quad (3)$$

Предположение (3) в терминологии В.З. Власова [5] соответствует технической теории оболочек, в которой пренебрегают членами, зависящими от касательных перемещений в формулах для изменения кривизны и кручения.

Решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2) должны быть подчинены соответствующим однородным граничным условиям. Для случая абсолютно жесткого закрепления края оболочки эти условия имеют вид

$$u = v = w = \frac{dw}{ds} = 0. \quad (4)$$

3. Построение приближенного решения задачи

Решение исходной однородной системы дифференциальных уравнений (2) при соответствующих граничных условиях можно свести к следующей эквивалентной вариационной задаче отыскания стационарных значений функционала I , вариацию которого можно представить в следующем виде [17]:

$$\begin{aligned} \delta I = \int_{s_1}^{s_2} & \left[\Psi_{11}(u, \delta u) + \Psi_{12}(v, \delta u) + \Psi_{13}(w, \delta u) + \Psi_{12}(\delta v, v) + \right. \\ & + \Psi_{22}(v, \delta v) + \Psi_{23}(w, \delta v) + \Psi_{13}(\delta w, u) + \Psi_{23}(\delta w, v) + \\ & \left. + \Psi_{33}(w, \delta w) \right] r ds - \lambda \int_{s_1}^{s_2} (u \delta u + v \delta v + w \delta w) r ds = 0. \quad (5) \end{aligned}$$

Введенные здесь дифференциальные операторы $\Psi_{ij}(p, q)$, где p и q произвольные функции, имеют следующий вид

$$\Psi_{11}(p, q) = \left(\frac{\cos^2 \theta}{r^2} + \frac{\nu_1 n^2}{r^2} \right) pq + \left(\frac{dp}{ds} + \frac{\nu \cos \theta}{r} p \right) \frac{dq}{ds} + \frac{\nu \cos \theta}{r} \frac{dp}{ds} q,$$

$$\Psi_{12}(p, q) = \left(\frac{n \cos \theta}{r^2} + \frac{\nu_1 n \cos \theta}{r^2} \right) pq + \frac{\nu n}{r} p \frac{dq}{ds} - \frac{\nu_1 n}{r} q \frac{dp}{ds},$$

$$\Psi_{13}(p, q) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu \sin \theta}{r} \right) p \frac{dq}{ds} + \left(\frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} + \frac{\nu \cos \theta}{r R_1} \right) pq,$$

$$\Psi_{22}(p, q) = \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\nu_1 \cos^2 \theta}{r^2} \right) pq + \left(\nu_1 \frac{dp}{ds} - \frac{\nu_1 \cos \theta}{r} p \right) \frac{dq}{ds} - \frac{\nu_1 \cos \theta}{r} \frac{dp}{ds} q,$$

$$\Psi_{23}(p, q) = \left(\frac{n \sin \theta}{r^2} + \frac{\nu n}{r R_1} \right) pq,$$

$$\begin{aligned} \Psi_{33}(p, q) = & c^2 \left[\frac{d^2 p}{ds^2} \frac{d^2 q}{ds^2} + \frac{\nu \cos \theta}{r} \left(\frac{d^2 p}{ds^2} \frac{dq}{ds} + \frac{d^2 q}{ds^2} \frac{dp}{ds} \right) - \frac{\nu n^2}{r^2} \left(\frac{d^2 p}{ds^2} q + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{d^2 q}{ds^2} p \right) + \frac{\cos^2 \theta + 2(1-\nu)n^2}{r^2} \frac{dp}{ds} \frac{dq}{ds} - \frac{n^2 \cos \theta (3-2\nu)}{r^3} \left(\frac{dq}{ds} p + \frac{dp}{ds} q \right) \right] + \\ & + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} + \frac{2\nu \sin \theta}{r R_1} + \frac{c^2 n^4 + 2(1-\nu)c^2 n^2 \cos^2 \theta}{r^4} \right) pq, \end{aligned}$$

где $\nu_1 = \frac{(1-\nu)}{2}$, θ – угол, образуемый нормалью к оболочке и ее осью вращения Oz .

Для определенности будем считать, что оба края оболочки жестко закреплены. В этом случае решения, удовлетворяющие уравнению (5), должны быть подчинены граничным условиям (4) при $s = s_1$ и $s = s_2$.

Для нахождения стационарных значений соответствующего функционала воспользуемся методом Ритца. В связи с этим, представим функции $u(s)$, $v(s)$ и $w(s)$ в виде отрезков обобщенных рядов

$$u(s) = \sum_{j=1}^N x_j U_j(s), \quad v(s) = \sum_{j=1}^N x_{j+N} V_j(s), \quad w(s) = \sum_{j=1}^N x_{j+2N} W_j(s). \quad (6)$$

Здесь x_j $j = \overline{1, 3N}$ – пока неопределенные постоянные, $\{U_j\}$, $\{V_j\}$ и $\{W_j\}$ – системы координатных функций, которые подчинены граничным условиям (4).

При нахождении стационарных значений функционала I , как функции x_1, x_2, \dots, x_{3N} в качестве необходимых условий выступают равенства

$$\frac{\partial I}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, 3N}.$$

В итоге, решение исходной задачи сводится к решению обобщенной алгебраической задачи на собственные значения

$$(A - \lambda B)\vec{x}^T = 0, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{3N}) \quad (7)$$

с симметричными матрицами A и B . Симметричность матрицы A следует из симметричности оператора \mathcal{A} . Собственные числа алгебраической задачи (7) являются приближенными значениями первых $3N$ собственных чисел рассматриваемой граничной задачи. При этом все они являются верхними границами для λ_i $i = \overline{1, 3N}$.

Последовательности координатных функций должны быть полными и линейно независимыми [11]. Выполнение первого условия обеспечивает сходимость метода, а именно N -й член последовательности Рунца можно сделать как угодно близким к исходному обобщенному решению задачи, выбрав довольно большое число N . Второе условие обуславливает существование только одного решения алгебраической задачи (7). Следует отметить, что выполнение этих требований является необходимым, но не достаточным условием для эффективного построения минимизирующей последовательности Рунца. Поскольку при большом числе координатных функций необходимо решать алгебраические системы большой размерности. При этом, ошибки округления чисел начинают играть существенную роль с одной стороны при вычислении коэффициентов алгебраической системы, а с другой - при решении этой системы уравнений [12]. Все это приводит к потере устойчивости вычислительного процесса до достижения граничных значений решений. Таким образом, вопрос о выборе последовательности координатных функций является далеко не тривиальным и успех использования вариационного метода при построении приближенного решения граничных задач в значительной мере зависит от этого выбора.

