Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 4, 355–375

УДК 539.3

Применение метода Ритца в сочетании с методом декомпозиции области для решения задачи о свободных колебаниях оболочек вращения

В.А Троценко, Ю.В. Троценко

Институт математики НАН Украины, Киев;
trots@imath.kiev.ua

A domain decomposition variational method for getting approximate solution of a spectral problem on free oscillations of a shell of revolution is developed. The method constructs and employs a new generalized functional for which the transmission conditions become natural ones. The Ritz method is used to compute the extrema points of the functional.

Розвинуто варіаційний метод побудови наближеного розв'язку спектральної задачі про вільні коливання оболонки обертання, поставленої з позицій задач спряження. Побудовано узагальнений функціонал, для якого до числа природних граничних умов входять і умови спряження розв'язків в підобластях. Для знаходження стаціонарних значень функціонала використовується метод Ритца.

1. Введение

В приложениях зачастую встречаются краевые задачи в разрывными коэффициентами, в также задачи с разрывными граничными условиями или правыми частями. К числу таких задач относятся задачи о деформировании составных упругих тел и оболочек, задачи гидроупругости о колебаниях жидкости в упругих сосудах, а также многие другие задачи механики сплошной среды. Приближенные решения таких задач в ряде случаев могут быть построены, если область

* Работа выполнена при частичной поддержке НИР № 0112U001015

определения искомых функций разбить на отдельные подобласти, вводя при этом на поверхностях раздела соответствующие условия сопряжения. Поэтому разработка методов решения краевых задач с использованием метода декомпозиции области является актуальной задачей, о чем свидетельствуют работы [1]– [7] и приведенные в них ссылки.

Построение приближенных решений в такой постановке имеет определенные трудности, которые связаны в первую очередь с выполнением граничных условий сопряжения на смежных границах введенных подобластей. Если подобласти имеют каноническую форму (их границы совпадают с координатными поверхностями одной из систем координат), то с помощью метода Фурье исходную задачу можно свести к решению бесконечных систем алгебраических уравнений [8]. При решении задач методом сопряжения решений может быть использован итерационный метод Шварца [9], который получил свое дальнейшее развитие во многих работах, например [10, 11]. Для областей с разрезами на основе метода декомпозиции области исходную задачу можно свести к решению интегрального уравнения первого рода, решение которого легко находится методом Бубнова – Галеркина [12]. При применении вариационных методов для построения приближенных решений задач с использованием метода декомпозиции области возникает проблема построения такого обобщенного функционала, для которого условия сопряжения решений в подобластях были бы естественными граничными условиями. Формулировке различных обобщенных функционалов, связанных с разработкой различных модификаций метода конечных элементов в литературе уделяется значительное внимание. Среди этих исследований можно выделить работы [13]– [19].

В данной работе развивается применение метода Ритца в сочетании с методом декомпозиции области для решения задач о свободных колебаниях оболочек вращения. Первоначально на основе принципа возможных перемещений и на использовании неопределенных множителей Лагранжа построен функционал, для которого граничные условия сопряжения решений являются естественными граничными условиями. Полученная вариационная задача усложняется тем, что при нахождении минимакса этого функционала необходимо находить как сами решения в подобластях, так и решения для множителей Лагранжа. Поэтому после установления явных выражений для множителей Лагранжа построен такой обобщенный функционал, который зависит только от самих решений во введенных подобластях. В результате после применения метода Ритца к полученному функционалу решение исходной задачи сведено к решению однородной алгебраической системы относительно коэффициентов для разложений искомых решений в подобластях по независимым системам базисных функций.

На примере, когда оболочка имеет цилиндрическую форму (рассматриваемая спектральная для этого случая имеет точное решение), показана эффективность предложенного подхода решения задачи на основе использования метода декомпозиции области.

2. Постановка задачи о свободных колебаниях оболочек вращения

У оболочек вращения линиями главных кривизн являются ее меридианы и параллели. За ортогональные координаты для произвольной точки на срединной поверхности оболочки выберем длину дуги меридиана s, отсчитываемую от некоторой начальной параллели ($s_1 \le s \le s_2$), и угол β, определяющий положение точки на соответствующем параллельном круге. Обозначим через R_1 — радиус кривизны меридиана, а через $r = r(s)$ расстояние от точки меридиана до оси вращения. Второй радиус кривизны R_2 равен длине отрезка нормали к поверхности от этой поверхности до оси оболочки. Проекции перемещения точек срединной поверхности оболочки на направления ее образующей, параллели и внешней нормали обозначим соответственно через u, v и w.

В дальнейшем будем пользоваться основными положениями технической теории тонких упругих оболочек [20], которая является наиболее простой и позволяет проводить расчеты с удовлетворительной точностью. При установившихся гармонических колебаниях оболочки с частотой ω в случае неосесимметричной формы деформации ее срединной поверхности перемещения u, v и w можно искать в следующем виде:

$$u(s,\beta,t) = u(s)\cos n\beta\, e^{i\omega t},\ \ v(s,\beta,t) = v(s)\sin n\beta\, e^{i\omega t},$$
$$w(s,\beta,t) = w(s)\cos n\beta\, e^{i\omega t},\ \ n = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где n — число волн упругой поверхности оболочки в окружном направлении, которое в дальнейшем будем рассматривать как параметр.

Введем в рассмотрение безразмерные величины (обозначение черточкой сверху), которые связаны с соответствующими размерными величинами следующим образом:

$$\{u,v,w\}=R\{\bar{u},\bar{v},\bar{w}\};\quad \lambda^2=\frac{(1-\nu^2)\rho R^2\omega^2}{E};\quad c^2=\frac{h^2}{12R^2};$$

$$\{T_i,S\}=\frac{Eh}{(1-\nu^2)}\{\bar{T}_i,\bar{S}\};\quad \{M_i,H\}=\frac{EhR}{(1-\nu^2)}\{\bar{M}_i,\bar{H}\},\quad i=1,2,\qquad (2)$$

где T_i и M_i — погонные поперечные силы и изгибающие моменты; S и H — сдвигающая сила и крутящий момент, отнесенные к единице длины нормального сечения срединной поверхности оболочки; E, ν, ρ и h — модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность материала и толщина оболочки; R — характерный линейный размер оболочки. В дальнейшем черточку над безразмерными величинами будем опускать.

