Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 4, 38–53

УДК 532.595

Визначення меж застосовності різних фізичних гіпотез динаміки ідеальної рідини в рухомому циліндричному резервуарі *

М.Я. Барняк, І.О. Луковський

Інститут математики НАН України, Київ;
barnyak@imath.kiev.ua, lykovsky@imath.kiev.ua

The paper examines dynamic characteristics (natural sloshing frequencies and added mass coeffieicnts) of an ideal liquid in a tank with accounting for the surface tension. The liquid partly fills a cylindrical container at the rest. A semi-analytical method for determining the static liquid shape is proposed which is also applicable for large Bond number. The corresponding spectral problem on natural sloshing modes and frequencies is solved by a variational method. In the case of a mobile cylindrical tank, expressions for added mass coefficients and their numerical values are presented versus the Bond number. A comparative analysis of the obtained numerical data with and without the surface tension effect is conducted.

Приведены результаты исследований динамических характеристик идеальной жидкости (частот собственных колебаний и присоединенных масс) при учете сил поверхностного натяжения жидкости, частично заполняющей цилиндрический резервуар в состоянии покоя или поступательного движения. Предложена методика определения статичной формы равновесия жидкости в аналитическом виде, включая и случай больших значений числа Бонда, а также соответствующая спектральная проблема для задачи о собственных колебаниях капиллярной жидкости решается вариационным методом. В случае подвижного цилиндра получены выражения для присоединенных масс жидкости и их численные значения для разных чисел Бонда. Выполнен сравнительный анализ полученных численных данных с аналогичными результатами соответствующих задач без учета сил поверхностного натяжения.

* Робота виконана за часткової підтримки НДР № 0112U001015.

1. Побудова форми рівноваги капілярної рідини в круговому вертикальному циліндрі

.

Під дією сил ваги і сил поверхневого натягу статична вільна поверхня рідини набуває криволінійної конфігурації, зокрема у вертикальному круговому циліндрі вона набуває форми поверхні обертання відносно вертикальної осі z. Нехай $z = f(r)$ – рівняння твірної стаціонарної вільної поверхні рідини, яку позначеної Σ. Потенціальну енергію обмеженого об'єму капілярної рідини визначаються так:

$$\Pi = 2\pi \int_0^1 \Big(\sigma\sqrt{1+\Big(\frac{\partial f}{\partial r}\Big)^2} + \frac{\rho g}{2} f^2\Big) r dr + 2\pi 2\pi(\sigma_2 - \sigma_1) f(1),$$

де σ — коефіцієнт поверхневого натягу на межі розділу рідина–газ, σ_2 — коефіцієнт поверхневого натягу на межі розділу тверда стінка–газ, σ_1 — коефіцієнт поверхневого натягу на межі розділу рідина–тверда стінка, ρ — густина рідини, g — прискорення сил земного тяжіння, (r, θ, z) — циліндрична система координат. На підставі принципу, що в стані рівноваги потенціальна енергія набуває мінімального значення, в праці [3] показано, що твірна осесиметричної вільної поверхні капілярної рідини описується диференціальним рівнянням

$$\frac{1}{r\,r'}\left(\frac{rz'}{\sqrt{r'^2+z'^2}}\right)' = bz + c \quad \left(' = \frac{d}{d\xi}\right), \tag{1}$$

де ξ — параметр, $r = r(\xi)$, $z = z(\xi)$ — параметричне рівняння твірної вільної поверхні рідини, $b = \dfrac{\rho\, g L^2}{\sigma}$ — число Бонда, L — характерний лінійний розмір посудини, в за який виберемо радіус циліндра, c — константа, що визначається в процесі побудови розв'язків задачі. Якщо за параметр ξ вибрати змінну r, то рівняння (1) приймає вигляд

$$\frac{1}{r}\left(\frac{rz'}{\sqrt{1+z'^2}}\right)' = bz + c. \tag{2}$$

Обираючи як параметр ξ довжину дуги s, одержуємо систему рівнянь:

$$\frac{1}{r}(rz')' = bz + c, \quad r'^2 + z'^2 = 1. \tag{3}$$

Оскільки константа c залишається невизначеною, то при $b \neq 0$ можна зробити заміну змінної: z