В одномерных задачах построение координатных функций можно осуществлять на классе степенных функций. Однако построенные таким образом приближения пригодны лишь для тех случаев, когда в разложениях Рунца можно обойтись небольшим числом членов.

Иначе элементы алгебраической системы очень быстро возрастают по абсолютной величине и это существенно влияет на устойчивость вычислительного процесса. Определенных успехов можно достичь, если при аппроксимации искомых решений использовать полиномы Лежандра, абсолютные значения которых не превосходят единицу для любого аргумента. Это позволяет увеличить предельное значение числа N в три-четыре раза по отношению к степенному базису и тем самым расширить диапазон входных параметров задачи, при которых можно проводить расчеты с заданной точностью [18].

На скорость сходимости последовательности Ритца в существенной мере влияет относительная толщина оболочки. Уменьшение ее приводит к тому, что рассматриваемая граничная задача переходит в разряд сингулярно возмущенных спектральных задач. Наличие малого параметра при старшей производной в разрешающей системе уравнений указывает на то, что искомые решения имеют одновременно как быстро, так и медленно изменяющиеся компоненты. Аппроксимация быстро изменяющейся компоненты решения полиномиальным базисом не приводит к желаемому результату и, таким образом, возникает принципиальный вопрос о расширении класса допустимых функций такими функциями, которые позволяли бы получать приближенные решения с одинаково высокой степенью точности как при наличии узкой зоны с большими градиентами в решениях, так и без нее. Указанная проблема относится к проблеме построения приближенных алгоритмов решения сингулярно возмущенных граничных задач, обладающих равномерной сходимостью [9].

Одним из важных достоинств метода Ритца является то обстоятельство, что он позволяет при построении приближенного решения учесть свойства искомых решений, которые можно установить на основе чисто качественного анализа рассматриваемой задачи. С другой стороны, методы малого параметра, помимо своего непосредственного назначения, могут служить основой для выяснения качественных особенностей задач. Поэтому с целью установления структуры решения задачи и характера его вырождения, когда параметр при старшей производной стремится к нулю, приведем формальные асимптотические разложения фундаментальной системы решений уравнений (2). Система дифференциальных уравнений (2) приводится к одному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами относительно неизвестной $w(s)$. Это уравнение может быть представ-

лено в следующем виде:

$$\mu^{m-l}N(w) - M(w) = 0, \quad (8)$$

где

$$N(w) = \sum_{k=0}^m a_{m-k}(s) \frac{d^k w}{ds^k}, \quad M(w) = \sum_{k=0}^l b_{l-k}(s) \frac{d^k w}{ds^k}, \quad m > l.$$

Структура уравнения (8) вписывается в общую теорию дифференциальных уравнений m -го порядка с малым параметром при старшей производной [3]. Обозначение малого параметра c^2 через μ^{m-l} используется далее лишь для удобства.

При $m = 8$ и $l = 4$ к этому уравнению сводится система уравнений, описывающая неосесимметричные колебания оболочки вращения при небольшом числе волн по параллели. Для случая осесимметричных колебаний оболочки имеем $m = 6$ и $l = 2$. Коэффициенты уравнения $a_i(s)$ и $b_i(s)$ являются действительными и дифференцируемыми функциями на конечном замкнутом интервале $s_1 \leq s \leq s_2$. Кроме того,

$$a_0(s) \equiv 1, \quad b_0(s) = \lambda - \frac{1 - \nu^2}{R_2^2}. \quad (9)$$

Явный вид остальных коэффициентов нам не понадобится, поскольку в дальнейшем нас будет интересовать только структура линейно независимых решений уравнения (8). Потребуем, чтобы

$$b_0(s) \neq 0, \quad b_0(s) < 0 \quad \text{при} \quad s_1 \leq s \leq s_2. \quad (10)$$

Первое условие исключает из рассмотрения точки поворота для рассматриваемого уравнения, а второе условие означает, что в дальнейшем будем рассматривать только низшую часть частотного спектра оболочки.

Построим сначала l интегралов уравнения (8), используя для этой цели прямое разложение его решения по малому параметру:

$$w_j(s, \mu) = \sum_{p=0}^{\infty} \mu^{p(m-l)} w_{j,p}(s), \quad j = \overline{1, l}. \quad (11)$$

Подставим этот ряд в уравнение (8) и приравняем к нулю коэффициенты при одинаковых степенях μ . Тогда для нулевого приближения получим однородное дифференциальное уравнение

$$M(w_{j,0}(s)) = 0, \quad j = \overline{1, l}. \quad (12)$$

Очевидно, что функции $w_{j,0}(s)$ образуют фундаментальную систему решений для вырожденного дифференциального уравнения (8) при $\mu = 0$. Определение последующих функций $w_{j,p}(s)$ сводится к интегрированию этого же уравнения, в правую часть которого входят ранее найденные функции $w_{j,p-1}(s)$:

$$M(w_{j,p}(s)) = N(w_{j,p-1}(s)), \quad p = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Существенным свойством построенных таким образом первых l интегралов уравнения (8) является то, что каждый из них может быть представлен в виде ряда Тейлора в интервале $s_1 \leq s \leq s_2$.