Безразмерные усилия и моменты, действующие в срединной поверхности оболочки, связаны с ее деформациями по следующим формулам:

$$T_1=\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2;\ T_2=\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1;\ S=\frac{1-\nu}{2}\gamma_{12};$$

$$M_1=c^2(\varkappa_1+\nu\varkappa_2);\ M_2=c^2(\varkappa_2+\nu\varkappa_1);\ H=(1-\nu)c^2\tau.\qquad (3)$$

Формулы, выражающие зависимость деформаций срединной поверхности и параметров изменения ее кривизны от компонентов перемещения имеют следующий вид:

$$\varepsilon_1=\frac{du}{dS}+\frac{w}{R_1};\ \varepsilon_2=\frac{n}{r}v+\frac{r'}{r}u+\frac{w}{R_2};$$

$$\gamma_{12}=-\frac{n}{r}u+\frac{dv}{ds}-\frac{r'}{r}v;\ \varkappa_1=-\frac{d^2w}{ds^2};\ \varkappa_2=\frac{n^2}{r^2}w-\frac{r'}{r}\frac{dw}{ds};\qquad (4)$$

$$\tau=\frac{n}{r}\frac{dw}{ds}-\frac{r'n}{r^2}w.$$

После подстановки в уравнения равновесия элемента оболочки [20] сил и моментов, выраженных через перемещения, получим однородную систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно функций $u(s)$, $v(s)$ и $w(s)$:

$$F_1(\vec{u})=L_{11}(u)+L_{12}(v)+L_{13}(w)-\lambda^2u=0,$$

$$F_2(\vec{u}) = L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) - \lambda^2 v = 0,$$

$$F_3(\vec{u}) = L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) - \lambda^2 w = 0, \;\; \vec{u} = \{u, v, w\}. \qquad (5)$$

Дифференциальные выражения для L_{ij} $(i, j = 1-3)$ в общем случае имеют довольно громоздкий вид. Явные их выражения можно найти в работах [21, 22].

Решения системы уравнений (5), имеющей восьмой порядок, должны быть подчинены соответствующим однородным граничным условиям. Граничные условия накладываются либо на перемещения оболочки, либо на соответствующие им силы. Так для абсолютно жесткого закрепления края оболочки при $s = s_1$ эти условия имеют вид:

$$[\, u = v = w = \frac{dw}{ds} = 0\,]_{s=s_1}. \qquad (6)$$

При свободном перемещении края оболочки $(s = s_2)$ имеют место следующие силовые граничные условия:

$$[\, T_1 = S = \tilde{Q}_1 = M_1 = 0\,]_{s=s_2}. \qquad (7)$$

Здесь $\tilde{Q}_1$ — обобщенная поперечная сила, которая в безразмерных величинах выражается через нормальное перемещение точек оболочки по формулам:

$$\tilde{Q}_1 = -c^2 \left[\frac{d}{ds} \triangle w - \frac{(1-\nu)n^2}{r^2} \left(\frac{dw}{ds} - \frac{r'}{r} w \right) \right],$$

$$\triangle w = \frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left(r \frac{dw}{ds} \right) - \frac{n^2}{r^2} w. \qquad (8)$$

Следует отметить, что формулы (8) справедливы для оболочек вращения с постоянной толщиной стенки h.

В других случаях крепления края оболочки используется комбинациями условий (6) и (7). Из формул (7) и (8) следует, что в рамках технической теории оболочек нельзя накладывать граничные условия на поперечную силу Q_1, а необходимо вводить в рассмотрение обобщенную поперечную силу $\tilde{Q}_1$.

Эквивалентную вариационную формулировку исходной спектральной задачи можно получить из принципа возможные перемещений, согласно которому

$$\delta \Pi = \delta A. \qquad (9)$$

Здесь $\delta\Pi$ — вариация потенциальной энергии деформации оболочки, δA — работа внешних сил, приложенных к оболочке на ее возможных перемещениях, которые могут быть представлены в виде [21]:

$$\delta\Pi = \int_{s_1}^{s_2} (T_1\delta\varepsilon_1 + T_2\delta\varepsilon_2 + S\delta\gamma_{12} + M_1\delta\varkappa_1 + M_2\delta\varkappa_2 + 2H\delta\tau) r ds,$$

$$\delta A = \int_{s_1}^{s_2} \vec{Q}\cdot\delta\vec{u} r ds. \qquad (10)$$

В соответствии с принципом Д'Аламбера заменим действующую на оболочку нагрузку $\vec{Q}$ соответствующими силами инерции. Тогда δA будет иметь вид

$$\delta A = \lambda^2 \int_{s_1}^{s_2} (u\delta u + v\delta v + w\delta w) r ds.$$

Таким образом исходная спектральная задача сведена к отысканию стационарных значений для функционала I:

$$I(\vec{u}) = \int_{s_1}^{s_2} \Phi(\vec{u}) r ds. \qquad (11)$$

Выражение для функции $\Phi(\vec{u})$ здесь не приводится, ввиду его громоздкости. С помощью обычных средств вариационного исчисления можно показать, что уравнениями Эйлера и естественными граничными условиями для функционала (11) являются соответственно уравнения (5) и граничные условия (7). Поэтому вариационные методы позволяют исключить из рассмотрения естественные граничные условия, что в значительной степени облегчает известные трудности построения систем базисных функций в методе Ритца.

В дальнейшем для определенности будем считать, что при $s = s_1$ торец оболочки жестко закреплен, а при $s = s_2$ — свободен.

3. Построение обобщенного функционала для решения задачи с использованием метода декомпозиции области

Во многих задачах для механических систем, в состав которых входят тонкостенные оболочки, возникает необходимость разбиения области интегрирования исходных уравнений на отдельные подобласти. В связи с этим необходимо развивать методы решения граничных задач с позиций метода сопряжения решений.

