Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 4, 376–385

УДК 517.983.27

Наближення класів $B^{\Omega}_{1,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_∞

О.В. Федуник-Яремчук

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, fedunyk@ukr.net

We obtain exact order estimates of approximation of classes $B^{\Omega}_{1,\theta}$ of periodic functions of several variables in the space L_∞ by using step hyperbolic Fourier sums.

Получены точные по порядку оценки приближения классов $B^{\Omega}_{1,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_∞ ступенчато-гиперболическими суммами Фурье.

1. Вступ

Нехай $L_p(\pi_d)$, $1 \le p < \infty$, — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p на кубі $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d}[0;2\pi]$ функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$, в якому норма визначається так:

$$||f||_{L_p(\pi_d)} = ||f||_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$L_\infty(\pi_d)$ — простір 2π-періодичних по кожній змінній суттєво обмежених функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$ із нормою

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = ||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Всюди далі будемо вважати, що для функцій $f \in L_p(\pi_d)$ виконується додаткова умова

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx_j = 0, \ j = \overline{1,d}.$$

Для $f \in L_p(\pi_d), 1 \le p \le \infty$, і $t = (t_1, ..., t_d)$, $t_j \ge 0$, $j = \overline{1,d}$, розглянемо мішаний модуль неперервності порядку l:

$$\Omega_l(f,t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j=\overline{1,d}}} ||\Delta_h^l f(\cdot)||_p,$$

де $l \in \mathbb{N}$, $\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_1}^l \ldots \Delta_{h_d}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l(\ldots(\Delta_{h_1}^l f(x)))$ — мішана різниця порядку l з кроком h_j за змінною x_j і

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \ldots, x_d).$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1,d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ не спадає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \le \Big(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j\Big)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$;

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \ge 0$, $j = \overline{1,d}$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє також умови (S) і (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [1]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\alpha}$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}} \le C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}}, \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\gamma}$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\gamma}} \ge C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\gamma}}, \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих t_i, $i \neq j$.

Зазначимо, що функції, які задовольняють сформульовані вище умови 1–4, (S) та (S_l), можуть мати вигляд

$$\Omega(t) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j} \left(\log \dfrac{1}{t_j}\right)^{b_j}, & \text{якщо } t_j > 0,\ j = \overline{1,d}, \\ 0, & \text{якщо } \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0, \end{cases}$$

де $0 < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$, а b_j, $j = \overline{1,d}$, — фіксовані дійсні числа.

Означимо деякі порядкові співвідношення, які будуть використовуватись далі.

Нехай $\mu(n)$ і $\nu(n)$, $n \in \mathbb{N}$, – деякі додатні функції. Запис $\mu(n) \ll \nu(n)$ (відповідно $\mu(n) \gg \nu(n)$) означає, що виконується нерівність $\mu(n) \leq C_3\nu(n)$ (відповідно $\mu(n) \geq C_4\nu(n)$), де стала $C_3 > 0$ $(C_4 > 0)$ може залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$. Якщо виконуються співвідношення $\mu(n) \ll \nu(n)$ і $\mu(n) \gg \nu(n)$, $n \in \mathbb{N}$, то функції $\mu(n)$ і $\nu(n)$ будемо називати функціями однакового порядку і писати $\mu(n) \asymp \nu(n)$.

Перейдемо до означення класів функцій $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які було розглянуто в роботі [2].

Для $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1–4, класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ визначаються наступним чином:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} := \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \ ||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \leq 1 \right\},$$

де

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left\{ \int\limits_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}$$

(запис $t > 0$ для $t = (t_1, ..., t_d)$ рівносильний $t_j > 0, j = \overline{1,d}$).

