Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 4, 399–412

УДК 517.5

Апроксимаційні характеристики діагональних операторів в просторах $l_{\mathbf{p}}$

А. Л. Шидліч [1], ***С. О. Чайченко*** [2]

[1] *Інститут математики НАН України, Київ, andy709@list.ru, shidlich@imath.kiev.ua*
[2] *Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, stolch@mail.ru*

In the paper, we study approximation characteristics of diagonal operators in the sequence spaces $l_{\mathbf{p}}$ with variable exponent $\mathbf{p}$. In particular, we find the exact values of the quantities of the best approximation, the basis n-widths and the Kolmogorov n-widths of certain sets of images of the diagonal operators in these spaces.

В работе изучаются аппроксимационные характеристики диагональных операторов в пространствах $l_{\mathbf{p}}$ с переменным показателем $\mathbf{p}$. В частности, найдено точные значения величин наилучших приближений, базисного поперечника и поперечника по Колмогорову некоторых множеств образов диагональных операторов в этих пространствах.

1. Вступ.

Нехай $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову

$$1 \le p_k \le K, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

де K — деяка додатна стала. Через $l_{\mathbf{p}}$ позначимо простір всіх послідовностей $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ дійсних чисел зі скінченою нормою Люксембурга

$$||\mathbf{x}||_{l_{\mathbf{p}}} := \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{x_k}{\alpha}\right|^{p_k} \le 1\right\}.$$

Зазначимо, що у випадку, коли послідовність $\mathbf{p}$ є сталою: $p_k{=}p$, $k \in \mathbb{N}$, простори $l_\mathbf{p}$ збігаються зі звичайними просторами l_p з нормою

$$||\mathbf{x}||_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p},$$

якщо ж $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність чисел, що задовольняють умову (1), то як показано в [1] (лема 2.6), має місце рівність

$$l_\mathbf{p} = \left\{\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \ : \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} < \infty\right\}, \tag{2}$$

Простори $l_\mathbf{p}$ вперше з'явилися в літературі ще в 1931 в статті Орлича [2]. У цій статті розглядалося наступне питання: нехай $p_k > 1$ і x_k — послідовності дійсних чисел такі, що ряд $\sum |x_k|^{p_k}$ збігається. Якими мають бути необхідна та достатня умови на послідовність y_k для того, щоб ряд $\sum x_k y_k$ був збіжним? Таку умову було знайдено і вона полягає в тому, що ряд $\sum |\lambda y_k|^{p_k'}$ повинен збігатися при деякому $\lambda > 0$ і $p_k' = p_k/(p_k - 1)$. Отриманий результат, фактично є нерівністю Гельдера в просторі $l_\mathbf{p}$. В цій же роботі автором також розглянуто функціональні простори зі змінним показником $L^{p(x)}$ на дійсній прямій, і одержано нерівність Гельдера у цих просторах.

Зазначена робота Орлича поклала початок цілій теорії просторів зі змінним показником і почала розроблятися багатьма математиками в різних напрямах. При цьому, на наш погляд, дещо більша увага приділялась теорії функціональних просторів Лебега зі змінним показником. З останніми результатами по цій тематиці та відкритими проблемами можна, зокрема, ознайомитися в роботах [3], [4].

Щодо просторів $l_\mathbf{p}$, то останнім часом ці простори досліджувались в роботах [1], [5]– [7]. Так в роботі [5] були знайдені необхідні та достатні умови еквівалентності норм в просторах $l_\mathbf{p}$ і $l_\mathbf{q}$ та умови обмеженості операторів зсуву, в роботі [6] досліджувались властивості оператора усереднення та максимального оператора, в роботі [7] знайдено умови вкладення для просторів $l_\mathbf{p}$. Зазначимо, також, що результати теорії просторів зі змінним показником знаходять застосування в теорії пружності, механіці, теорії диференціальних операторів, варіаційному численні [8]– [10].

В даній роботі розглянуто діагональні оператори в просторах $l_\mathbf{p}$ і досліджено деякі апроксимаційні характеристики цих операторів.

Зокрема, в роботі знайдено точні значення величин найкращих наближень, базисних поперечників та поперечників за Колмогоровим деяких множин образів діагональних операторів в цих просторах. Одержані результати розповсюджують деякі результати О.І. Степанця [11], [12] (гл. XI), [13] для лінійних просторів S^p_φ на випадок наближення у просторах $l_{\mathbf{p}}$ зі змінним показником. Зазначимо також, що у просторах l_p апроксимаційні характеристики діагональних операторів вивчалися, зокрема, в роботах [14]– [16].