Рассмотрим метод декомпозиции области при вариационной формулировке исходной задачи. Разобъем область $G = [s_1, s_2]$ точкой $s = \zeta$ на две подобласти $G^{(1)} = [s_1, \zeta]$ и $G^{(2)} = [\zeta, s_2]$. Обозначим решения исходной задачи в подобластях $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ соответственно через $\vec{u}^{(1)}$ и $\vec{u}^{(2)}$. В дальнейшем верхний индекс во всех встречающихся функциях будет обозначать область, в которой эти функции определены. В соответствии с принятым закреплением торцов оболочки, для функции $\vec{u}^{(1)}$ при $s = s_1$ должны выполняться граничные условия (6), тогда как для функции $\vec{u}^{(2)}$ при $s = s_2$ — условия (7).

Установим граничные условия сопряжения решений для областей $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ в точке $s = \zeta$. Представим функционал (11) в следующем виде:

$$I = \int\limits_{G^{(1)}} \Phi(\vec{u}^{(1)}) dG^{(1)} + \int\limits_{G^{(2)}} \Phi(\vec{u}^{(2)}) dG^{(2)}. \tag{12}$$

Вычислим первую вариацию от функционала (12), не накладывая никаких ограничений на варьируемые функции, кроме условий (6). В дальнейшем будем предполагать, что в каждой из введенных подобластей поле перемещений, усилий и моментов обладает свойством непрерывности и дифференцируемости. С учетом интегрирования по частям и принятых обозначений вариацию от функционала (12) можно представить в виде:

$$\begin{gathered}
\delta I = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{G^{(k)}} \left[F_1(\vec{u}^{(k)})\delta u^{(k)} + F_2(\vec{u}^{(k)})\delta v^{(k)} + F_3(\vec{u}^{(k)})\delta w^{(k)}\right] dG^{(k)} + \\
+ \left(T_1^{(1)} \delta u^{(1)} + S^{(1)} \delta v^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(1)} \delta w^{(1)} - M_1^{(1)} \frac{d\delta w^{(1)}}{ds}\right)_{s=\zeta} - \\
- \left(T_1^{(2)} \delta u^{(2)} + S^{(2)} \delta v^{(2)} + \tilde{Q}_1^{(2)} \delta w^{(2)} - M_1^{(2)} \frac{d\delta w^{(2)}}{ds}\right)_{s=\zeta} +
\end{gathered} \tag{13}$$

$$+\left(T_1^{(2)}\delta u^{(2)} + S^{(2)}\delta v^{(2)} + \tilde{Q}_1^{(2)}\delta w^{(2)} - M_1^{(2)}\frac{d\delta w^{(2)}}{ds}\right)_{s=s^{(2)}}.$$

Приравнивая выражение (13) к нулю, получим вариационное уравнение для определения функций $\vec{u}^{(k)}(s)$. Из этого уравнения в силу произвольности варьирования функций $\vec{u}^{(k)}$ в областях $G^{(k)}$ и на границе при $s = \zeta$ следует, что в пределах каждой из введенных подобластей должны выполняться исходные уравнения и граничные условия свободного опирания края оболочки при $s = s_2$.

Далее, если предположить, что класс допустимых функций при $s = \zeta$ подчинен условиям:

$$u^{(1)} = u^{(2)};\ v^{(1)} = v^{(2)};\ w^{(1)} = w^{(2)};\ \frac{dw^{(1)}}{ds} = \frac{\partial w^{(2)}}{\partial s}, \qquad (14)$$

то из (13) вытекают еще и силовые граничные условия при $s = \zeta$:

$$T_1^{(1)} = T_1^{(2)};\ S^{(1)} = S^{(2)};\ M_1^{(1)} = M_1^{(2)};\ \tilde{Q}_1^{(1)} = \tilde{Q}_1^{(2)}. \qquad (15)$$

При этом следует заметить, что условия (15) являются естественными граничными условиями для функционала (12).

Таким образом, особенность условий сопряжения решений в теории оболочек состоит в том, что в них нужно требовать непрерывность не только перемещений u, v, w, но и первой производной от w, не только усилий T_1, S и моментов M_1, но и поперечных обобщенных перерезывающих сил $\tilde{Q}_1$.

Итак, при использовании метода Ритца для решения вариационного уравнения $\delta I = 0$ аппроксимации для функций $u^{(k)}$, $v^{(k)}$, $w^{(k)}$ должны выбираться таким образом, чтобы они обеспечивали выполнение условий (14). В этом случае остальные граничные условия задачи, кроме условий (6), будут естественными граничными условиями для функционала (12). Построение решений, заведомо удовлетворяющих условиям (14), представляют собою в общем случае достаточно трудную самостоятельную задачу. В связи с этим возникает вопрос о преобразовании функционала (12) в такой обобщенный функционал, для которого условия сопряжения между подобластями были бы естественными условиями. Теория преобразования вариационных задач создана уже давно [23], но в литературе известны лишь немногие примеры применения ее к задачам механики сплошной среды.

Граничные условия (14) при $s = \zeta$ можно рассматривать как дополнительные ограничения на задачу нахождения стационарного значения функционала $I(\vec{u})$. Исключить их из рассмотрения можно с помощью множителей Лагранжа. В соответствии с этим введем в рассмотрение новый функционал $\Pi_1(\vec{u},\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\alpha_3,\,\alpha_4)$, который имеет вид

$$\Pi_1(\vec{u},\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\alpha_3,\,\alpha_4) = I(\vec{u}) + \Big[\alpha_1(u^{(1)}-u^{(2)}) + \alpha_2(v^{(1)}-v^{(2)}) + \\ + \alpha_3(w^{(1)}-w^{(2)}) + \alpha_4\left(\frac{dw^{(1)}}{ds} - \frac{\partial w^{(2)}}{\partial s}\right)\Big]_{s=\zeta}, \qquad (16)$$

где α_i — множители Лагранжа, подлежащие определению в дальнейшем.