Последующие $(m-l)$ интегралов будем искать в виде разложений, включающих в себя экспоненциальный множитель [3]:

$$w_{l+j}(s, \mu) = \sum_{p=0}^{\infty} \mu^p w_{l+j,p}(s) \exp \left\{ \frac{1}{\mu} \int_{s_0}^s \varphi_j(t) dt \right\}, \quad (14)$$

$$j = \overline{1, (m-l)}.$$

Для определения функций $\varphi_j(s)$ и $w_{l+j,p}(s)$ подставляем этот ряд в дифференциальное уравнение (8) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ . Коэффициент при μ^{-l} дает характеристическое уравнение для определения функций $\varphi_j(s)$:

$$(\varphi_j(s))^{m-l} - b_0(s) = 0, \quad (15)$$

откуда находим четыре ненулевых значения $\varphi_j(s)$. Располагая их в порядке возрастания действительных частей, будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) &= \frac{-1+i}{\sqrt{2}} |b_0|^{1/4}, & \varphi_2(s) &= \frac{-1-i}{\sqrt{2}} |b_0|^{1/4}, \\ \varphi_3(s) &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} |b_0|^{1/4}, & \varphi_4(s) &= \frac{1-i}{\sqrt{2}} |b_0|^{1/4}. \end{aligned} \quad (16)$$

По терминологии работы [4] вырождение исходной краевой задачи в задачу при $\mu \rightarrow 0$ является регулярным, поскольку уравнение (15) в рассматриваемом диапазоне частот свободных колебаний оболочки имеет корни, из которых два имеют отрицательную вещественную часть, а два положительную. Коэффициент при μ^{-l+1} дает однородное линейное уравнение первого порядка для нахождения функций $w_{l+j,0}(s)$. В свою очередь коэффициент при μ^{-l+1+p} $p = 1, 2, \dots$ приводит к решению этого же уравнения относительно функций $w_{l+j,p}(s)$, но с правыми частями, которые линейно зависят от предыдущих функций $w_{l+j,k}(s)$ ($k < p$) и их производных. Структура этих уравнений и аналитические свойства их коэффициентов позволяет сделать заключение, что все функции $w_{l+j,p}(s)$ представимы в виде разложений в ряд Тейлора в окрестности точек $s = s_1$ и $s = s_2$.

В представлении интегралов (14) при $j = 1, 2$ положим $s_0 = s_1$, а при $j = 3, 4$ положим $s_0 = s_2$ и отделим в этих интегралах их вещественную и мнимую части. При этом для экспоненциального множителя получим выражения

$$e^{\beta_k(s)} \cos \beta_k(s), \quad e^{\beta_k(s)} \sin \beta_k(s),$$

$$\beta_k(s) = \frac{(-1)^k}{\mu\sqrt{2}} \int_{s_k}^s |b_0(t)|^{1/4} dt, \quad k = 1, 2. \quad (17)$$

Исходя из этого, можно сделать вывод, что первые два интеграла (14) локализованы в окрестности точки $s = s_1$, тогда как остальные два интеграла локализованы в окрестности точки $s = s_2$. Иными словами их вклад в общее решение уравнения (8) существенен только вблизи одного из краев оболочки на расстояниях $|s - s_k|$, $k = 1, 2$ порядка $O(\mu)$ от края.

Для большинства оболочек вращения интеграл, входящий в выражение для $\beta_k(s)$ не вычисляется в элементарных функциях. В этом случае интегралы с большой изменчивостью могут быть представлены в другой форме, которая является более удобной для их построения. Как показано в работе [4], интегралы (14), у которых $Re\varphi_j(s) < 0$, могут быть представлены в виде:

$$w_{l+j}(s, \mu) = \sum_{p=0}^{\infty} \mu^p P_j^{(p)}(\tau) \exp\{\varphi_j(s_1)\tau\}, \quad \tau = \frac{s - s_1}{\mu}, \quad (18)$$

где $P_j^{(p)}(\tau)$ – полином по τ степени не выше $2p$ с постоянными коэффициентами, зависящими от коэффициентов уравнений $a_i(s)$ и $b_i(s)$ и их производных в точке $s = s_1$.

Аналогичное представление интегралов имеет место и в окрестности точки $s = s_2$ при $\operatorname{Re} \varphi_j(s) > 0$. Эти полиномы в литературе получили название полиномов Вишика-Люстерника.

Структура интегралов с большой изменяемостью для функций $u(s, \mu)$ и $v(s, \mu)$ совпадает со структурой интегралов для функции $w(s, \mu)$ с той лишь разницей, что в разложениях типа (14) появляется постоянный множитель, зависящий от параметра μ [7].

Построение интегралов (11) с медленной изменяемостью, как правило, осуществляется с помощью стандартных численных методов интегрирования соответствующей последовательности уравнений. Явные выражения для интегралов с большой изменяемостью для ряда оболочек (в том числе с учетом точек поворота) для нулевого и первого приближения построены в работах [1], [7], [13–15] и других.

Приведенные выше результаты позволяют теперь сформулировать основные принципы построения координатных функций при решении рассматриваемой задачи вариационным методом в условиях ее сингулярного возмущения.

Учитывая установленную выше регулярность функций $w_{j,p}(s)$ ($j = 1, 2, \dots, m, p = 0, 1, \dots$) в разложениях (11) и (14), их можно представить в виде соответствующих рядов Тейлора на замкнутом интервале $s_1 \leq s \leq s_2$ с неизвестными коэффициентами. Тогда общее решение для функций $u(s)$, $v(s)$ и $w(s)$ можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned}
 f(s) = & \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,0} s^i + e^{\beta_1(s)} \cos \beta_1(s) \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,1} (s - s_1)^i + \\
 & + e^{\beta_1(s)} \sin \beta_1(s) \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,2} (s - s_1)^i + \\
 & + e^{\beta_2(s)} \cos \beta_2(s) \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,3} (s - s_2)^i + \\
 & + e^{\beta_2(s)} \sin \beta_2(s) \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,4} (s - s_2)^i,
 \end{aligned} \tag{19}$$

где $f_{i,j}$ – неопределенные постоянные, зависящие от параметра μ , а под функцией $f(s)$ будем понимать любую из неизвестных функций $u(s)$, $v(s)$ и $w(s)$ с соответствующими для них коэффициентами разложений.

В соответствии с изложенным выше, общие решения (19) необходимо подчинить главным граничным условиям рассматриваемой задачи на собственные значения. Исходя из этих условий, находим дополнительные соотношения между некоторыми коэффициентами в представлении (19). Подставляя эти соотношения в общий вид решений для функций $u(s)$, $v(s)$, $w(s)$ и собирая члены при одинаковых коэффициентах, получим наборы координатных функций для аппроксимации искомых решений.