Для подальших міркувань нам буде зручно користуватися еквівалентним (з точністю до абсолютних сталих) означенням класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Нехай $V_n(t)$ позначає ядро Валле Пуссена порядку $2n-1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2\sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n}\right) \cos kt.$$

Кожному вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)\right)$$

і для $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, через $A_s(f,x)$ позначимо згортку

$$A_s(f,x) = f * A_s.$$

Отже, якщо $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і $\Omega(t)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1–4, (S) і (S_l), то з точністю до абсолютних сталих класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна означити наступним чином:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(f,\cdot)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1 \right\}, \quad (1)$$

де $1 \le \theta < \infty$, та

$$B^{\Omega}_{p,\infty} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_s \frac{\|A_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \le 1 \right\}. \quad (2)$$

Тут $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, ..., 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Зазначимо, що рівності (1) і (2) були отримані в роботах відповідно [3, 4].

У випадку $\theta = \infty$ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають із розглянутими в [4] класами H^{Ω}_p. Зауважимо, що при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $0 < r_j < l$, класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ є аналогами відомих класів Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$ (див., наприклад, [5]).

Надалі будемо розглядати класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального вигляду:

$$\Omega(t) = \omega\Big(\prod_{j=1}^{d} t_j\Big), \quad (3)$$

де $\omega(\tau)$ — задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S) і (S_l). Легко переконатися, що для $\Omega(t)$ вигляду (3) виконуються властивості 1–4 функції типу мішаного модуля неперервності порядку l, а також умови (S) і (S_l), тому зберігаються наведені в (1), (2) зображення норм функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Нижче будуть встановлені точні за порядком оцінки наближення класів $B^{\Omega}_{1,\theta}$ східчасто-гіперболічними сумами Фур'є в просторі L_∞. Щоб означити досліджувану величину, введемо деякі позначення.

Кожному вектору $s = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(s) = \left\{k = (k_1, ..., k_d) : 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, j = \overline{1, d}\right\}$$

і для $f \in L_1(\pi_d)$ позначимо

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

де

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

є коефіцієнтами Фур'є функції f, $(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d$.

Через Q_n позначимо множину

$$Q_n = \bigcup_{(s,1) < n} \rho(s),$$

яку будемо називати східчасто-гіперболічним хрестом. Відомо, що для кількості точок цієї множини має місце співвідношення

$$|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Нехай $f \in L_q(\pi_d)$ і

$$S_{Q_n}(f, x) = \sum_{(s,1) < n} \delta_s(f, x)$$

є частинною сумою ряду Фур'є функції f з "номерами" гармонік із множини Q_n.

Розглянемо величину

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q = \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \|f(\cdot) - S_{Q_n}(f, \cdot)\|_q.$$

2. Основний результат

За наведених вище позначень має місце наступна теорема.

Теорема 2.1. *Нехай* $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 1$ *і умову* (S_l). *Тоді має місце порядкова рівність*

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{1,\theta})_\infty \asymp \omega(2^{-n})2^n n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{4}$$

Доведення. Скористаємось відомим твердженням (див., наприклад, [6], с. 16).

Лема 2.1. *Нехай* $T_{n_1,\ldots,n_d}$ — *тригонометричний поліном степеня* n_j *за змінною* x_j, $j = \overline{1,d}$. *Тоді при* $1 \le q < p \le \infty$ *має місце нерівність*

$$||T_{n_1,\ldots,n_d}||_p \le 2^d \left(\prod_{j=1}^{d} n_j\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} ||T_{n_1,\ldots,n_d}||_q \ . \tag{5}$$

Співвідношення (5) відоме як "нерівність різних метрик Нікольського".

Нехай q — довільне число, яке задовольняє умову $1 < q < \infty$. Використавши нерівність Мінковського, лему 2.1 і співвідношення

$$||\delta_s(f,\cdot)||_q \asymp ||A_s(f,\cdot)||_q, \ 1 < q < \infty,$$

для $f \in B^{\Omega}_{1,\theta}$ одержимо

$$||f(\cdot) - S_{Q_n}(f,\cdot)||_\infty = \left\| f(\cdot) - \sum_{(s,1)<n} \delta_s(f,\cdot) \right\|_\infty \le \sum_{(s,1)\ge n} ||\delta_s(f,\cdot)||_\infty \ll$$

$$\ll \sum_{(s,1)\ge n} 2^{(s,1)\frac{1}{q}} ||\delta_s(f,\cdot)||_q \asymp \sum_{(s,1)\ge n} 2^{(s,1)\frac{1}{q}} ||A_s(f,\cdot)||_q \ll$$

$$\ll \sum_{(s,1)\ge n} 2^{(s,1)\frac{1}{q}} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{q})} ||A_s(f,\cdot)||_1 = \sum_{(s,1)\ge n} 2^{(s,1)} ||A_s(f,\cdot)||_1 =$$

$$= \sum_{(s,1)\ge n} \omega^{-1}(2^{-(s,1)}) ||A_s(f,\cdot)||_1 \frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}} 2^{(s,1)(1-\alpha)} = I.$$

Щоб оцінити I, розглянемо три випадки.