Преобразование функционала (12) в расширенный функционал (16) достигнуто ценою увеличения количества неизвестных исходной задачи, т.е. нужно искать стационарные значения функционала (16) не только по u, v, w, но и по α_1, α_2, α_3, α_4 на классе функций, удовлетворяющих лишь главным граничным условиям (6). Эту задачу можно существенно упростить, если предварительно найти явные выражения для множителей Лагранжа через сами решения $\vec{u}$. С этой целью вычислим первую вариацию функционала (16) при свободном варьировании функций $\vec{u}^{(i)}$ $(i=1,2)$ и постоянных α_i $(i=\overline{1,4})$. Из этой вариации выпишем только внеинтегральные члены при $s=\zeta$. При этом будем иметь

$$\Big[\delta\alpha_1(u^{(1)}-u^{(2)}) + \delta\alpha_2(v^{(1)}-v^{(2)}) + \delta\alpha_3(w^{(1)}-w^{(2)}) + \\ + \delta\alpha_4\left(\frac{dw^{(1)}}{ds} - \frac{dw^{(2)}}{ds}\right) + (T_1^{(1)}+\alpha^{(1)})\delta u^{(1)} - \\ - (T_1^{(2)}+\alpha_1)\delta u^{(2)} + (S^{(1)}+\alpha_2)\delta v^{(1)} - (S^{(2)}+\alpha_2)\delta v^{(2)} + \qquad (17) \\ + (\tilde{Q}_1^{(1)}+\alpha_3)\delta w^{(1)} - (\tilde{Q}_1^{(2)}+\alpha_3)\delta w^{(2)} + (\alpha_4 - M_1^{(1)})\frac{d\delta w^{(1)}}{ds} + \\ + (M_1^{(2)}-\alpha_4)\frac{d\delta w^{(2)}}{ds}\Big]_{s=\zeta}.$$

Если функционал (16) принимает стационарное значение для произвольных вариаций $\delta\vec{u}^{(i)}$, $\dfrac{d\delta w^{(i)}}{ds}$ $(i=1,2)$ и $\delta\alpha_i$ $(i=\overline{1,4})$, то из выражения (17) следует, что в точке $s=\zeta$ будут выполняться кинематические условия сопряжения (14), а также соотношения

$$\alpha_1 = -T_1^{(1)};\ \ \alpha_1 = -T_1^{(2)};\ \ \alpha_2 = -S^{(1)};\ \ \alpha_2 = -S^{(2)};$$

$$\alpha_3 = -\tilde{Q}_1^{(1)};\ \ \alpha_3 = -\tilde{Q}_1^{(2)};\ \ \alpha_4 = M_1^{(1)};\ \ \alpha_4 = M_1^{(2)}.$$

Отсюда следуют равенства правых частей в приведенных формулах, что свидетельствует о выполнении силовых условий сопряжения (15). Кроме этого, из этих формул можно найти выражения для множителей Лагранжа:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}(T_1^{(1)} + T_1^{(2)})|_{s=\zeta};\ \ \alpha_2 = -\frac{1}{2}(S^{(1)} + S^{(2)})|_{s=\zeta};$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{2}(\tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)})|_{s=\zeta};\ \ \alpha_4 = \frac{1}{2}(M_1^{(1)} + M_1^{(2)})|_{s=\zeta}. \tag{18}$$

Исключая α_i $(i = 1-4)$ из функционала (16) с помощью установленных для них формул (18), можно получить обобщенный функционал Π_2, зависящий только от $\vec{u}$. Краевые условия (7), (14) и (15) будут автоматически выполняться для функций, доставляющих функционалу $\Pi_2(\vec{u})$ стационарное значение.

Это является весьма важным моментом в применении вариационного метода к решению спектральной задачи о свободных колебаниях оболочек вращения, поставленной с позиций задач сопряжения решений.

Полученные результаты позволяют перейти теперь к построению приближенного решения рассматриваемой задачи на основе метода Ритца.

4. Формирование алгебраических уравнений на основе обобщенного функционала

Представим функции $u^{(k)}(s)$, $v^{(k)}(s)$ и $w^{(k)}(s)$ $(k = 1, 2)$ в виде следующих отрезков обобщенных рядов:

$$u^{(k)}(s) = \sum_{j=1}^{N} a_j^{(k)} U_j^{(k)}(s);\ \ \ v^{(k)}(s) = \sum_{j=1}^{N} b_j^{(k)} V_j^{(k)}(s); \tag{19}$$

$$w^{(k)}(s) = \sum_{j=1}^{N} c_j^{(k)} W_j^{(k)}(s).$$

Здесь $a_j^{(k)}$, $b_j^{(k)}$, $c_j^{(k)}$ $(k = 1, 2)$ — произвольные постоянные, подлежащие определению в дальнейшем; $\{U_j^{(k)}(s)\}$, $\{V_j^{(k)}(s)\}$, $\{W_j^{(k)}(s)\}$

— системы координатных функций, которые определены соответственно в подобластях $G^{(k)}$.

Координаты функции выберем в виде:

$$U_j^{(1)} = V_j^{(1)} = (s - s_1)P_j(x);\ \ W_j^{(1)} = (s - s_1)^2 P_j(x);\ \ x = \frac{2(s-\zeta)}{(\zeta - s_1)} + 1;$$
$$U_j^{(2)} = V_j^{(2)} = W_j^{(2)} = P_j(y);\ \ y = \frac{2s}{s_2 - \zeta} - \frac{s_2 + \zeta}{s_2 - \zeta}, \tag{20}$$

где $P_j(z)$ — смещение на единицу по индексу j многочлены Лежандра с аргументами, которые преобразуют интервалы $[s_1, \zeta]$ и $[\zeta, s_2]$ на интервал $[-1, 1]$.

Вычисление многочленов Лежандра и их первых двух производных можно проводить с помощью рекуррентных соотношений:

$$P_{j+2}(z) = \frac{1}{j+1}[(2j+1)zP_{j+1} - jP_j],$$
$$P'_{j+2}(z) = zP'_{j+1} + (j+1)P_{j+1},\ \ P''_{j+2}(z) = zP''_{j+1} + (j+2)P'_{j+1}, \tag{21}$$
$$P_1(z) = 1;\ \ P_2(z) = z,\ \ (j = \overline{1, N-2}).$$

Введенные системы базисных функций являются линейно независимыми и полными системами функций в соответствующих подобластях. Такие координатные функции, в отличие от степенного базиса, обеспечивают высокую устойчивость вычислительного процесса при большом числе членов N в разложениях (12). Системы координатных функций с верхним индексом равным единице подчинены граничным условиям (6).