$$z(r) = f(r) - \frac{c}{b}. \tag{4}$$

В цьому разі рівняння (2) і (3) набудуть вигляду

$$\left(\frac{rf'}{\sqrt{1+(f')^2}}\right) = bfr, \tag{5}$$

$$(rz^{'})^{'} = bzc, \;\; r^{'2} + z^{'2} = 1. \tag{6}$$

У точці перетину твірної вільної поверхні рідини з твердою стінкою виконується умова Дюпре–Юнга; умова рівності кута змочування γ заданому:

$$\sigma \cos\gamma = \sigma_1 - \sigma_2.$$

У випадку циліндричної порожнини маємо крайові умови для рівняння (5) у вигляді:

$$f' = 0 \text{ при } r = 0, \;\; f' = \operatorname{ctg}\gamma \text{ при } r = 1, \tag{7}$$

або крайові умови для системи рівнянь (6);

$$r(0) = 0, \;\; z^{'}(0) = 0, \;\; r^{'}(s_1) = \sin\gamma, \;\; r(s_1) = 1, \tag{8}$$

де значення параметра s_1 визначається в процесі побудови розв'язків задачі.

Зауважимо, що задача (5), (7), як відомо [3], пов'язана з її варіаційним формулюванням, згідно з яким функція $f(r)$ визначається як така, що надає мінімум функціоналу

$$F(f(r)) = \int\limits_0^1 r\sqrt{1+(f')^2}\,dr + \frac{b}{2}\int\limits_0^1 rf^2dr - \cos\gamma f(1), \tag{9}$$

на класі функцій інтегрованих з квадратом, разом з її першою похідною.

Окрім, виписаних рівнянь (5) або (6) і відповідних крайових умов (7) або (8), розв'язки задач повинні задовольняти умову рівності об'єму рідини заданому:

$$\int_0^1 rzdz = \frac{V_0}{2\pi} \text{ або } \int_0^{s_1} r(s)z(s)r'(s)ds = \frac{V_0}{2\pi}.$$

Задовольнити цю умову для циліндричної порожнини нескладно, якщо покласти $z = z + c$.

При невеликих значеннях числа Бонда розв'язок допоміжної задачі Коші для системи рівнянь (6) за початкових умовах

$$r = 0, z = z_0, r' = 1 \text{ при } s = 0$$

будуємо у вигляді степеневих рядів.

$$r(s) = \sum_{k=0}^{N} a_k s^{2k+1},\ z(s) = \sum_{k=0}^{N} b_k s^{2k},\ br(s)z(s) = \sum_{k=0}^{N} c_k s^{2k+1}. \qquad (10)$$

Коефіцієнти a_k і b_k визначаються за допомогою наступних рекурентних формул: $a_0 = 1,\ b_0 = z_0$,

$$c_k = b\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i},\ b_k = \sum_{i=0}^{k-1}\Big(\frac{(2i+1)a_i c_{k-i-1}}{4k^2} - \frac{ib_i a_{k-i}}{k}\Big), \qquad (11)$$

$$a_k = -\sum_{i=1}^{k}\frac{4i(k-i+1)b_i b_{k-i+1}}{4k+2} - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{(2i+1)(2k-2i+1)a_i a_{k-i}}{4k+2}.$$

Побудуємо аналітичне продовження для функцій, обчислених за (10):

$$r(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k}(s-s_i)^k,\ z(s) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{i,k}(s-s_i)^k,\ (i = 1, 2, ...). \qquad (12)$$