2. Найкращі наближення.

Нехай $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0; \tag{3}$$

$T : x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \to Tx = \{\lambda_k x_k\}_{k=1}^\infty$ — діагональний оператор, заданий на просторі $l_{\mathbf{p}}$; $e_i = \{e_i^k\}_{k=1}^\infty$, де $e_i^k = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ 1, & k = i \end{cases}$.

Для довільного набору γ_n із n різних натуральних чисел розглянемо величину

$$E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) := E_{\gamma_n}(T(B\, l_{\mathbf{q}}), l_{\mathbf{p}}) =$$

$$= \sup_{x\in B\, l_{\mathbf{q}}} E_{\gamma_n}(Tx, l_{\mathbf{p}}) = \sup_{x\in B\, l_{\mathbf{q}}} \inf_{a_i} ||Tx - P_{\gamma_n}||_{l_{\mathbf{p}}}$$

найкращого наближення в просторі $l_{\mathbf{p}}$ множини $T(B\, l_{\mathbf{q}})$ за допомогою всіх можливих n-членних поліномів $P_{\gamma_n} = \sum_{i\in\gamma_n} a_i e_i$, що відповідають набору γ_n, де $B\, l_{\mathbf{q}}$ — одинична куля простору $l_{\mathbf{p}}$, a_i — довільні дійсні числа.

Зазначимо, що коли $0 < q_k \le p_k$, $k \in \mathbb{N}$, а послідовність λ задовольняє умову (3), для довільного $x \in B\, l_{\mathbf{q}}$ маємо $Tx \in l_{\mathbf{p}}$ і отже, величини $E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}})$ за таких умов мають зміст.

Дійсно, в такому випадку для довільного $x \in B\, l_{\mathbf{q}}$ всі $|x_k| \le 1$, тому для будь-яких $0 < q_k \le p_k$ маємо $|x_k|^{p_k} \le |x_k|^{q_k}$ і

$$\sum_{k=1}^\infty \left|\frac{\lambda_k x_k}{\lambda^*}\right|^{p_k} \le \sum_{k=1}^\infty |x_k|^{p_k} \le \sum_{k=1}^\infty |x_k|^{q_k} \le \sum_{k=1}^\infty \left|\frac{x_k}{||x||_{l_{\mathbf{q}}}}\right|^{q_k} \le 1,$$

де $\lambda^* = \max\limits_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k$. Звідси випливає, що $||Tx||_{l_{\mathbf{p}}} \le \lambda^* < \infty$ і $Tx \in l_{\mathbf{p}}$.

Теорема 2.1. *Нехай* $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *і* $\mathbf{q}= \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільні послідовності додатних чисел, що задовольняють нерівності* (1) *і* $q_k \le p_k$, $k \in \mathbb{N}$; $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову* (3). *Тоді для довільного набору* γ_n *із* n *різних натуральних чисел має місце рівність*

$$E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = \max_{k\notin\gamma_n} \lambda_k. \tag{4}$$

Доведення. Оскільки для довільного $x \in l_{\mathbf{p}}$, будь-яких $\alpha > 0$ та $a_i \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k\in\gamma_n} \left|\frac{x_k - a_i}{\alpha}\right|^{p_k} + \sum_{k\notin\gamma_n} \left|\frac{x_k}{\alpha}\right|^{p_k} \ge \sum_{k\notin\gamma_n} \left|\frac{x_k}{\alpha}\right|^{p_k},$$

то для довільного $x \in l_{\mathbf{p}}$

$$E_{\gamma_n}(x, l_{\mathbf{p}}) = \mathcal{E}_{\gamma_n}(x, l_{\mathbf{p}}) :=$$

$$= ||x - S_{\gamma_n}(x)||_{l_{\mathbf{p}}} = \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{k\notin\gamma_n} \left|\frac{x_k}{\alpha}\right|^{p_k} \le 1\right\}, \tag{5}$$

де $S_{\gamma_n}(x) = \sum_{k\in\gamma_n} x_k e_k$.