Подставим разложения (19) в функционал $\Pi_2(\vec{u})$. Из необходимых условий стационарности обобщенного функционала получим однородную систему алгебраических уравнений

$$(A - \lambda^2 B)\vec{X} = 0, \tag{22}$$

где вектор-столбец $\vec{X}$ имеет координаты $\vec{X} = \{a_1^{(1)}, \dots, a_N^{(1)},\ b_1^{(1)}, \dots, b_N^{(1)},\ c_1^{(1)}, \dots, c_n^{(1)},\ a_1^{(2)}, .., a_N^{(2)},\ b_1^{(2)}, \dots, b_N^{(2)}, c_1^{(1)}, \dots, c_N^{(2)}\}$.

Представим матрицу A в виде суммы двух матриц

$$A = A^{(1)} + A^{(2)}, \tag{23}$$

где элементы матрицы $A^{(1)}$ образованы из необходимых условий экстремума функционала $I(\vec{u})$ (12), а элементы матрицы $A^{(2)}$ обусловлены наличием в обобщенном функционале добавки с установленными множителями Лагранжа.

Определение коэффициентов матрицы $A^{(1)}$ с использованием выражения (10) для вариации потенциальной энергии деформации оболочки приводит к достаточно громоздким вычислениям и формулам для элементов $\alpha_{ij}^{(1)}$ матрицы $A^{(1)}$. Эту задачу можно существенно упростить, если представить вариацию функционала $I(\vec{u})$ в следующем виде:

$$\delta I = \int\limits_{s_1}^{s_2} [\Psi_{11}(u, \delta u) + \Psi_{12}(v, \delta u) + \Psi_{13}(w, \delta u) + \Psi_{12}(\delta v, u) + \Psi_{22}(v, \delta v) +$$
$$+\Psi_{23}(w, \delta v) + \Psi_{13}(\delta w, u) + \Psi_{23}(\delta w, v) + \Psi_{33}(w, \delta w)] r ds - \qquad (24)$$
$$-\lambda^2 \int\limits_{s_1}^{s_2} (u\delta u + v\delta v + w\delta w) r ds.$$

Введенные здесь операторы $\Psi_{ij}(p, q)$ определяются по формулам

$$\Psi_{11}(p,q) = \left(\frac{dp}{ds} + \frac{\nu r'}{r} p\right)\frac{dq}{ds} + \left[\nu \frac{r'}{r}\frac{dp}{ds} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 p + \frac{n^2\nu_1}{r^2} p\right] q,$$

$$\Psi_{12}(p,q) = \frac{nr'}{r^2}(1+\nu_1)pq + \frac{\nu n}{r} p \frac{dq}{ds} - \frac{\nu_1 n}{r}\frac{dp}{ds} q,$$

$$\Psi_{13}(p,q) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right) p \frac{dq}{ds} + \frac{r'}{r}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{\nu}{R_1}\right) pq,$$

$$\Psi_{22}(p,q) = \left[\frac{n^2}{r^2} + \nu_1\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right] pq + \nu_1\left(\frac{dp}{ds} - \frac{r'}{r} p\right)\frac{dq}{ds} - \nu_1 \frac{r'}{r}\frac{dp}{ds} q,$$

$$\Psi_{23}(p,q) = \frac{n}{r}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{\nu}{R_1}\right) pq, \Psi_{33}(p,q) = \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2}\right) pq +$$
$$+c^2\left\{\frac{n^4 + 4\nu_1 n^2 (r')^2}{r^4} pq + \frac{d^2p}{ds^2}\frac{d^2q}{ds^2} + \left[\frac{\nu r'}{r}\frac{d^2p}{ds^2} + \frac{(r')^2 + 4\nu_1 n^2}{r^2}\frac{dp}{ds} - \right.\right.$$

$$- \frac{n^2 r'}{r^3}(1+4\nu_1)p\right] \frac{dq}{ds} - \left[\frac{\nu n^2}{r^2}\frac{d^2p}{ds^2} + \frac{n^2 r'}{r^3}(1+4\nu_1)\frac{dp}{ds}\right] q +$$

$$+ \left[\frac{\nu r'}{r}\frac{dp}{ds} - \frac{\nu n^2}{r^2}p\right]\frac{d^2q}{ds^2}\right\},$$

где $\nu_1 = \dfrac{1-\nu}{2}$; p и q — произвольные, достаточное число раз дифференцируемые, произвольные функции.

Используя выражения (24), для элементов матрицы $A^{(1)}$ можно получить компактные и удобные для программирования формулы. Так, вычисляя, например, частную производную $\dfrac{\partial I}{\partial a_i^{(1)}}$, положим в (24) $\delta u = U_i^{(1)},\ \delta v = 0,\ \delta w = 0$. При этом получим первые N уравнений относительно вектора $\vec{X}$. Аналогично действуем и при вычислении частных производных от функционала I по другим переменным. Ненулевые элементы верхней части относительно главной диагонали симметричной матрицы $A^{(1)}$ будут иметь вид:

$$\alpha_{ij}^{(1)} = \int\limits_{s_1}^{\zeta} \Psi_{11}(U_j^{(1)}, U_i^{(1)}) r ds, \quad \alpha_{i+N,j+N}^{(1)} = \int\limits_{s_1}^{\zeta} \Psi_{22}(V_j^{(1)}, V_i^{(1)}) r ds,$$

$$\alpha_{i+2N,j+2N}^{(1)} = \int\limits_{s_1}^{\zeta} \Psi_{33}(W_j^{(1)}, W_i^{(1)}) r ds, \quad (i = \overline{1,N},\ j = i);$$

$$\alpha_{i,j+N}^{(1)} = \int\limits_{s_1}^{\zeta} \Psi_{12}(V_j^{(1)}, U_i^{(1)}) r ds, \quad \alpha_{i,j+2N}^{(1)} = \int\limits_{s_1}^{\zeta} \Psi_{13}(W_j^{(1)}, U_i^{(1)}) r ds, \tag{25}$$

$$\alpha_{i+N,j+2N}^{(1)} = \int\limits_{s_1}^{\zeta} \Psi_{23}(W_j^{(1)}, V_i^{(1)}) r ds, \quad (i,j = \overline{1,N}).$$

Формулы для коэффициентов $\alpha_{i+3N,j+3N}^{(1)}$, $\alpha_{i+3N,j+4N}^{(1)}$, $\alpha_{i+3N,j+5N}^{(1)}$, $\alpha_{i+4N,j+4N}^{(1)}$, $\alpha_{i+4N,j+5N}^{(1)}$, $\alpha_{i+5N,j+5N}^{(1)}$ можно получить из формул (25) после соответствующей замены в них функций $U_k^{(1)}$, $V_k^{(1)}$, $W_k^{(1)}$ на функции $U_k^{(2)}$, $V_k^{(2)}$, $W_k^{(2)}$ и замены пределов интегрирования от ζ до s_2. Остальные коэффициенты равны нулю.