Нехай $1 < \theta < \infty$. Застосовуючи до I нерівність Гельдера з показником θ, а також враховуючи, що $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$ задовольняє умову (S) із $\alpha > 1$, тобто

$$\frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \tag{6}$$

при $(s,1) \geq n$, і використовуючи відоме співвідношення (див., наприклад, [6], с. 11)

$$\sum_{(s,1)\geq n} 2^{-\nu(s,1)} \asymp 2^{-\nu n} n^{d-1}, \nu > 0, \tag{7}$$

будемо мати

$$I \leq \Bigg(\sum_{(s,1)\geq n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) ||A_s(f,\cdot)||_1^{\theta} \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \Bigg(\sum_{(s,1)\geq n} \frac{\omega^{\frac{\theta}{\theta-1}}(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)\frac{\theta}{\theta-1}}} 2^{(s,1)(1-\alpha)\frac{\theta}{\theta-1}} \Bigg)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll ||f||_{B^{\Omega}_{1,\theta}} \Bigg(\sum_{(s,1)\geq n} \frac{\omega^{\frac{\theta}{\theta-1}}(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)\frac{\theta}{\theta-1}}} 2^{(s,1)(1-\alpha)\frac{\theta}{\theta-1}} \Bigg)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \Bigg(\sum_{(s,1)\geq n} \frac{\omega^{\frac{\theta}{\theta-1}}(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)\frac{\theta}{\theta-1}}} 2^{(s,1)(1-\alpha)\frac{\theta}{\theta-1}} \Bigg)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \Bigg(\sum_{(s,1)\geq n} 2^{(s,1)(1-\alpha)\frac{\theta}{\theta-1}} \Bigg)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{\alpha n} 2^{n(1-\alpha)} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} = \omega(2^{-n}) 2^{n} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Нехай тепер $\theta = \infty$. Використавши співвідношення (6) із $\alpha > 1$ та (7), одержимо

$$I \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{(s,1)\geq n} \omega^{-1}(2^{-(s,1)}) ||A_s(f,\cdot)||_1 2^{(s,1)(1-\alpha)} \leq$$

$$\le \omega(2^{-n})2^{\alpha n} \sup_s \frac{||A_s(f,\cdot)||_1}{\omega(2^{-(s,1)})} \sum_{(s,1)\ge n} 2^{(s,1)(1-\alpha)} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})2^{\alpha n}||f||_{B^{\Omega}_{1,\infty}} 2^{n(1-\alpha)} n^{d-1} \ll \omega(2^{-n})2^n n^{d-1}.$$

Нехай $\theta = 1$. Оскільки $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$ задовольняє умову (S) із $\alpha > 1$, будемо мати

$$I \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{(s,1)\ge n} \omega^{-1}(2^{-(s,1)})||A_s(f,\cdot)||_1 2^{(s,1)(1-\alpha)} \le$$

$$\le \omega(2^{-n})2^{\alpha n}2^{n(1-\alpha)} \sum_{(s,1)\ge n} \omega^{-1}(2^{-(s,1)})||A_s(f,\cdot)||_1 \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})2^n||f||_{B^{\Omega}_{1,1}} \ll \omega(2^{-n})2^n.$$

Таким чином, оцінку зверху в (4) одержано.

Перейдемо до встановлення в (4) відповідної оцінки знизу. Для цього побудуємо функції, які реалізують шукані оцінки у відповідних випадках.