Для получения наиболее простых соотношений между коэффициентами в выражениях (19) при выполнении граничных условий первую сумму, не нарушая общности, можно представлять в виде разложений по степеням $(s - s_1)$ или по степеням $(s - s_2)$. Полученный при этом степенной базис с некоторой весовой функцией можно представить в виде произведения этой весовой функции на полиномы Лежандра, абсолютные значения которых не возрастают с ростом порядка полинома.

Для тех форм меридиана оболочки, для которых явное вычисление интеграла, входящего в выражение для $\beta_k(s)$, не представляется возможным, построение систем координатных функций должно осуществляться на основе представления интегралов с большой изменчивостью в форме (18).

Оценку эффективности аппроксимации искомых решений с помощью построенных таким образом систем базисных функций ниже продемонстрируем на задаче о свободных колебаниях усеченной конической оболочки с двумя жестко закрепленными краями.

Элементы матриц A и B алгебраической системы (7), которые расположены на главной диагонали и выше ее, будут вычисляться по следующим формулам:

$$a_{i,j} = \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{11}(U_j, U_i) r ds, \quad a_{i,j+N} = \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{12}(V_j, U_i) r ds,$$

$$a_{i,j+2N} = \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{13}(W_j, U_i) r ds, \quad a_{i+N,j+N} = \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{22}(V_j, V_i) r ds,$$

$$\begin{aligned}
a_{i+N,j+2N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{23}(W_j, V_i) r ds, & a_{i+2N,j+2N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{33}(W_j, W_i) r ds, \\
b_{i,j} &= \int_{s_1}^{s_2} U_j U_i r ds, & b_{i+N,j+N} &= \int_{s_1}^{s_2} V_j V_i r ds, \\
b_{i,j+N} &= b_{i,j+2N} = b_{i+N,j+2N} = 0, & b_{i+2N,j+2N} &= \int_{s_1}^{s_2} W_j W_i r ds.
\end{aligned}$$

Координатные функции $U_i(s)$, $V_i(s)$ и $W_i(s)$ должны быть подчинены главным граничным условиям (4).

В результате применения описанной выше процедуры, система базисных функций для аппроксимации функции $w(s)$ будет иметь следующую структуру:

$$\{W_i\}_{i=1}^N = \{W_1, \dots, W_m; W_{m+1}, \dots, W_{m+m_p}; W_{m+m_p+1}, \dots, W_{m+2m_p}; \\
W_{m+2m_p+1}, \dots, W_{m+3m_p}; W_{m+3m_p+1}, \dots, W_{m+4m_p}\}. \quad (20)$$

В выражении (20) выделены пять групп функций, которые отделены друг от друга точкой с запятой. Первая группа из m функций представляет собою регулярный базис, образованный из полиномов Лежандра с определенной весовой функцией. Вторая и третья группы функций связаны с наличием погранслоя в окрестности точки $s = s_1$, а четвертая и пятая группы функций – в окрестности точки $s = s_2$. Количество функций в этих группах обозначено через m_p . Аналогичную структуру имеют и координатные функции для аппроксимации решений $u(s)$ и $v(s)$. Поскольку главные граничные условия для функций $u(s)$ и $v(s)$ имеют одинаковый вид, то $V_i = U_i$, $i = \overline{1, N}$.

Введем в рассмотрение следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
b_{0,k}(\lambda) &= \lambda - \frac{1 - \nu^2}{R_2^2(s_k)}, & p_k &= p_k(\lambda) = \frac{(-1)^k |b_{0,k}(\lambda)|^{1/4}}{\mu \sqrt{2}}, \\
g_{c_k} &= e^{p_k(s-s_k)} \cos p_k(s-s_k), & g_{s_k} &= e^{p_k(s-s_k)} \sin p_k(s-s_k), \\
k &= 1, 2.
\end{aligned} \quad (21)$$

Тогда явные выражения для координатных функций U_j и W_j будут

ИМЕТЬ ВИД:

$$\begin{aligned}
U_j(s) &= (s - s_1)(s - s_2)P_j\left(\frac{2s}{l_s} - 1\right), \\
W_j(s) &= (s - s_1)^2(s - s_2)^2P_j\left(\frac{2s}{l_s} - 1\right), \quad j = \overline{1, m}, \\
U_{m+1}(s) &= g_{c_1} - 1 + \frac{s - s_1}{s_2 - s_1}, \quad W_{m+1}(s) = g_{c_1} - 1 + \frac{s - s_1}{s_2 - s_1} - \\
&\quad - \frac{(s - s_1)(s - s_2)[p_1(s - s_1)(s_2 - s_1) + 1]}{(s_1 - s_2)(s_2 - s_1)} - \\
&\quad - \frac{(s - s_1)^2(s - s_2)[p_1(s - s_1)(s_2 - s_1) + 2]}{(s_2 - s_1)^3}, \\
W_{m+2}(s) &= g_{c_1}(s - s_1) + \frac{(s - s_1)(s - s_2)}{(s_2 - s_1)} - \frac{(s - s_1)^2(s - s_2)}{(s_2 - s_1)^2}, \\
U_{m+j}(s) &= g_{c_1}(s - s_1)s^{j-1}, \quad U_{m+m_p+1}(s) = g_{s_1}, \\
U_{m+m_p+j}(s) &= g_{s_1}(s - s_1)s^{j-1}, \\
U_{m+2m_p+1}(s) &= g_{c_2} - \frac{s - s_1}{s_2 - s_1}, \quad U_{m+2m_p+j}(s) = g_{c_2}(s - s_2)s^{j-1}, \\
U_{m+3m_p+1}(s) &= g_{s_2}, \quad W_{m+j}(s) = g_{c_1}(s - s_1)^2s^{j-1}, \\
U_{m+3m_p+j}(s) &= g_{s_2}(s - s_2)s^{j-1}, \quad j = \overline{2, m_p}, \\
W_{m+m_p+1}(s) &= g_{s_1} + \frac{p_1(s - s_1)^2(s - s_2)}{(s_2 - s_1)} - \frac{p_1(s - s_1)^3(s - s_2)}{(s_2 - s_1)^2}, \\
W_{m+m_p+2}(s) &= g_{s_1}(s - s_1), \quad W_{m+m_p+j}(s) = g_{s_1}(s - s_1)^2s^{j-1}, \\
W_{m+2m_p+1}(s) &= g_{c_2} - \frac{(s - s_1)}{(s_2 - s_1)} - \frac{(s - s_1)(s - s_2)}{(s_1 - s_2)^2} - \\
&\quad - \frac{(s - s_1)^2(s - s_2)[p_2(s - s_2)(s_2 - s_1) - 2]}{(s_2 - s_1)^3}, \\
W_{m+2m_p+2}(s) &= g_{c_2}(s - s_2) - \frac{(s - s_1)^2(s - s_2)}{(s_2 - s_1)^2}, \\
W_{m+2m_p+j}(s) &= g_{c_2}(s - s_2)^2s^{j-1}, \\
W_{m+3m_p+1}(s) &= g_{s_2} - \frac{p_2(s - s_1)^2(s - s_2)^2}{(s_2 - s_1)^2}, \quad W_{m+3m_p+2}(s) = g_{s_2}(s - s_2), \\
W_{m+3m_p+j}(s) &= g_{s_2}(s - s_2)^2s^{j-1}, \quad j = \overline{3, m_p}, \quad l_s = s_2 - s_1.
\end{aligned} \tag{22}$$