Элементы $\alpha_{ij}^{(2)}$ верхней части относительно главной диагонали симметричной матрицы $A^{(2)}$ можно представить в следующем виде:

$$\alpha_{ij}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left[T(U_i^{(1)},0,0)U_j^{(1)} + T(U_j^{(1)},0,0)U_i^{(1)}\right]_{s=\zeta},$$

$$\alpha_{i+N,j+N}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left[S(0,V_i^{(1)})V_j^{(1)} + S(0,V_j^{(1)})V_i^{(1)}\right]_{s=\zeta}, \ \ \alpha_{i+N,j+2N}^{(2)} = 0;$$

$$\alpha_{i+2N,j+2N}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left[Q(W_i^{(1)})W_j^{(1)} + Q(W_j^{(1)})W_i^{(1)} - M(W_i^{(1)})\frac{dW_j^{(1)}}{ds} - \right.$$

$$\left. - M(W_j^{(1)})\frac{dW_i^{(1)}}{ds}\right]_{s=\zeta}, \quad (i=1,2,\,\ldots,N,\ j=I);$$

$$\alpha_{i,j+N}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left[T(0,V_j^{(1)},0)U_i^{(1)} + S(U_i^{(1)},0)V_j^{(1)}\right]_{s=\zeta},$$

$$\alpha_{i,j+2N}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left[T(0,0,W_j^{(1)})U_i^{(1)}\right]_{s=\zeta},$$

$$\alpha_{i,j+3N}^{(2)} = \frac{1}{2}\left[T(U_i^{(1)},0,0)U_j^{(2)} - T(U_j^{(2)},0,0)U_i^{(1)}\right]_{s=\zeta},$$

$$\alpha_{i,j+4N}^{(2)} = \frac{1}{2}\left[S(U_i^{(1)},0)V_j^{(2)} - T(0,V_j^{(2)},0)U_i^{(1)}\right]_{s=\zeta},$$

$$\alpha_{i,j+5N}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left[T(0,0,W_j^{(2)})U_i^{(1)}\right]_{s=\zeta}, \tag{26}$$

$$\alpha_{i+N,j+3N}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left[S(U_j^{(2)},0)V_i^{(1)} - T(0,V_i^{(1)},0)U_j^{(2)}\right]_{s=\zeta},$$

$$\alpha_{i+N,j+4N}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left[S(0,V_j^{(2)})V_i^{(1)} - S(0,V_i^{(1)})V_j^{(2)}\right]_{s=\zeta}, \ \ \alpha_{i+N,j+5N} = 0,$$

$$\alpha_{i+2N,j+3N}^{(2)} = \frac{1}{2}\left[T(0,0,W_i^{(1)})U_j^{(2)}\right]_{s=\zeta}, \ \ \alpha_{i+2N,j+4N} = 0,$$

$$\alpha_{i+2N,j+5N}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left[Q(W_j^{(2)})W_i^{(1)} - Q(W_i^{(1)})W_j^{(2)} + M(W_i^{(1)})\frac{dW_j^{(2)}}{ds} - \right.$$

$$- M(W_j^{(2)})\frac{dW_i^{(1)}}{ds}\Bigg]_{s=\zeta}, \quad (i,j=\overline{1,N}).$$

Остальные коэффициенты матрицы $A^{(2)}$ вычисляются по формулам

$$\begin{gathered}
\alpha^{(2)}_{i+3N,j+3N} = -\alpha^{(2)}_{ij},\ \ \alpha^{(2)}_{i+4N,j+4N} = -\alpha^{(2)}_{i+N,j+N},\\
\alpha_{i+5N,j+5N} = -\alpha_{i+2N,j+2N},\ (i=\overline{1,N},\ j=I);\\
\alpha^{(2)}_{i+3N,j+4N} = -\alpha_{i,j+N},\ \ \alpha^{(2)}_{i+3N,j+5N} = -\alpha_{i,j+2N},\\
\alpha_{i+4N,j+5N} = 0,\ (i,j=\overline{1,N}),
\end{gathered}\tag{27}$$

где в правых частях выражений (27) верхние индексы при функциях следует заменить на 2.

Введенные в выражениях (26) и (27) функции T, S, M и Q имеют вид

$$\begin{gathered}
T(p,q,t) = \frac{dp}{ds} + \nu\frac{r'}{r}p + \nu\frac{n}{r}q + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)t,\ \ Q(t) = \tilde{Q}_1(t),\\
S(p,q) = -\frac{\nu_1 n}{r}p + \nu_1\left(\frac{dq}{ds} - \frac{r'}{r}q\right),\ \ \nu_1 = \frac{1-\nu}{2},\\
M(t) = c^2\left[-\frac{d^2t}{ds^2} + \nu\left(\frac{n^2}{r^2}t - \frac{r'}{r}\frac{dt}{ds}\right)\right],
\end{gathered}\tag{28}$$

при этом, если в функциях T и S один из аргументов полагается равным нулю, то подразумевается, что и соответствующие производные тождественно равны нулю.