Покладемо, що

$$f_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \Bigl(V_{2^{s_j+1}}(x_j) - V_{2^{s_j}}(x_j) \Bigr).$$

Нехай $1 \le \theta < \infty$. Покажемо, що функція

$$f_1(x) = C_5 \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{(s,1)=n+1} f_s(x)$$

із певною сталою $C_5 > 0$ належить до класу $B^{\Omega}_{1,\theta}$.

Оскільки $||f_s(\cdot)||_1 \ll 1$ (див., наприклад, [6], с. 66), то

$$||f_1||_{B^{\Omega}_{1,\theta}} = \left(\sum_s \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)})||A_s(f_1,\cdot)||_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1)=n+1} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)})||f_s(\cdot)||_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}}\omega^{-1}(2^{-(n+1)})\Bigg(\sum_{(s,1)=n+1} 1\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}}(n+1)^{\frac{d-1}{\theta}} \ll 1.$$

Крім того, легко бачити, що $S_{Q_n}(f_1, x) = 0$.

Таким чином, використовуючи той факт, що

$$\Bigg\| \sum_{(s,1)=n+1} f_s(\cdot) \Bigg\|_\infty \asymp 2^n n^{d-1}, \qquad (8)$$

одержуємо

$$||f_1(\cdot) - S_{Q_n}(f_1, \cdot)||_\infty = ||f_1||_\infty \asymp \omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}} \times$$

$$\times \Bigg\| \sum_{(s,1)=n+1} f_s(\cdot) \Bigg\|_\infty \asymp \omega(2^{-n})2^n n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Нехай тепер $\theta = \infty$. У цьому випадку розглянемо функцію

$$f_2(x) = C_6\omega(2^{-n}) \sum_{(s,1)=n+1} f_s(x).$$

Ця функція із відповідною сталою $C_6 > 0$ належить до класу $B^{\Omega}_{1,\infty}$. Дійсно, згідно з означенням

$$||f_2||_{B^{\Omega}_{1,\infty}} = \sup_s \frac{||A_s(f_2, \cdot)||_1}{\omega(2^{-(s,1)})} \ll \omega(2^{-n}) \sup_{(s,1)=n+1} \frac{||f_s(\cdot)||_1}{\omega(2^{-(s,1)})} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n})\omega^{-1}(2^{-(n+1)}) \ll 1.$$

Крім цього, легко бачити, що $S_{Q_n}(f_2, x) = 0$.

Далі, враховуючи (8), матимемо

$$||f_2(\cdot) - S_{Q_n}(f_2, \cdot)||_\infty \asymp \omega(2^{-n})2^n n^{(d-1)}.$$

Оцінку знизу в (4) встановлено. Теорему повністю доведено.

$\square$

Наслідок 2.1. *При $\theta = \infty$ із теореми отримуємо оцінку*

$$\mathcal{E}_{Q_n}(H^{\Omega}_1)_\infty \asymp \omega(2^{-n})2^n n^{d-1}.$$

Зауваження 2.1. Точну за порядком оцінку величини $\mathcal{E}_{Q_n}(H^r_1, L_\infty)$ встановлено В. М. Темляковим [7].

Зауваження 2.2. У випадку $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^r$ результат теореми для класів $B^r_{1,\theta}, 1 \le \theta < \infty$, отримано А. С. Романюком [8].

Зауваження 2.3. Для $1 < p < \infty$ точні за порядком оцінки величин $\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_\infty$ одержано в [9].

[1] *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483–522.

[2] *Sun Youngsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1997. — **219**. — С. 356–377.

[3] *Стасюк С.А., Федуник О.В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 5. — С. 692–704.

[4] *Пустовойтов Н.Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — **20**. — С. 35–48.

[5] *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1989. — **187**. — С. 143–161.

[6] *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Там же. — 1986. — **178**. — С. 1–112.

[7] *Темляков В.Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Там же. — 1989. — **189**. — С. 138–168.

[8] *Романюк А.С.* Об оценках аппроксимативных характеристик классов Бесова периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. —1997. — **49**, № 9. — С. 1250–1261.

[9] *Стасюк С.А.* Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці // Там само. — 2002. — **54**, № 11. — С. 1551–1559.