Здесь $P_j(s)$ — смещенные на единицу по индексу j многочлены Лежандра, вычисление которых и их первых двух производных можно проводить с помощью рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} P_{j+2}(s) &= \frac{1}{j+1} [(2j+1)sP_{j+1}(s) - jP_j(s)], \\ P'_{j+2}(s) &= sP'_{j+1}(s) + (j+1)P_{j+1}(s), \\ P''_{j+2}(s) &= sP''_{j+1}(s) + (j+2)P'_{j+1}(s), \\ P_1(s) &= 1; \quad P_2(s) = s, \quad j = \overline{1, N-2}, \end{aligned} \quad (23)$$

Определенные неудобства при решении рассматриваемой задачи на собственные значения доставляет тот факт, что, как и следовало ожидать, в показатель изменяемости координатных функций p_k (21), связанных с наличием краевых эффектов, входит параметр λ , который заранее неизвестен. Это приводит к необходимости организации итерационного процесса последовательных приближений по параметру λ для нахождения его минимального значения, что определенным образом усложняет алгоритм решения задачи. Этого процесса можно избежать, если найти такое приближенное значение $\tilde{\lambda}$, которое отличается от истинного значения λ на малую величину порядка μ . Поскольку параметр λ является интегральной характеристикой задачи, то его вычисление с достаточной степенью точности можно провести на основе использования лишь регулярной части базиса даже в условиях сингулярного возмущения задачи. При этом неточность вычисления λ в выражении для p_k в формулах (21) будет компенсироваться количеством m_p членов для соответствующих решений с высокими градиентами. Получение начального значения параметра λ можно осуществить в рамках единой программы для ПК, положив в ней параметр m_p равным нулю.

4. Некоторые результаты расчетов

Приведем некоторые результаты расчета частот и форм собственных колебаний конической оболочки по предложенному выше алгоритму. В этом случае будем иметь:

$$s = \frac{l-z}{\cos \alpha}; \quad r(s) = 1 + s \sin \alpha; \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha; \quad \frac{1}{R_1} = 0, \quad (24)$$

где l и α — высота и угол полураствора усеченного конуса соответственно.

Таблица 1. Значения частот ω_i , функций $w_i(z^*)$ и их производных в точке $z^* = 0.99$ колебаний рассматриваемой оболочки при $n = 1$, $m_p = 2$, $\delta = 1000$, $\alpha = 0^\circ$ в зависимости от числа членов m в регулярном базисе

| m | ω_i | w_i | w_i^I | w_i^{II} | w_i^{III} | w_i^{IV} |
|---------|------------|----------|----------|------------|-------------|------------|
| $i = 1$ | | | | | | |
| 2 | 0.308517 | 0.078491 | 1.946292 | -49.2410 | -487.154 | 214694.6 |
| 4 | 0.305471 | 0.073404 | 1.824635 | -41.1165 | -372.750 | 157571.2 |
| 6 | 0.305466 | 0.073336 | 1.822331 | -41.3055 | -373.444 | 159370.3 |
| 8 | 0.305466 | 0.073334 | 1.822307 | -41.3001 | -373.457 | 159328.0 |
| 10 | 0.305466 | 0.073334 | 1.822307 | -41.3002 | -373.457 | 159328.4 |
| 12 | 0.305466 | 0.073334 | 1.822307 | -41.3002 | -373.457 | 159328.4 |
| $i = 2$ | | | | | | |
| 2 | 0.586145 | -0.06180 | -2.35139 | 39.9794 | 4031.075 | -409828 |
| 4 | 0.573173 | -0.05370 | -1.88036 | -8.33819 | 658.7091 | -22648.6 |
| 6 | 0.573034 | -0.05432 | -1.92459 | -1.31042 | 1112.712 | -77168.2 |
| 8 | 0.573034 | -0.05429 | -1.92222 | -1.74325 | 1087.452 | -73777.6 |
| 10 | 0.573034 | -0.05429 | -1.92227 | -1.72866 | 1088.174 | -73892.9 |
| 12 | 0.573034 | -0.05429 | -1.92227 | -1.72897 | 1088.161 | -73890.4 |
| 14 | 0.573034 | -0.05429 | -1.92227 | -1.72896 | 1088.161 | -73890.5 |
| $i = 3$ | | | | | | |
| 2 | 0.883718 | 0.06e11 | 0.21e13 | -0.1e14 | -0.15e16 | 0.72e17 |
| 4 | 0.774417 | -0.10408 | -4.07654 | 1.15063 | 4020.93 | -28653.0 |
| 6 | 0.759725 | -0.07338 | -2.76493 | -17.0210 | 1460.89 | -48932.4 |
| 8 | 0.759391 | -0.07186 | -2.71864 | -12.8252 | 1657.91 | -78465.8 |
| 10 | 0.759388 | -0.07169 | -2.71190 | -13.1577 | 1637.33 | -75411.5 |
| 12 | 0.759388 | -0.07169 | -2.71184 | -13.1370 | 1637.96 | -75571.5 |
| 14 | 0.759388 | -0.07169 | -2.71184 | -13.1377 | 1637.94 | -75565.2 |

Если в формулах (24) принять $\alpha = 0$, то получим, как частный случай, цилиндрическую оболочку единичного радиуса. Во всех расчетах полагалось, что безразмерная высота усеченного конуса равна 4, а коэффициент Пуассона равен 0.3. Отношение радиуса оболочки при $s = s_1$ к ее толщине обозначим через δ .