Элементы b_{ij} симметричной матрицы B вычисляются по следующим формулам:

$$b_{ij} = \int\limits_{s_1}^{\zeta} U_j^{(1)}U_i^{(1)}rds;\ \ b_{i+N,j+N} = \int\limits_{s_1}^{\zeta} V_j^{(1)}V_i^{(1)}rds;$$

$$b_{i+2N,j+2N} = \int\limits_{s_1}^{\zeta} W_i^{(1)}W_j^{(1)}rds;\ \ b_{i+3N,j+3N} = \int\limits_{\zeta}^{s_2} U_j^{(2)}U_i^{(2)}rds;$$

$$b_{i+4N,j+4N} = \int\limits_{\zeta}^{s_2} V_j^{(2)} V_i^{(2)} r ds; \quad b_{i+5N,j+5N} = \int\limits_{\zeta}^{s_2} W_j^{(2)} W_i^{(2)} r ds,$$

$$(i, j = \overline{1, N}).$$

Остальные коэффициенты матрицы B равны нулю.

Таким образом, задача о нахождении частот и форм собственных колебаний рассматриваемой оболочки с использованием метода сопряжения решений сведена к решению обобщенной алгебраической задачи на собственные значения (22). Подинтегральные функции в формулах (24) представляют собой многочлены определенного порядка. Поэтому для вычисления элементов $\alpha_{i,j}^{(1)}$ матрицы $A^{(1)}$ целесообразно использовать метод численного интегрирования Гаусса.

5. Некоторые результаты расчетов

Приведем результаты расчетов собственных колебаний конкретной оболочки вращения по предложенному выше алгоритму. В литературе известны точные решения рассматриваемой спектральной задачи для оболочек в форме кругового цилиндра [24,25]. Численные результаты этих работ могут служить эталоном оценки точности различных приближенных методов решения данной задачи. В связи с этим рассмотрим тонкостенную оболочку вращения в форме кругового цилиндра единичного радиуса и длиной l. Как и ранее будем считать, что при $s_1 = 0$ торец оболочки жестко защемлен, а при $s_2 = l$ — свободен. Во всех расчетах в дальнейшем полагается коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; длина оболочки $l = 4$ и точка разбиения области $G[s_1, s_2]$ $\zeta = l/2$.

В таблице 1 приведена сходимость первых четырех собственных значений λ_i при числе волн в окружном направлении $n = 1$ в зависимости от числа приближений N в разложениях (19). В последней строке таблицы, обозначенной звездочкой, приведены расчетные величины, полученные на основе точного решения рассматриваемой задачи [24].

Значения нормального прогиба для первой формы колебаний оболочки и его первых трех производных $(w(\pm), w^{'}(\pm), w^{''}(\pm), w^{'''}(\pm))$ при различном количестве членов в разложениях (19) приведены в таблице 2. Здесь $w(+) = w^{(2)}(\zeta)$ (верхние строчки), $w(-) = w^{(1)}(\zeta)$

Таблица 1. Сходимость первых четырех собственных значений λ_i $(n = 1)$ в зависимости от числа приближений N в методе Ритца

N	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
4	.10859	.35024	.63185	.73055
6	.10809	.34972	.62820	.72974
8	.10795	.34965	.62802	.72971
10	.10790	.34964	.62798	.72971
12	.10789	.34964	.62798	.72970
14	.10789	.34964	.62798	.72970
$(*)$	.10789	.34964	.62798	.72970

Таблица 2. Значения нормального прогиба $w(\pm)$ для первой формы колебаний оболочки и его первых трех производных при различном числе приближений N

N	$w(\pm)$	$w^{'}(\pm)$	$w^{''}(\pm)$	$w^{'''}(\pm)$
10	.47179	.28728	-1.0113	18.080
	.46409	.25086	.95644	20.146
14	.46880	.27533	.06156	-2.1897
	.46885	.27441	-.01540	2.0808
18	.46882	.27503	.02374	-.16744
	.46882	.27502	.02139	.05579
22	.46882	.27502	.02245	-.03317
	.46882	.27502	.02268	-.07860
26	.46882	.27502	.02256	-.05672
	.46882	.27502	.02256	-.05506
30	.46882	.27502	.02256	-.05587
	.46882	.27502	.02256	-.05590
$(*)$	.46882	.27502	.02256	-.05589

(нижние строчки). Аналогичные обозначения имеют место и для производных. Звездочкой, как и ранее, обозначены точные значения рассчитываемых величин [24]. Отметим, что вектор $\vec{X}$ алгебраической системы (22) нормировался таким образом, чтобы $w(l) = 1$.

Данные таблиц 1 и 2 свидетельствуют о том, что приближения Ритца в предложенном алгоритме сходятся достаточно быстро и имеют предельные значения, которые совпадают с точным решением задачи.

Проведенные вычисления показывают, что данный метод решения исходной задачи обеспечивает поточечную сходимость для решений и их первых трех производных для прогибов оболочки как внутри областей $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$, так и на их границах. Это позволяет рассчитывать моменты и перерезывающие силы в любом сечении оболочки, значение которых необходимо при анализе динамической прочности оболочки.

Результаты таблицы 2 также свидетельствуют о точности выполнения кинематических и силовых условий сопряжения при использовании обобщенного функционала для решения данной задачи. Следует также отметить, что разрешающая система уравнений (22) хорошо обусловлена, коэффициенты которой достаточно просто формируются при их программировании на ПК.

В таблице 3 приведены некоторые результаты расчетов минимальных частот $\lambda \cdot 10^3$ для цилиндрической оболочки в широком диапазоне входных параметров $l = 2 \div 16$; $\delta = 1/h = 200 \div 1000$. В скобках указаны соответствующие этим частотам числа волн n упругой поверхности оболочки в окружном направлении.