Коефіцієнти $a_{i,k},\ b_{i,k}$ і $c_{i,k}$ степеневого ряду

$$bzr = \sum_{k=0}^{N_1} c_{i,k}(s-s_i)^k$$

визначимо за рекурентними формулами

$$d_1 = 1,\ d_k = 0 \text{ при } k > 1,\ c_{m,k-1} = b\sum_{i=0}^{k-1} a_{m,i} b_{m,k-i-1},$$

$$b_{m,k+1} = \sum_{i=0}^{k-1}(i+1)\Big(\frac{a_{m,i+1}c_{m,k-i-1}}{k(k+1)a_{m,0}} - \frac{b_{m,i+1}a_{m,k-i}}{(k+1)a_{m,0}}\Big), \tag{13}$$

$$a_{m,k+1} = \frac{d_k}{2a_{m,0}} - \sum_{i=0}^{k-1}(i+1)\Big(\frac{b_{m,i+1}c_{m,k-i-1}}{k(k+1)a_{m,0}} + \frac{a_{m,i+1}a_{m,k-i}}{(k+1)a_{m,0}}\Big).$$

Швидкість збіжності рядів (10) і (12) залежить від значень числа Бонда та z_0 в початковій умові. У разі збільшення числа Бонда виникає необхідність збільшувати кількість аналітичних продовжень (12). Значення z_0 дорівнює подвійній середній кривизні вільної поверхні в її центрі. При великих значеннях числа Бонда ця кривизна дуже мала (порядку 10^{-24}) і не може бути визначальним критерієм шуканої форми вільної поверхні рідини серед множини рівноважних форм. У цьому випадку застосовується інший критерій.

Розглянемо розв'язок рівняння (5) за крайових умовах:

$$f = 0 \text{ при } r = 0,\ f' = \varepsilon \text{ при } r = a,\ \text{ де } a < 1.$$

Очевидно, що функція $f(r)$ та її похідна $f'(r)$ на відрізку [0;a] є монотонно зростаючими, причому $f'(r)$ набуває всіх значень від 0 до ε при $r = a$. При фіксованих значеннях кута γ і числа ε є таке $r = a$ $(0 < a < 1)$, що $f'(a) = \varepsilon$. Значення $f(r)$ на відрізку $[0; a]$ можна визначити як функцію, що надає мінімум функціоналу

$$F_1(a, f(r)) = \int_0^a r\sqrt{1+(f')^2}\, dr + \frac{b}{2}\int_0^a rf^2 dr - \frac{\varepsilon a f(a)}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}. \tag{14}$$

Якщо значення ε достатньо мале, то відповідно значення функції $\dfrac{df(r)}{dr}$ на відрізку $[0; a]$ не перевищують ε, а функціонал $F_1(a, f(r))$ з точністю до членів другого порядку малості можна замінити функціоналом

$$F_2(a, f(r)) = \int_0^a r\left(1 + \frac{1}{2}(f')^2\right) dr + \frac{b}{2}\int_0^a rf^2 dr - \varepsilon a f(a). \tag{15}$$

Функція $f_0(r)$, яка надає мінімум цьому функціоналу, задовольняє рівняння

$$-\frac{d}{dr}\left(r\frac{df_0}{dr}\right) + brf_0 = 0$$

і крайові умови

$$\frac{df_0}{dr} = 0 \text{ при } r = 0, \;\; \frac{df_0}{dr} = \varepsilon \text{ при } r = a.$$

Отже, $f_0(r) = \dfrac{\varepsilon I_0(\sqrt{b}\, r)}{\sqrt{b}\, I_1(\sqrt{b} a)}$. Для визначення форми вільної поверхні рідини, а значить і функції $f_0(r)$, за заданих значень числа Бонда, кута змочування γ і числа ε нам потрібно знати значення параметра a. Припустивши, що значення a задано, обчислимо значення похідних $\dfrac{dz}{ds}$ і $\dfrac{dr}{ds}$ у точці $r = a$:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{df_0}{dr}\frac{dr}{ds} = \varepsilon \cos\beta = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}},$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin\beta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}},$$

де β — кут нахилу дотичної до твірної.

Тоді як початкові умови можна прийняти наступні

$$r = r_0 = a, \;\; z = z_0 = \frac{\varepsilon I_0(\sqrt{b}\, a)}{\sqrt{b}\, I_1(\sqrt{b}\, a)}, \;\; r' = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}, \;\; z' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}. \quad (16)$$

Коефіцієнти $a_{m,k}$ і $b_{m,k}$ визначають за наведеними вище рекурентними формулами (13). Перші два коефіцієнти $a_{m,k}$ і $b_{m,k}$, $k = 0, 1$, знаходять за допомогою степеневих рядів (10) $(m = 1)$, (12) $(m \geq 2)$ і при $s = s_{m-1}$.