В табл. 1 приведены результаты вычисления при $\delta = 1000$, $\alpha = 0^\circ$ первых трех безразмерных частот $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$, функций $w_i(z^*)$, ($i = 1, 2, 3$) и их производных в точке $z^* = 0.99$ при антисимметричных колебаниях оболочки $n = 1$ в зависимости от количества членов m в регулярном базисе. Здесь и далее $z^* = z/l$.

Для аппроксимации компонент решений с большими градиентами, локализованными в окрестностях точек $z^* = 0$ и $z^* = 1$, было использовано по две координатные функции ($m_p = 2$). В табл. 1 приведено такое количество знаков в рассчитываемых величинах, которые не изменяются с увеличением числа m_p . Полученные данные свидетельствуют о равномерной сходимости решений и их первых четырех производных. Аналогичная сходимость наблюдается и в других точках интервала $s_1 \leq s \leq s_2$, что позволяет определять значения усилий, моментов и перерезывающих сил во всех точках срединной поверхности оболочки.

Скорость сходимости рассчитываемых величин к их предельным значениям, как и следовало ожидать, является неодинаковой. Так, для низшей частоты первые девять знаков стабилизируются, начиная с $m = 8$, тогда как для третьей производной при этом же значении m стабилизируются лишь четыре значащие цифры. При увеличении номера формы колебаний наблюдается некоторое замедление сходимости последовательностей Рунге.

Получение аналогичных результатов с использованием только регулярного базиса возможно при $m = 80$. Это можно объяснить тем обстоятельством, что точные решения, которые включают в себя экспоненты с большими аргументами, плохо представляются в виде рядов Тейлора. При дальнейшем уменьшении относительной толщины оболочки использование регулярного базиса для получения решений рассматриваемого качества становится неэффективным, поскольку происходит потеря устойчивости счета до достижения предельных значений рассчитываемых величин.

В табл. 2 приведены аналогичные данные для первой формы изгибных колебаний оболочки, полученные при $\delta = 100; 2000$. Сопоставляя эти результаты, можно сделать вывод, что предложенный алгоритм решения рассматриваемой задачи обладает одинаковой эффективностью как при средних, так и при малых значениях параметра при старшей производной в исходных уравнениях.

Следует также заметить, что поскольку сама исходная система уравнений (2) является неточной, то нет необходимости проводить вычисления с высокой степенью точности. Приведенное количество значащих цифр для рассчитываемых величин в табл. 1 и 2 иллюстрирует лишь возможности предлагаемого способа построения приближенного решения спектральной задачи. Ограничиваясь в практических расчетах реальной точностью вычислений, можно существенно

Таблица 2. Значения частоты ω_1 , функции $w_1(z^*)$ и ее производных в точке $z^* = 0.99$ колебаний рассматриваемой оболочки при $n = 1$, $m_p = 2$, $\delta = 100$, $\delta = 2000$, $\alpha = 0^\circ$ в зависимости от числа членов m в регулярном базисе

| m | ω_1 | w_1 | w_1^I | w_1^{II} | w_1^{III} | w_1^{IV} |
|-----------------|------------|-----------|----------|------------|-------------|------------|
| $\delta = 100$ | | | | | | |
| 2 | 0.3073112 | 0.0225267 | 0.995807 | 15.25770 | -450.78 | 3971.5 |
| 4 | 0.3058882 | 0.0222008 | 0.957922 | 13.48223 | -430.34 | 6712.7 |
| 6 | 0.3058869 | 0.0221731 | 0.957494 | 13.51401 | -430.49 | 6613.6 |
| 8 | 0.3058869 | 0.0221732 | 0.957485 | 13.51337 | -430.47 | 6614.9 |
| 10 | 0.3058869 | 0.0221732 | 0.957485 | 13.51336 | -430.47 | 6614.9 |
| 12 | 0.3058869 | 0.0221732 | 0.957485 | 13.51335 | -430.47 | 6614.9 |
| $\delta = 2000$ | | | | | | |
| 2 | 0.3087912 | 0.0932625 | 1.360032 | -72.72263 | 3868.799 | 118159.5 |
| 4 | 0.3054399 | 0.0876306 | 1.353135 | -64.16305 | 2832.105 | 81459.6 |
| 6 | 0.3054344 | 0.0875060 | 1.347701 | -64.21545 | 2866.972 | 82253.7 |
| 8 | 0.3054344 | 0.0875046 | 1.347749 | -64.21226 | 2866.097 | 82241.1 |
| 10 | 0.3054344 | 0.0875046 | 1.347748 | -64.21227 | 2866.106 | 82241.1 |
| 12 | 0.3054344 | 0.0875046 | 1.347748 | -64.21227 | 2866.106 | 82241.1 |

уменьшить порядок решаемой алгебраической системы.

Поточечная сходимость приближенных решений и их первых четырех производных позволяет провести проверку удовлетворения этих решений исходным уравнениям на всем интервале их интегрирования. Обозначим через $\varepsilon_i = \varepsilon_i(z^*)$, $i = \overline{1, 3}$, значения левых частей уравнений (2), вычисленных в точках $z^* \in [0, 1]$.