Таблица 3. Минимальные частоты $\lambda_{1(n)}$ для цилиндрической оболочки

$l\backslash\delta$	200	400	600	800	1000
2	$47.74_{(5)}$	$34.16_{(6)}$	$28.10_{(6)}$	$24.18_{(7)}$	$21.72_{(7)}$
4	$24.63_{(3)}$	$16.80_{(4)}$	$14.37_{(5)}$	$12.04_{(5)}$	$10.79_{(5)}$
6	$15.72_{(3)}$	$11.46_{(3)}$	$9.354_{(4)}$	$7.931_{(4)}$	$7.177_{(4)}$
8	$12.57_{(2)}$	$8.256_{(3)}$	$6.848_{(3)}$	$6.281_{(3)}$	$5.491_{(4)}$
10	$9.027_{(2)}$	$7.106_{(3)}$	$5.413_{(3)}$	$4.687_{(3)}$	$4.295_{(3)}$
12	$7.308_{(2)}$	$6.635_{(3)}$	$4.784_{(3)}$	$3.935_{(3)}$	$3.472_{(3)}$
14	$6.418_{(2)}$	$4.593_{(2)}$	$4.168_{(2)}$	$3.568_{(3)}$	$3.052_{(3)}$
16	$5.935_{(2)}$	$3.894_{(2)}$	$3.383_{(2)}$	$3.185_{(2)}$	$2.824_{(3)}$

Из таблицы видно, что увеличение длины оболочки сопровождается снижением минимальных ее частот с одновременным уменьшением числа волн в окружном направлении. Уменьшение толщины оболочки приводит к уменьшению минимальных частот, но при росте значения n.

Сравнение данных этой таблицы с пересекающимися данными работы [24] указывает на полное их совпадение.

Следует заметить, что разработанный в работе алгоритм расчета собственных колебаний оболочек вращения на основе метода декомпозиции области с использованием вариационной формулировки задачи может быть обобщен и на случай уравнений общей теории оболочек.

6. Заключение

В работе с позиций метода декомпозиции области развивается приближенный метод расчета собственных колебаний оболочек вращения. При таком подходе основную трудность построения решений представляет выполнение соответствующих условий сопряжения. В связи с этим в работе построен обобщенный функционал Лагранжа, зависящий только от самих решений, для которого условия сопряжения относятся к числу его естественных граничных условий. Это позволяет независимо выбирать системы базисных функций для аппроксимации решений в подобластях.

Путем сравнения полученных расчетных данных с существующими точными решениями исходной задачи показана эффективность предложенного подхода решения спектральной задачи. Примечательным является установленный факт, что а рамках этого подхода последовательные приближения Ритца имеют сходимость в равномерной метрике как для самих решений, так и для их производных до определенного порядка.

[1] *Lai C.-H., Bjorstad P.E., Cross M., Widlund O.* Eleventh International Conference on Domain Decomposition Methods // Proceedings of the 11-th International Conference on Domain Decomposition Methods in Greenwich, England, 20–24 July, 1998.

[2] *Dryja M., Widlund O.B.* Towards a unified theory of domain decomposition algorithms for elliptic problems // Proceedings of the Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential, held in Houston. Texas, 20–22 March, 1989, SIAM, 1990.

[3] *Collino F., Ghanemi S., Joly P.* Domain decomposition method for Harmonic wave propagation: a general presentation // Comput. Methods Appl. Mech. Eng.— 2000.— **184**.— P. 171–211.

[4] *Farhat C., Le Tallec P.* Vistas in domain decomposition and parallel processing in computational mechanics // Comput. Methods Appl. Mech. Eng.— 2000.— **184**.— P. 2–4.

[5] *Le Tallec P.* Domain Decomposition Methods in Computational Mechanics, Tinsley (Ed.).— vol. 1(2), North-Holland, Oden, 1994, P. 121–220.

[6] *Chilton L.K., Seshaiyer P.* The hp mortar domain decomposition method for problems in fluid mechanics // Int. j. Numer. Methods Fluids.— 2002.— **40** (12).— P. 1561–1570.

[7] *Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. — Киев: Наук. думка, 1991. — 432 с.

[8] *Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л.* Кручение упругих тел. — Москва: Физматгиз, 1963. — 686 с.

[9] *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. — М.; Л.: Физматгиз, 1962. — 708 с.

[10] *Lions P.-L.* in: R. Glowinski, G.H. Golub, G.A. Meurant, J. Periaux (Eds.), On the Schwarz Alternating Method I, SIAM, Philadelphia, PA, 1988, P. 1–42.

[11] *Lions P.-L.* in: T. Chan, R. Glowinski, J. Periaux, O. Widlund (Eds.), On the Schwarz Alternating Method II, SIAM, Philadelphia, PA, 1989, P. 47–70.

[12] *Троценко В.А.* Колебания жидкости в подвижных полостях с перегородками. — Киев: Институт математики НАН Украины, 2006. — 320 с.

[13] *Прагер В.* Вариационные принципы линейной статической теории упругости при разрывных смещениях, деформациях и напряжениях. — В кн.: Механика. — Москва, 1969, **5**. — С. 139–144.

[14] *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. — Москва: Мир, 1987. — 542 с.

[15] *Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. — Москва: Наука, 1978. — 288 с.

[16] *Розин Л.А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. — Ленинград: Изд-во Ленинградского ун-та, 1978. — 223 с.

[17] *Григоренко Я.М., Кокошин С.С.* Про один підхід до розв'язання задачі теорії оболочек методом скінченних елементів // Доп. АН УРСР, сер. А.— 1980.— № 3. — С. 46–51.

[18] *Паймушин В.Н.* Нелинейные задачи сопряжения составных пространственных тел, тонких оболочек и вариационные методы их решения // Прикл. механика и математика.— 1985.— т. 49, вып. 2. — С. 340–344.

[19] *Magoules F., Roux F.-X.* Lagrangian formulation of domein decomposition methods: A unified theory // Applied Mathematical Modelling.— 2006.— **30**. — P. 593–615.

[20] *Власов В.З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. — М.; Л.: Гостехиздат, 1949. — 784 с.

[21] *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. — Ленинград: Судпромгиз, 1962. — 431 с.

[22] *Асланян А.Г., Лидский В.Б.* Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. — Москва: Наука, 1974. — 156 с.

[23] *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. — Москва: Гостехиздат, 1951. — Т. 1. — 476 с.

[24] *Швейко Ю.Ю., Гаврилов Ю.В., Брусиловский А.Д.* О влиянии граничных условий на спектр собственных частот цилиндрических оболочек // Докл. науч.-техн. конф. по итогам науч.-исслед. работ за 1964–1965 гг. Секция энергомашиностроения. — Москва: МЭИ, 1965. — С. 131–148.

[25] *Forsberg K.* Influence of boundary conditions of the modal characteristics on thin cylindrical shells // AIAA J. — 1964. — **2**, N 12. — P. 55–76.