Тепер за побудованими функціями $r(s)$ і $z(s)$ за заданого a, визначаємо те значення s^*, для якого $r'(s^*) = \sin\gamma$. Застосовуючи метод хорд, знаходимо таке значення параметра a, за якого $r(s^*) = 1$ у відповідності до (8). Цим завершується побудова форми рівноваги капілярної рідини в круговому циліндричному резервуарі.

2. Крайові задачі для визначення потенціалу швидкостей

Розглянемо задачу про поступальний рух циліндричного резервуара з рідиною в потенціальному полі масових сил за заданим законом

$u(t)$ у напрямку, перпендикулярному до осі порожнини. Як відомо [1], рух рідини при цьому має потенціальний характер, а вектор абсолютної швидкості частинок рідини в рухомій системі координат $Oxyz$ визначається скалярною функцією $\Phi(x, y, z, t)$ так, що

$$\vec{v}_a = \nabla\Phi. \tag{17}$$

Потенціал швидкостей $\Phi(x, y, z, t)$, який описує абсолютний рух рідини в рухомій системі координат, і форму збуреної вільної поверхні знаходять як розв'язок нелінійної крайової задачі

$$\triangle\Phi = 0 \ \text{ в } \Omega,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \vec{v}\cdot\vec{\nu} \ \text{ на } S, \ \ \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \vec{v}\cdot\vec{\nu} + u_\nu \ \text{ на } \Sigma_1, \tag{18}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \nabla\Phi\cdot\vec{v} + U = 0 \ \text{ на } \Sigma_1,$$

де $\vec{\nu}$ — орт зовнішньої нормалі до поверхні області Ω, $\vec{v}$ — вектор поступательного руху циліндра, u_ν — відносна нормальна швидкість частинок вільної поверхні рідини, U — силова функція.

Якщо збурену вільну поверхню рідини задано в неявному вигляді рівнянням $\zeta(x, y, z, t) = 0$ чи $\zeta(z, r, \theta, t) = 0$, то відносну швидкість u_ν визначаються за формулою

$$u_\nu = -\frac{\zeta_t}{\sqrt{(\nabla\zeta)^2}}.$$

Надалі рівняння збуреної вільної поверхні $\Sigma_1(t)$ в рухомій циліндричній системі координат (z, r, θ) будемо плдавати у вигляді

$$z = f(r) + h(r, \theta, t), \tag{19}$$

де $f(r)$ представляє статичну форму капілярної рідини.

Тут задачу для визначення потенціалу швидкостей Φ розглянемо в лінійній постановці і запишемо його у вигляді

$$\Phi = (\vec{v}, \vec{\Phi}_0) + \Phi, \tag{20}$$

де $\vec{\Phi}_0$ і Φ — гармонічні функції, які є розв'язками крайових задач

$$\triangle\vec{\Phi}_0 = 0 \ \text{ в } \Omega, \ \ \frac{\partial\vec{\Phi}_0}{\partial\nu} = \vec{\nu} \ \text{ на } \Sigma + S, \tag{21}$$

$$\triangle\Phi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = d(s)\frac{\partial h}{\partial t} \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 \text{ на } S, \tag{22}$$

де $h(s,\theta,t)$ — відхилення вільної поверхні по вертикалі, β — кут між віссю r і дотичною до Γ, $d(s) = \dfrac{dr(s)}{ds} = \cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}$.

З точністю до довільної сталої розв'язок задачі (21) має вигляд

$$\vec{\Phi}_0(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{23}$$

Якщо посудина здійснює поступальний рух в напрямку осі x-ів по закону $u(t)$, то тоді $(\vec{v},\vec{\Phi}_0) = \frac{du(t)}{dt}x$ і динамічна умова із (18) приймає вигляд

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + gh - \frac{\sigma}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rd^3\frac{\partial h}{\partial r}\right) + \frac{d}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}\right] + x\frac{d^2u(t)}{dt^2} = 0. \tag{24}$$

Крім того, функція $h(r,\theta,t)$ повинна задовольняти умову збереження кута змочування

$$\frac{\partial h}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 1.$$

Зауважимо, що при нульовому куті змочування ($\gamma = 0$), або при $\gamma = \pi$ (рідина не змочує тверду стінку) $d(1) = \sin\gamma = 0$ рівняння (24) вироджується і на функцію h ніяких умов при $r = 1$ не накладується.