Виберемо число $k^* \in \mathbb{N}$, $k^* = k^*(\gamma_n)$, так, що $\lambda_{k^*} = \max\limits_{k\notin\gamma_n} \lambda_k$. Тоді для довільного $x \in B\, l_{\mathbf{q}}$

$$\sum_{k\notin\gamma_n} \left|\frac{\lambda_k x_k}{\lambda_{k^*}}\right|^{p_k} \le \sum_{k\notin\gamma_n} |x_k|^{p_k} \le \sum_{k\notin\gamma_n} |x_k|^{q_k} \le \sum_{k\notin\gamma_n} \left|\frac{x_k}{||x||_{l_{\mathbf{q}}}}\right|^{q_k} \le 1.$$

Звідси випливає, що

$$E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) \le \lambda_{k^*} = \max_{k\notin\gamma_n} \lambda_k.$$

З іншого боку,

$$E_{\gamma_n}(Te_{k^*}, l_{\mathbf{p}}) = \inf\left\{\alpha > 0 : \left|\frac{\lambda_{k^*}}{\alpha}\right|^{p_{k^*}} \le 1\right\} = \lambda_{k^*},$$

при цьому очевидно, що $e_{k^*} \in B\, l_{\mathbf{p}}$. Таким чином, дійсно має місце рівність (4).

□

Розглядаючи точні нижні межі в обох частинах рівності (4) по всім можливим наборам γ_n із n натуральних чисел, робимо висновок, що точна нижня межа в правій частині (4) реалізується набором γ_n^*, який визначається співвідношенням

$$\gamma_n^* = \{i_k \in \mathbb{N} : \quad \lambda_{i_k} = \bar{\lambda}_k,\ k = 1, 2, \dots, n\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — незростаюча перестановка чисел λ_k і

$$\max_{k \notin \gamma_n^*} \lambda_k = \bar{\lambda}_{n+1}.$$

З теореми 2.1 випливає такий наслідок.

Наслідок 2.1. *Нехай* $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *і* $\mathbf{q} = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільні послідовності додатних чисел, що задовольняють відповідно умови* (1) *і* $q_k \le p_k$, $k \in \mathbb{N}$*;* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову* (3)*. Тоді для довільного* $n \in \mathbb{N}$

$$D_n(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = D_n(T(B\, l_{\mathbf{q}}), l_{\mathbf{p}}) := \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = \bar{\lambda}_{n+1},$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— незростаюча перестановка чисел* λ_k*.*

Величину $D_n(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = D_n(T(B\, l_{\mathbf{q}}), l_{\mathbf{p}})$ називають базисним поперечником множини $T(B\, l_{\mathbf{q}})$ в просторі $l_{\mathbf{p}}$.

У випадку, коли $1 \le p_k \le p^* < q_* < q_k \le K$, $k \in \mathbb{N}$, умовою, що гарантує для довільного $x \in B\, l_{\mathbf{q}}$ включення $Tx \in l_{\mathbf{p}}$, а отже і коректність введених вище величин $E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}})$, є умова

$$||\lambda||_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}}} = \inf \left\{ \alpha > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k}{\alpha} \right|^{\frac{p_k q_k}{q_k - p_k}} \le 1 \right\} < \infty. \tag{6}$$

Дійсно, для довільних чисел $a > 0$ і $b > 0$ маємо

$$ab \le \frac{a^s}{s} + \frac{b^{s'}}{s'}, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1,$$

звідси для будь-яких $a_k > 0$ і $b_k > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^{s_k}}{s_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^{s'_k}}{s'_k}, \quad \frac{1}{s_k} + \frac{1}{s'_k} = 1. \tag{7}$$

Тому якщо виконується умова (6) і $x \in B\, l_{\mathbf{q}}$, то поклавши $a_k = \lambda_k^{p_k}$, $b_k = |x_k|^{p_k}$, $s_k = q_k/(q_k - p_k)$, $s'_k = q_k/p_k$, з урахуванням (2) отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k x_k|^{p_k} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{\frac{p_k q_k}{q_k - p_k}}}{q_k/(q_k - p_k)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^{q_k}}{q_k/p_k} \le$$

$$\le \max_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{q_i - p_i}{q_i} \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{p_k q_k}{q_k - p_k}} + \max_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{p_i}{q_i} \right\} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{q_k} < \infty,$$

тобто, $Tx \in l_{\mathbf{p}}$.