На рис. 2 показано поведение функций $\varepsilon_i(z^*)$ во всей области интегрирования уравнений (2) при $m_p = 0$ и $m_p = 2$. При этом в обоих случаях в регулярном базисе удерживалось шестнадцать координатных функций. При выполнении расчетов нормировка собственных функций выполнялась таким образом, чтобы максимум абсолютного значения для перемещений оболочки в ее нормальном направлении равнялся единице. Результаты рис. 2 показывают, что решения, построенные с использованием только регулярного базиса удовлетворяют всем трем уравнениям с точностью, не превышающей 0.1. Добавление к регулярному базису двух координатных функций, локализованных в окрестности защемленных торцов, приводит к тому,

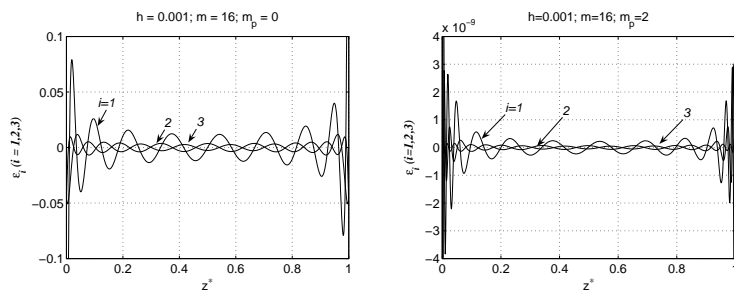


Рис 2. Поведение функций $\varepsilon_i(z^*)$ во всей области интегрирования уравнений (2) при $m_p = 0$ и $m_p = 2$.

что значения ε_i не превышают величину порядка $4 \cdot 10^{-9}$. При этом наибольшие значения ε_i принимают, как и следовало ожидать, вблизи границ крепления оболочки. Приведенные результаты позволяют трактовать полученные приближенные решения рассматриваемой спектральной задачи как решения близкие, в определенном смысле, к точным решениям задачи.

Перейдем к некоторому анализу решений для конической оболочки. Расчеты показывают, что предлагаемые координатные функции позволяют, как и в случае цилиндрической оболочки, вычислять решения и их первые четыре производные в каждой точке интервала интегрирования уравнений. Тем самым подтверждается эффективность представлений погранслойных функций в форме Вышика – Люстерника для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Известно, что на сходимость решений влияет не только толщина оболочки, но и ее длина. В табл. 3 представлены результаты расчета первых трех частот изгибных колебаний $n = 1$ усеченной конической оболочки в зависимости от числа членов в регулярном базисе m , полученные при следующих исходных данных $l = 20; 30$, $\delta = 2000$ и $\alpha = 15^\circ$. При этом полагалось $m_p = 2$. Как видно из табл. 3 увеличение длины оболочки, как и следовало ожидать, влечет за собой снижение скорости сходимости. Для стабилизации шести значащих цифр в первых трех частотах при $l = 20$ достаточно удерживать десять координатных функций в регулярном базисе при $m_p = 2$. Во

Таблица 3. Значения первых трех частот ω_i изгибных колебаний $n = 1$ усеченной конической оболочки в зависимости от числа членов в регулярном базисе m , полученные при $l = 20; 30$, $\delta = 2000$, $\alpha = 15^\circ$ и $m_p = 2$

| m | $l = 20$ | | | $l = 30$ | | |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_1 | ω_2 | ω_3 |
| 2 | 0.059030 | 0.111711 | 0.146790 | 0.038377 | 0.074419 | 0.103706 |
| 4 | 0.057773 | 0.105058 | 0.144611 | 0.037463 | 0.068582 | 0.099733 |
| 6 | 0.057679 | 0.104800 | 0.143988 | 0.037363 | 0.068313 | 0.098588 |
| 8 | 0.057672 | 0.104789 | 0.143981 | 0.037351 | 0.068287 | 0.098567 |
| 10 | 0.057671 | 0.104788 | 0.143978 | 0.037348 | 0.068282 | 0.098562 |
| 12 | 0.057671 | 0.104788 | 0.143978 | 0.037345 | 0.068279 | 0.098559 |
| 14 | 0.057671 | 0.104788 | 0.143978 | 0.037340 | 0.068274 | 0.098557 |
| 16 | 0.057671 | 0.104788 | 0.143978 | 0.037335 | 0.068269 | 0.098554 |

втором случае ($l = 30$) при $m = 16$ гарантируется лишь пять значащих цифр для первых трех частот колебаний. Чтобы получить аналогичный результат без учета погранслойных функций, в первом случае потребовалось удерживать пятьдесят членов в разложениях. Во втором - удается достичь точности не более трех значащих цифр при $m = 100$. Дальнейшее наращивание числа членов в разложениях Ритца ведет к потере устойчивости вычислительного процесса.

Таблица 4. Минимальные частоты усеченной конической оболочки для $l = 4$ и $\alpha = 30^\circ$ при различных ее относительных толщинах

| m | ω_{min} | | | |
|-----|----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|
| | $\delta = 100,$ $n = 7$ | $\delta = 400,$ $n = 11$ | $\delta = 1000,$ $n = 12$ | $\delta = 2000,$ $n = 15$ |
| 2 | 0.0494923 | 0.0285036 | 0.0183033 | 0.0137052 |
| 4 | 0.0481154 | 0.0260378 | 0.0161554 | 0.0115560 |
| 6 | 0.0481085 | 0.0259863 | 0.0161529 | 0.0115525 |
| 8 | 0.0481084 | 0.0259860 | 0.0161528 | 0.0115523 |
| 10 | 0.0481084 | 0.0259860 | 0.0161527 | 0.0115523 |
| 12 | 0.0481084 | 0.0259860 | 0.0161527 | 0.0115523 |

Дополнительные исследования показали, что само по себе увеличение угла α на процесс сходимости не влияет. Однако, ситуация