Рівняння руху рідини і кінематичні умови мають вигляд

$$\triangle\Phi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = d\frac{\partial h}{\partial t} \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 \text{ на } S. \tag{25}$$

Крім виписаних вище рівнянь руху в початковий момент часу потрібно задати початкові умови, а саме: початкове збурення вільної поверхні $h_0(r,\theta)$ та вертикальну швидкість частинок вільної поверхні рідини $v_0(r,\theta) = \dfrac{\partial h}{\partial t}$ на Σ. По значенню $v_0(r,\theta)$ можна знайти розподіл швидкостей в початковий момент часу.

3. Власні коливання капілярної рідини в циліндрі

Для побудови розв'язків задачі Коші використовують розв'язок задачі про власні коливання рідини в нерухомій посудині, тобто при $u(t) = 0$, коли функції $\Phi(z,r,\theta,t)$ і $h(r,\theta,t)$ мають вигляд

$$\Phi(z,r,\theta,t) = \cos\omega t\,\Phi(z,r)\cos m\theta, \quad h(r,\theta,t) = \sin\omega t\,h(r)\cos m\theta.$$

Для визначення функцій $\Phi(z,r,\theta)$ і $h(r,\theta)$ одержуємо спектральну задачу

$$\begin{gathered}\triangle_m \Phi = 0 \ \text{ в } G, \ \ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \ \text{ на } L, \ \ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \varkappa dh \ \text{ на } \Gamma, \\ -\frac{1}{b}\left[\frac{d}{dr}\left(rd^3\frac{dh}{dr}\right) - \frac{m^2 dh}{r}\right] + h = \varkappa\varphi, \ \ \frac{dh}{dr} = 0 \ \text{ при } \ r = 1,\end{gathered} \tag{26}$$

де $\varkappa = \dfrac{\omega L^{1/2}}{g^{1/2}}$, ω — частота власних коливань.

Як показано в праці [5], справедлива наступна теорема:

Теорема 3.1. *Найменше за модулем власне значення задачі (26) визначається як мінімум абсолютної величини функціонала*

$$K(\varphi,h) = \frac{1}{2\int\limits_\Gamma r\varphi h\, dr}\left\{\int\limits_G \left[r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 + \frac{m^2}{r}\varphi^2\right] dG + \right.$$

$$\left. + \int\limits_\Gamma \frac{1}{b}\left[rd^3\left(\frac{dh}{dr}\right)^2 + \frac{m^2 d}{r}h^2 + rh^2\right] dr\right\} \tag{27}$$

на класі функцій $\varphi \in w^1_{2,r}(G)$ і $h \in w^1_{2,r}(\Gamma)$, які задовольняють умови

$$\int\limits_\Gamma r\varphi\, dr = 0, \ \ \int\limits_\Gamma rh\, dr = 0. \tag{28}$$

Наступне позитивне n-не власне значення задачі (26) визначається як мінімум абсолютної величини функціонала на класі означених вище функцій, які задовольняють умови ортогональності до перших $(n-1)$ власних функцій:

$$\int\limits_\Gamma r\varphi N_i\, dr = 0, \ \ \int\limits_\Gamma r\varphi_i N\, dr = 0, \ \ (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{29}$$

4. Метод Рітца

Для мінімізації функціонала (27) функції φ і h подамо у вигляді скінчених сум

$$\varphi(z,r) = \sum_{k=1}^N a_k w_k(z,r), \ \ h(r) = \sum_{k=1}^N b_k p_k(r), \tag{30}$$

де $\{w_k(z,r)\}_{k=1}^{\infty}$ — система функцій, які задовольняють рівняння

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+r\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{m^2}{r}\varphi=0,$$

а $\{p_k(r)\}_{k=1}^{\infty}$ — система функцій повна в просторі $L_2[0,1]$. В якості функцій $p_k(r)$ вибиралися функції, які виражаються через многочлени Якобі.