Теорема 2.2. *Нехай* $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *і* $\mathbf{q} = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільні послідовності додатних чисел таких, що* $1 \le p_k \le p^* < q_* < q_k \le K$, $k \in \mathbb{N}$; $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— будь-яка послідовність додатних чисел, що задовольняють умову* (6)*. Якщо для набору* γ_n *із* $n \in \mathbb{N}$ *різних натуральних чисел*

$$\max_{i \notin \gamma_n} \left\{ \frac{q_i - p_i}{q_i} \right\} + \max_{i \notin \gamma_n} \left\{ \frac{p_i}{q_i} \right\} = 1, \tag{8}$$

то справджується рівність

$$E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = ||\widetilde{\lambda}||_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}}, \tag{9}$$

де послідовність $\widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda}(\gamma_n) = \{\widetilde{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *така, що*

$$\widetilde{\lambda}_k = \begin{cases} \lambda_k, & k \notin \gamma_n, \\ 0, & k \in \gamma_n. \end{cases}. \tag{10}$$

Доведення. Для спрощення записів покладемо $||\widetilde{\lambda}|| := ||\widetilde{\lambda}||_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}}$. З огляду на (5) та (10) для довільного $x \in B\, l_{\mathbf{q}} \subset l_{\mathbf{p}}$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ розглянемо величину

$$\sum_{k \notin \gamma_n} \left| \frac{\lambda_k x_k}{||\widetilde{\lambda}|| + \varepsilon} \right|^{p_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\widetilde{\lambda}_k x_k}{||\widetilde{\lambda}|| + \varepsilon} \right|^{p_k}.$$

Поклавши у співвідношенні (7) $a_k = \widetilde{\lambda}_k^{p_k}/(||\widetilde{\lambda}||^{p_k} + \varepsilon)$, $b_k = |x_k|^{p_k}$, $s_k = q_k/(q_k - p_k)$ та $s'_k = q_k/p_k$, із врахуванням (8) та означення норми простору $l_{\mathbf{p}}$ отримаємо

$$\sum_{k\notin\gamma_n}\left|\frac{\lambda_k x_k}{||\widetilde{\lambda}||+\varepsilon}\right|^{p_k}\leq\sum_{k\notin\gamma_n}\frac{q_k-p_k}{q_k}\left|\frac{\lambda_k}{||\widetilde{\lambda}||+\varepsilon}\right|^{\frac{p_kq_k}{q_k-p_k}}+\sum_{k\notin\gamma_n}\frac{p_k}{q_k}|x_k|^{q_k}\leq$$

$$\leq\max_{i\notin\gamma_n}\left\{\frac{q_i-p_i}{q_i}\right\}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\widetilde{\lambda}_k}{||\widetilde{\lambda}||+\varepsilon}\right|^{\frac{p_kq_k}{q_k-p_k}}+\max_{i\notin\gamma_n}\left\{\frac{p_i}{q_i}\right\}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^{q_k}\leq$$

$$\leq\max_{i\notin\gamma_n}\left\{\frac{q_i-p_i}{q_i}\right\}+\max_{i\notin\gamma_n}\left\{\frac{p_i}{q_i}\right\}=1,$$

Звідси випливає, що для довільного $x\in B\,l_{\mathbf{q}}$ і будь-якого $\varepsilon>0$

$$E_{\gamma_n}(Tx,l_{\mathbf{p}})\leq||\widetilde{\lambda}||+\varepsilon.$$

і отже, внаслідок довільності ε

$$E_{\gamma_n}(T:l_{\mathbf{q}}\to l_{\mathbf{p}})\leq||\widetilde{\lambda}||. \tag{11}$$

З іншого боку, розглянемо послідовність $\widetilde{x}=\{\widetilde{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ таку, що

$$\widetilde{x}_k=\widetilde{\lambda_k}^{\frac{p_k}{q_k-p_k}}\cdot||\widetilde{\lambda}||^{\frac{p_k}{p_k-q_k}},\quad k=1,2,\ldots$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\widetilde{x}_k|^{q_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\widetilde{\lambda_k}^{\frac{p_k}{q_k-p_k}}}{||\widetilde{\lambda}||^{\frac{p_k}{q_k-p_k}}}\right|^{q_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\widetilde{\lambda}_k}{||\widetilde{\lambda}||}\right|^{\frac{p_kq_k}{q_k-p_k}}\leq 1,$$