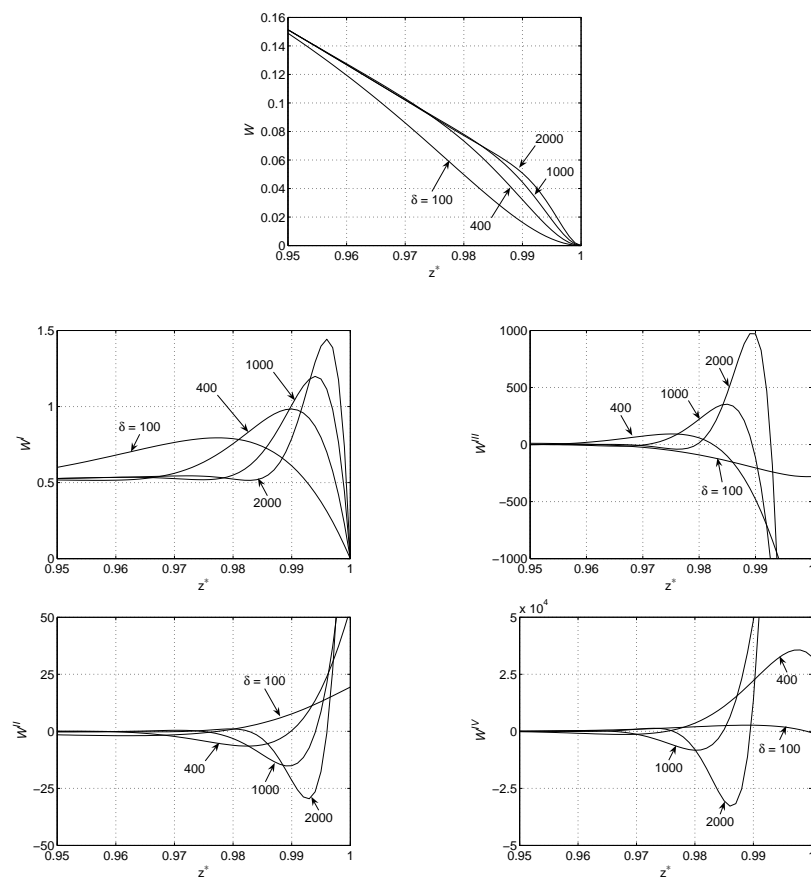


Рис 3. Поведение функции $w_1(z^*)$ и ее первых четырех производных в окрестности жестко закрепленного края усеченной конической оболочки при $\alpha = 30^\circ$.

усложняется тем, что при его увеличении и определенных геометрических соотношениях оболочки, может существенно сузиться диапазон применимости изложенного здесь подхода, поскольку перестают выполняться условия (10). В этом случае, использование предложенных погранслойных функций оказывается малоэффективным.

Как уже отмечалось выше, структура интегралов исходной системы уравнений справедлива для небольшого числа волн в окружном направлении оболочки. Однако в качестве эксперимента по изложенной методике, был произведен расчет минимальных частот усеченной конической оболочки для $l = 4$ и $\alpha = 30^\circ$ при различных ее относительных толщинах и соответствующих числах волн в окружном направлении. Результаты этих вычислений представлены в табл. 4 в зависимости от числа членов в регулярном базисе m при $m_p = 2$.

Данные табл. 4 показывают, что уже при $m = 6$ обеспечивается точность вычислений до пяти значащих цифр, как для средних, так и малых толщин оболочки. Аналогичный результат можно получить, используя только регулярный базис. При этом необходимо удерживать свыше пятидесяти членов в разложениях. Таким образом, и в данном случае, учет погранслойных функций дает определенные преимущества при определении частот с большим числом волн в окружном направлении.

На рис. 3 показано поведение функции $w_1(z^*)$ и ее первых четырех производных в окрестности жестко закрепленного края усеченной конической оболочки при угле полураствора конуса $\alpha = 30^\circ$. Приведенные рисунки иллюстрируют возникновение и развитие зоны больших изменений этих функций по мере изменения толщины оболочки от средних до малых значений. С уменьшением толщины оболочки изменчивость функции и ее производных увеличивается с одновременным уменьшением области этих изменений. При этом чем выше порядок производной, тем большие значения она принимает.

5. Заключение

Предложенные в работе системы координатных функций для решения вариационным методом спектральной краевой задачи о свободных колебаниях оболочки вращения обеспечивают при небольшом порядке алгебраических систем равномерную сходимость решений и их первых четырех производных во всех точках области интегрирования разрешающих уравнений. Разработанный алгоритм решения рассматриваемой задачи имеет одинаковую скорость сходимости как при средних, так и при малых значениях относительной толщины оболочки. В области тех значений параметра при старшей производной в уравнениях, когда возможно применение регулярного базиса на основе полиномов Лежандра, использование предложенных систем

координатных функций приводит к понижению в два-три раза порядка решаемых алгебраических систем.

- [1] Алумяэ Н.А. О фундаментальной системе интегралов уравнения малых осесимметричных установившихся колебаний упругой конической оболочки вращения // Изв АН Эст.ССР. Сер. техн. и физ.-мат. наук. — 1960. — **10**, № 1. — С. 3–15.
- [2] Асланян А.Г., Лидский В.Б. Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. — Москва: Наука, 1974. — 156 с.
- [3] Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва: Мир, 1968. — 464 с.
- [4] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. — 1957. — **12**, вып. 5, № 77. — С. 3–122.
- [5] Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. — Москва: Гостехиздат, 1949. — 784 с.
- [6] Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. — 1961. — **16**, вып. 3, № 99. — С. 171–174.
- [7] Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. — Москва: Наука, 1979. — 384 с.
- [8] Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. — Киев: Наукова думка, 1986. — 172 с.
- [9] Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. — Москва: Мир, 1983. — 200 с.
- [10] Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. — Москва: Машиностроение, 1975. — 374 с.
- [11] Коллатц Л. Задачи на собственные значения. — Москва: Наука, 1968. — 504 с.
- [12] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. — Москва: Наука, 1977. — 456 с.
- [13] Пшеничнов Г.И. Малые свободные колебания упругих оболочек вращения // Инженерный журнал. — 1965. — **5**, вып. 4. — С. 685–690.

-
- [14] *Пшеничнов Г.И.* Свободные осесимметричные колебания оболочки вращения // Инженерный журнал. Механика твердого тела. — 1967. — № 4. — С. 124–135.
- [15] *Товстик П.Е.* Низкочастотные колебания выпуклой оболочки вращения. // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1975. — № 6. — С. 110–116.
- [16] *Троценко В.А.* Применение вариационного метода для решения нелинейной сингулярно возмущенной краевой задачи статики высокоэластичных мембран // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 1996. — № 4. — С. 168–180.
- [17] *Троценко Ю.В.* Применение метода Ритца в задаче о собственных колебаниях усеченной конической оболочки // Зб. пр. Ін-ту математики НАН України «Динаміка та стійкість багатовимірних систем». — 2005. — **2**, № 1, С. 364–380.
- [18] *Trotsenko Yu.V.* Frequencies and modes of vibration of a cylindrical shell with attached rigid body // J. Sound and Vibr., 2006, **292**, P. 535–551.