Для визначення коефіцієнтів a_i і b_i одержуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{M}\alpha_{i,j}a_j &\quad - \quad \sqrt{\lambda}\sum_{j=1}^{M_1}\gamma_{i,j}b_j=0,\ (i=1,..M),\\ \sum_{j=1}^{M}\gamma_{j,i}a_j &\quad - \quad \sqrt{\lambda}\sum_{j=1}^{M_1}\beta_{i,j}b_j=0,\ (i=1,..M_1),\end{aligned}\tag{31}$$

де

$$\alpha_{i,j}=\int_{L+\Gamma}rw_i^m\frac{\partial w_j^m}{\partial\nu}dr,\quad \gamma_{i,j}=\int_{\Gamma}rw_i^m f_j dr,$$

$$\beta_{i,j}=\int_{\Gamma}\Big(\frac{rd^3}{b}\frac{df_i}{dr}\frac{df_j}{dr}+(\frac{m^2d}{br}+r)f_if_j\Big)dr+\frac{\mu}{b}r(s_1)f_i(s_1)f_j(s_1).$$

Вводячи позначення для матриць коефіцієнтів:

$$A=(\alpha_{i,j}),\ B=(\beta_{i,j}),\ C=(\gamma_{i,j}),$$

запишемо задачу (31) у вигляді

$$\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\sqrt{\kappa}\begin{pmatrix}0 & C\\ C^* & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}.\tag{32}$$

Тут C^* — транспонована до C матриця, X і Y — вектор стовпчики коефіцієтів a_i і b_i.

При великих значеннях числа Бонда для обчислення коефіцієнтів матриць A,B і C використано метод Гауса. При цьому окремо вираховуються квадратури на ділянках, де вільна поверхня визначається асимптотичним виразом та за допомогою степеневих рядів.

Оскільки зовнішні збурення мають характер $xu(t)=r\cos\theta u(t)$, функції $\Phi(z,r,\theta,t)$ і $=h(r,\theta,t)$ мають вигляд

$$\Phi(z,r,\theta,t)=\Phi(z,r,t)\cos\theta \text{ і } h(r,\theta,t)=h(r,t)\cos\theta,$$

а динамічна умова на лінії Γ набувають вигляду

$$r\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{b}\left[\frac{d}{dr}\left(rd^3\frac{dh}{dr}\right) - \frac{m^2 d}{r}h\right] + rh + \frac{d^2u}{dt^2}r^2 = 0. \qquad (33)$$

Функції $\Phi(z,r,t)$ і $h(r,t)$ подамо так

$$\Phi(z,r,t) = \sum_{h=1}^{N}\dot{p}_n(t)\varphi_n(z,r), \quad h(r,t) = \sum_{h=1}^{N}p_n(t)h_n(r). \qquad (34)$$

Помноживши рівняння (33) на функції $h_i(r)$ і проінтегрувавши по лінії Γ, одержуємо такі диференціальні рівняння для визначення функцій $p_n(t)$:

$$\sum_{n=1}^{N}\ddot{p}_n(t)\int\limits_{\Gamma} r\varphi_n h_i\,dr + \int\limits_{\Gamma}\left[\left(\frac{1}{b}rd^3\frac{dh_n}{dr}\frac{dh_i}{dr} + \frac{m^2 d}{br}h_n\,h_i\right) + \right.$$

$$\left. + rh_n\,h_i\right]dh + \frac{d^2u}{dt^2}\int\limits_{\Gamma} r^2 h_i\,dr. \qquad (35)$$

Враховуючи умови ортогональності

$$\int\limits_{\Gamma} r\,\varphi_n\,h_i\,dr = 0, \quad \text{якщо} \quad n \neq i, \qquad (36)$$

$$\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{rd^3}{b}\,\frac{dh_n}{dr}\,\frac{dh_i}{dr} + \frac{m^2 d}{br}h_n\,h_i + rh_n h_i\right)dr = 0, \;\; \text{якщо} \;\; n \neq i, \qquad (37)$$