тому $||\widetilde{x}||_{l_{\mathbf{q}}}\leq 1$ і $\widetilde{x}\in B\,l_{\mathbf{q}}$. Крім цього, з огляду на означення норми простору $l_{\mathbf{p}}$ маємо

$$\sum_{k\notin\gamma_n}\left|\frac{\lambda_k\widetilde{x}_k}{||\widetilde{\lambda}||}\right|^{p_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\widetilde{\lambda}_k}{||\widetilde{\lambda}||}\cdot\frac{\widetilde{\lambda_k}^{\frac{p_k}{q_k-p_k}}}{||\widetilde{\lambda}||^{\frac{p_k}{q_k-p_k}}}\right|^{p_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\widetilde{\lambda}_k}{||\widetilde{\lambda}||}\right|^{\frac{p_kq_k}{q_k-p_k}}\leq 1.$$

Покажемо тепер, що

$$\inf\left\{\alpha>0:\sum_{k\notin\gamma_n}\left|\frac{\lambda\widetilde{x}_k}{\alpha}\right|^{p_k}\leq 1\right\}=||\widetilde{\lambda}||. \tag{12}$$

Дійсно, якщо припустити, що при деякому $\alpha_0 = ||\widetilde{\lambda}|| - \varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, виконується нерівність

$$\sum_{k\notin\gamma_n} \left|\frac{\lambda_k \widetilde{x}_k}{\alpha_0}\right|^{p_k} \leq 1,$$

то звідси отримаємо

$$1 \geq \sum_{k\notin\gamma_n} \left|\frac{\lambda_k \widetilde{x}_k}{||\widetilde{\lambda}|| - \varepsilon_0}\right|^{p_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\widetilde{\lambda}_k}{||\widetilde{\lambda}||(1-\varepsilon_0/||\widetilde{\lambda}||)} \cdot \frac{\widetilde{\lambda_k}^{\frac{p_k}{q_k-p_k}}}{||\widetilde{\lambda}||^{\frac{p_k}{q_k-p_k}}}\right|^{p_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\widetilde{\lambda}_k}{||\widetilde{\lambda}||(1-\varepsilon_0/||\widetilde{\lambda}||)^{\frac{q_k-p_k}{p_k}}}\right|^{\frac{p_k q_k}{q_k-p_k}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\widetilde{\lambda}_k}{||\widetilde{\lambda}||(1-\varepsilon_0/||\widetilde{\lambda}||)^{\frac{q_*-p^*}{K}}}\right|^{\frac{p_k q_k}{q_k-p_k}}.$$

Тобто, за даного припущення при $\alpha_1 = ||\widetilde{\lambda}||(1-\varepsilon_0/||\widetilde{\lambda}||)^{\frac{q_*-p^*}{K}} < ||\widetilde{\lambda}||$ виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\widetilde{\lambda}_k}{\alpha_1}\right|^{\frac{p_k q_k}{q_k-p_k}} \leq 1,$$

а це суперечить тому, що $||\widetilde{\lambda}||$ — норма послідовності $\widetilde{\lambda}$ в просторі $l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}}$. Таким чином, припущення невірне і має місце співвідношення (12). Із співвідношень (5) і (12) отримуємо

$$E_{\gamma_n}(T\widetilde{x}, l_{\mathbf{p}}) = ||\widetilde{\lambda}||_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q}-\mathbf{p}}}}. \tag{13}$$

Об'єднуючи співвідношення (11) і (13), переконуємося у справедливості рівності (9). Теорему доведено.

□

Зазначимо, що умова (8) виконується тільки для послідовностей $\mathbf{p}$ і $\mathbf{q}$ таких, що $q_k = K_0 p_k$ для всіх $k \in \mathbb{N} \setminus \gamma_n$, де K_0 — деяка додатна стала. На жаль, в загальному випадку ми не змогли отримати відповідний результат.

Для формулювання наступного твердження припустимо, що $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел, які задовольняють умову (6). Нехай, також, $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $\mathbf{q} = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ —

довільні неспадні послідовності додатних чисел таких, що $1 \le p_k \le p^* < q_* < q_k \le K$, $k \in \mathbb{N}$, і

$$\max_{i\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{q_i - p_i}{q_i} \right\} + \max_{i\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{p_i}{q_i} \right\} = 1, \tag{14}$$

тобто, для довільного $k \in \mathbb{N}$ $q_k = K_0 p_k$, де K_0 — додатна стала, $K_0 > 1$. Переходячи до нижньої межі в правій частині рівності (9) по всім можливим наборам γ_n з n різних натуральних чисел, знаходимо

$$\inf_{\gamma_n} ||\widetilde{\lambda}||_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}} = ||\lambda^*||_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}},$$

де послідовність $\lambda^* = \{\lambda_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ така, що

$$\lambda_k^* = \begin{cases} 0, & k = 1, 2, \ldots, n, \\ \lambda_k, & k > n. \end{cases} \tag{15}$$

З теореми 2.2 випливає наступний наслідок.