одержуємо послідовність диференціальних рівнянь для визначення функцій $p_n(t)$:

$$\mu_n\ddot{p}_n + \gamma_n p_n + \lambda_n\ddot{u} = 0, \qquad (38)$$

де

$$\mu_n = \int\limits_{\Gamma} r\varphi_n h_n dr, \quad \lambda_n = \int\limits_{\Gamma} r^2 h_n\,dr,$$

$$\gamma_n = \int\limits_{\Gamma}\left[\frac{rd^3}{b}\left(\frac{dh_n}{dr}\right)^2 + \frac{m^2 d}{br}h_n^2 + rh_n^2\right]dr. \qquad (39)$$

Таблиця 1. $bond = 20$

n	γ	κ_n	μ_n	γ_n	λ_n	m_n
1	15	2.159113	0.148405	0.320423	0.241793	0.393947
2	15	12.046486	0.032773	0.394799	0.012629	0.004867
3	15	33.978533	0.015408	0.523537	0.000724	0.000034
1	30	1.866879	0.155129	0.289607	0.249239	0.400441
2	30	11.244140	0.033238	0.373733	0.007177	0.001550
3	30	33.098168	0.015335	0.507568	-0.001028	0.000069
1	45	1.663992	0.152961	0.254526	0.249915	0.408322
2	45	11.213470	0.032504	0.364485	0.005987	0.001103
3	45	34.525743	0.014887	0.513993	-0.000286	0.000006
1	60	1.776935	0.149803	0.266190	0.249668	0.416107
2	60	11.893901	0.031550	0.375248	0.010894	0.003761
3	60	36.872322	0.014455	0.532992	0.002179	0.000329
1	75	1.945701	0.145877	0.283833	0.248523	0.423396
2	75	12.547476	0.030742	0.385739	0.016203	0.008540
3	75	38.731687	0.014135	0.547489	0.004671	0.001544

Таблиця 2. $bond = 100$

n	γ	κ_n	μ_n	γ_n	λ_n	m_n
1	15	1.890462	0.141119	0.266780	0.242318	0.416090
2	15	6.847332	0.031083	0.212835	0.018534	0.011051
3	15	14.528339	0.014503	0.210708	0.004517	0.001407
1	30	1.761325	0.146213	0.257529	0.248756	0.423214
2	30	6.515615	0.032004	0.208527	0.014459	0.006533
3	30	13.938796	0.014801	0.206308	0.002334	0.000368
1	45	1.647212	0.145135	0.239067	0.249583	0.429200
2	45	6.311771	0.031959	0.201719	0.011328	0.004015
3	45	13.736535	0.014697	0.201886	0.001392	0.000132
1	60	1.696696	0.144582	0.245312	0.249585	0.430846
2	60	6.485444	0.031370	0.203448	0.014326	0.006542
3	60	14.101238	0.014415	0.203268	0.003137	0.000683
1	75	1.771773	0.143358	0.253997	0.248538	0.430889
2	75	6.707763	0.030709	0.205985	0.017957	0.010501
3	75	14.505130	0.014143	0.205149	0.005195	0.001908

У таблицях 1–6 наведено результати обчислень власних значень задачі (26) при різних значеннях кута змочування γ, а також відповідні значення коефіцієнтів рівнянь (28), визначених за формулами (29).

Як бачимо, значення коефіцієнтів диференціальних рівнянь стабілізуються зі зростанням числа Бонда, тобто зі зменшенням коефіцієнта поверхневого натягу при фіксованих значеннях розміру циліндра, або із збільшенням розмірів циліндра при фіксованому значенні коефіцієнта поверхневого натягу.

При невеликих значеннях числа Бонда сутт'єво збільшуються власні значення задачі (31). Особливо це стосується другого та третього значення κ_i. Кут змочування слабше впливає на значення κ_i, однак зауважимо, що мінімальні значення κ_i одержано при $\gamma = 45$ градусів.