Наслідок 2.2. *Нехай $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел, що задовольняють умову* (6)*. Нехай, далі, $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $\mathbf{q} = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільні послідовності додатних чисел таких, що $1 \le p_k \le p^* < q_* < q_k \le K$, $k \in \mathbb{N}$ і виконується рівність* (14)*. Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$*

$$D_n(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = ||\lambda^*||_{l_{\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{q-p}}}},$$

де послідовність $\lambda^* = \{\lambda_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ визначається рівністю (15)*.*

Зазначимо, що у випадку, коли послідовності $\mathbf{p}$ і $\mathbf{q}$ є сталими ($p_k = p$, $q_k = q$ для всіх $k \in \mathbb{N}$), тобто, коли $l_{\mathbf{p}} = l_p$ і $l_{\mathbf{q}} = l_q$, твердження наслідків 2.1 та 2.2 і теореми 2.2 випливають відповідно із теорем 4.3, 4.6 та 4.5 роботи [13].

3. Поперечники за Колмогоровим.

Конструкція апроксимативних агрегатів, які будуть нами далі використовуватися, визначаються характеристичними послідовностями $\varepsilon(\lambda)$, $g_n(\lambda)$ та $\delta(\lambda)$, що означаються наступним чином [13].

Нехай $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову (3). Позначимо через $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ послідовність всіх значень величин λ_k, впорядковану за незростанням, через $g(\lambda) = g_1, g_2, \ldots$ позначимо систему множин

$$g_n = g_n(\lambda) = \{k \in \mathbb{N} : \ \lambda_k \ \geq \varepsilon_n\}, \tag{16}$$

а через $\delta(\lambda) = \delta_1, \delta_2, \ldots$ – послідовність чисел $\delta_n = |g_n|$, де $|g_n|$ – кількість чисел $k \in \mathbb{N}$, які містяться в множині g_n.

Враховуючи умову (3), послідовності $\varepsilon(\lambda)$ та $g(\lambda)$ можна означити наступними співвідношеннями

$$\varepsilon_1 = \sup_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k, \quad g_1 = \{k \in \mathbb{N} \ : \ \ \lambda_k = \varepsilon_1\},$$

$$\varepsilon_n = \sup_{k \bar{\in} g_{n-1}} \lambda_k, \quad g_n = g_{n-1} \cup \{k \in \mathbb{N} \ : \ \ \lambda_k = \varepsilon_n\}.$$

Зазначимо, що за такого означення кожне число $n^* \in \mathbb{N}$ належить усім множинам $g_n(\lambda)$ з достатньо великими номерами n і

$$\lim_{k \to \infty} \delta_k = \infty.$$

Надалі зручно через $g_0 = g_0^{\lambda}$ позначати порожню множину і вважати, що $\delta_0 = 0$.

Зазначимо також, що якщо $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — незростаюча перестановка чисел λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, то справджується рівність

$$\bar{\lambda}_k = \varepsilon_n \quad \forall k \in (\delta_{n-1}, \delta_n], \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Тому з теореми 2.1 легко отримати наступний наслідок.

Наслідок 3.1. *Нехай* $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *і* $\mathbf{q} = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільні послідовності додатних чисел, що задовольняють нерівності* (1) *і* $q_k \leq p_k$, $k \in \mathbb{N}$; $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову* (3)*. Тоді для довільного* $n \in \mathbb{N}$

$$E_{g_{n-1}(\lambda)}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = \mathcal{E}_{g_{n-1}(\lambda)}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = \varepsilon_n, \tag{17}$$

де ε_n *—* n*-й член характеристичної послідовності* $\varepsilon(\lambda)$*.*

Зауваження 3.1. Зазначимо, що у випадку, коли послідовність $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ є строго спадною, для довільного $n \in \mathbb{N}$ маємо $\varepsilon_n(\lambda) =$

λ_n і $g_n(\lambda) = \{1, 2, \dots, n\}$, $\delta_n(\lambda) = n$, а величини $E_{g_{n-1}(\lambda)}(x, l_{\mathbf{p}})$ та $\mathcal{E}_{g_{n-1}(\lambda)}(x, l_{\mathbf{p}})$ мають відповідно вигляд

$$E_{g_{n-1}(\lambda)}(x, l_{\mathbf{p}}) = E_{n-1}(x, l_{\mathbf{p}}) = \inf_{a_i} ||x - \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i||_{l_{\mathbf{p}}}$$

та

$$\mathcal{E}_{g_{n-1}(\lambda)}(x, l_{\mathbf{p}}) = \mathcal{E}_{n-1}(x, l_{\mathbf{p}}) = ||x - \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i||_{l_{\mathbf{p}}}.$$

Нехай, далі, X та Y — лінійні нормовані простори, $B\,X$ — замкнена одинична куля простору X і $T : X \to Y$ — обмежений лінійний оператор. Величину

$$d_n(T : X \to Y) := d_n(T(B\,X); Y) = \inf_{F_n \in \mathcal{F}_n} \sup_{x \in B\,X} \inf_{u \in F_n} ||Tx - u||_Y$$

де $\mathcal{F}_n$ — множина всіх підпросторів простору Y розмірності не вище $n \in \mathbb{N}$, називають поперечником за Колмогоровим множини $T(B\,X)$ в просторі Y.

Теорема 3.1. *Нехай* $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють нерівності* (1)*;* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову* (3)*. Тоді для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *мають місце рівності*

$$d_{\delta_{n-1}}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) = d_{\delta_{n-1}+1}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) = \ldots =$$
$$= d_{\delta_n - 1}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) = E_n(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) = \varepsilon_n, \tag{18}$$

в яких δ_s *і* ε_s, $s = 1, 2, \ldots,$ *— елементи характеристичних послідовностей* $\delta(\lambda)$ *та* $\varepsilon(\lambda)$ *послідовності* λ, *а* $\delta_0 = 0$.

Доведення. Нехай спочатку $n > 1$. Підпростір Φ_{n-1}^{λ} поліномів

$$\Phi_{n-1} = \sum_{k \in g_{n-1}(\lambda)} a_k e_k \tag{19}$$

має розмірність δ_{n-1}. Тому з врахуванням (17) знаходимо

$$\varepsilon_n = E_{g_{n-1}(\lambda)}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) \geq d_{\delta_{n-1}}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) \geq$$
$$\geq d_{\delta_{n-2}}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) \geq \ldots \geq d_{\delta_n - 1}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}).$$

Отже для доведення рівності (18) залишається показати, що

$$d_{\delta_n - 1}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) \geq \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

Для цього скористаємось відомою теоремою про поперечник кулі (див., наприклад, [17], §10.2), згідно з якою, якщо множина $\mathfrak{M}$ лінійного нормованого простору $\mathcal{X}$ з нормою $||\cdot||_{\mathcal{X}}$ містить кулю $\gamma U_{\nu+1}$ радіуса γ деякого $(\nu+1)$-мірного підпростору $M_{\nu+1}$ з $\mathcal{X}$, тобто, якщо

$$\mathfrak{M} \supset \gamma U_{\nu+1} = \{y : \ y \in M_{\nu+1}, \ ||y||_{\mathcal{X}} \leq \gamma\},$$

то

$$d_\nu(\mathfrak{M})_{\mathcal{X}} = \inf_{F_\nu \in G_\nu} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf_{u \in F_\nu} ||f - u||_{\mathcal{X}} \geq \gamma,$$

де G_ν — множина всіх ν-мірних підпросторів в $\mathcal{X}$.

Нехай $\varepsilon_n B^\lambda_{n,\Phi}$ — перетин кулі радіуса ε_n в $l_{\mathbf{p}}$ з простором Φ^λ_n (розмірності δ_n) поліномів вигляду (19):

$$\varepsilon_n U^\lambda_{n,\Phi} = \{\Phi_n \in \Phi^\lambda_n \ : \ ||\Phi_n||_{l_{\mathbf{p}}} \leq \varepsilon_n\}. \tag{21}$$

Тоді з урахуванням (16) та (21) для довільного полінома $\Phi_n = \sum_{k \in g_n(\lambda)} a_k e_k \in \varepsilon_n B^\lambda_{n,\Phi}$ маємо

$$\sum_{k \in g_n(\lambda)} \left|\frac{a_k}{\lambda_k}\right|^{p_k} \leq \sum_{k \in g_n(\lambda)} \left|\frac{a_k}{\varepsilon_n}\right|^{p_k} \leq 1.$$

Звідси випливає, що Φ_n є образом деякого елемента з одиничної кулі $B\,l_{\mathbf{p}}$. Таким чином, куля $\varepsilon_n B^\lambda_{n,\Phi}$ δ_n-мірного підпростору Φ^λ_n з $l_{\mathbf{p}}$ міститься в множині $T(B\,l_{\mathbf{p}})$ образів всіх елементів з одиничної кулі $B\,l_{\mathbf{p}}$ при дії оператора T. Звідси з врахуванням рівності

$$d_n(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) = \inf_{F_n \in \mathcal{F}_n} \sup_{x \in T(B l_{\mathbf{p}})} \inf_{u \in F_n} ||x - u||_{l_{\mathbf{p}}}$$

на підставі наведеної вище теореми отримуємо співвідношення (20). Таким чином, у випадку $n > 1$ теорему доведено. При $n = 1$ її доведення залишається без змін, якщо вважати, що підпростір $\Phi_0(\lambda)$ складається з нульового елемента $\theta = (0, 0, \ldots)$ і його розмірність дорівнює нулю.

$\square$

Зазначимо, що у випадку, коли послідовність $\mathbf{p}$ є сталою: $p_k = p$, $k \in \mathbb{N}$, тобто, коли $l_{\mathbf{p}} = l_p$, твердження наслідку 3.1 та теореми 3.1 випливають відповідно із теорем 1 та 2 роботи [11] (див. також [12] теореми 3.1 та 3.2 глави XI). У випадку скінченно мірних просторів l_p^d твердження, аналогічне до теореми 3.1, випливає з теореми 2.1 глави VI монографії [18].

[1] *Edmunds D. E., Nekvinda A.* Averaging operators on l_p and $L_p(x)$ // Math. Inequal. Appl. — **5,** № 2. — 2002 — P. 235–246.

[2] *Orlicz W.* Über konjugierte Exponentenfolgen // Studia Math. — **3.** — 1931, — P. 200–212.

[3] *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M.* Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. — SPIN — 2010. — 502 p.

[4] *Diening L., Hasto P., Nekvinda A.* Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces // FSDONA 2004 Proceedings of the conference held in Milovy — May 27–June 2 — 2004. — Mathematical Institute AS CR, Praha. — 2005.

[5] *Nekvinda A.* Equivalence of l^{p_n} norms and shift operators // Math. Inequal. Appl. — **5,** №4. — 2002. — P. 711—723.

[6] *Nekvinda A.* A note on maximal operator on l^{p_n} and $L^{p(x)}(\mathbb{R})$ // J. Funct. Spaces Appl. — **5**, №1. — 2007. — P. 49–88,

[7] *Nekvinda A.* Imbeddings between discrete weighted Lebesgue spaces // Math. Inequal. Appl. — **10,** №1. — 2007. — P. 165–172

[8] *Diening L., Ruzicka M.* Calderon-Zigmund operators on generelized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ and problems releted to fluid dynamics // J. Reine Angew. Math. — 563. — 2003. — P. 197–220.

[9] *Ruzicka M.* Electroreological fluids: Modeling and mathematical theory, Lect. Notes Math. Springer — 2000. — **1748.** — 176 p.

[10] *Samko S.G.* On a progress in the theory of Lebesgue spaces whith variable exponent: Maximal and Singular operators // Integral Transforms Spec. Funct. — 2005. — **16,** № 5-6. — P. 461–482.

[11] *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ в разных метриках // Укр. мат. журн. — **53,** № 8. — 2001. — С. 1121–1146.

[12] *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. — Київ: Праці Ін-ту математики НАН України, ч. 2. — Т. 40. — 2002. — 468 с.

[13] *Степанец А.И.* Задачи теории приближений в линейных пространствах // Укр. мат. журн. — **58,** № 1. — 2006. — С. 47–92.

[14] *Gensun F., Lixin Q.* Approximation Characteristics for Diagonal Operators in Different Computational Settings // J. Approx. Theory. — **140,** № 2. — 2006. — P. 178–190.

[15] *Gao F.* Exact value of the n-term approximation of a diagonal operator// J. Approx. Theory. — **162,** № 4. — 2010. — P. 646–652.

[16] *Amini A.A., Wainwrighta M.J.* Approximation properties of certain operator-induced norms on Hilbert spaces // J. Approx. Theory. — **164,** № 2. — 2012. — P. 320–345.

[17] *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. — М.: Изд.-во Моск. ун-та, 1976. — 304 с.

[18] *Pinkus A.* n-widths in approximation theory // Springer–Verlag. — 1985. — 291 p.