Таблиця 3. $bond = 300$

n	γ	κ_n	μ_n	γ_n	λ_n	m_n
1	15	1.828389	0.139595	0.255234	0.243060	0.423210
2	15	5.882867	0.030357	0.178587	0.020438	0.013760
3	15	10.171591	0.013170	0.133965	0.001886	0.000270
1	30	1.752812	0.143575	0.251660	0.248288	0.429373
2	30	5.696974	0.031206	0.177779	0.017951	0.010326
3	30	10.309275	0.014491	0.149393	0.004392	0.001331
1	45	1.682073	0.142844	0.240273	0.249122	0.434473
2	45	5.549192	0.031345	0.173938	0.015459	0.007624
3	45	10.109759	0.014537	0.146962	0.003125	0.000672
1	60	1.709199	0.142955	0.244339	0.249132	0.434171
2	60	5.641187	0.031002	0.174889	0.017120	0.009454
3	60	10.272574	0.014341	0.147320	0.004319	0.001301
1	75	1.751147	0.142546	0.249619	0.248301	0.432515
2	75	5.765048	0.030541	0.176073	0.019179	0.012044
3	75	10.480941	0.014115	0.147934	0.005789	0.002374

У таблицях 5-6 наведено результати обчислень власних значень задачі та значень коефіцієнтів диференціальних рівнянь (38) для великих значень числа Бонда. Зауважимо, що при $b = \infty$, тобто за відсутності сил поверхневого натягу маємо такі власні значення задачі $\kappa_1 = 1.750797574$, $\kappa_2 = 5.33119329$, $\kappa_3 = 8.53631571$.

Таблиця 4. $bond = 1000$

n	γ	κ_n	μ_n	γ_n	λ_n	m_n
1	15	1.794560	0.139384	0.250133	0.243967	0.427019
2	15	5.538141	0.029930	0.165758	0.020894	0.014586
3	15	9.216552	0.013897	0.128085	0.006918	0.003443
1	30	1.751206	0.142441	0.249444	0.247909	0.431467
2	30	5.434884	0.030608	0.166351	0.019648	0.012613
3	30	9.045530	0.014232	0.128739	0.005900	0.002446
1	45	1.711351	0.141934	0.242899	0.248524	0.435161
2	45	5.345130	0.030781	0.164527	0.018254	0.010825
3	45	8.910308	0.014335	0.127726	0.004950	0.001710
1	60	1.725199	0.142220	0.245358	0.248558	0.434404
2	60	5.389176	0.030626	0.165047	0.018962	0.011741
3	60	8.990688	0.014218	0.127827	0.005560	0.002174
1	75	1.747241	0.142156	0.248380	0.248033	0.432766
2	75	5.451052	0.030368	0.165538	0.019881	0.013015
3	75	9.098381	0.014058	0.127902	0.006325	0.002846

Таблиця 5. $bond = 3000$

n	γ	κ_n	μ_n	γ_n	λ_n	m_n
1	15	1.777816	0.139628	0.248233	0.244727	0.428933
2	15	5.427624	0.029837	0.161945	0.020795	0.014493
3	15	8.804918	0.013818	0.121662	0.007049	0.003596
1	30	1.750912	0.142081	0.248771	0.247742	0.431981
2	30	5.365194	0.030344	0.162801	0.020121	0.013342
3	30	8.702236	0.014072	0.122456	0.006474	0.002978
1	45	1.727761	0.141682	0.244793	0.248094	0.434429
2	45	5.312465	0.030475	0.161897	0.019380	0.012324
3	45	8.619341	0.014165	0.122092	0.005926	0.002479
1	60	1.735324	0.141963	0.246352	0.248163	0.433807
2	60	5.334258	0.030409	0.162210	0.019695	0.012756
3	60	8.659285	0.014103	0.122122	0.006200	0.002726
1	75	1.747673	0.142008	0.248184	0.247866	0.432635
2	75	5.366568	0.030272	0.162459	0.020129	0.013385
3	75	8.715404	0.014006	0.122069	0.006565	0.003077

Таблиця 6. $bond = 10000$

n	γ	κ_n	μ_n	γ_n	λ_n	m_n
1	15	1.767091	0.139990	0.247375	0.245404	0.430195
2	15	5.378265	0.029873	0.160665	0.020628	0.014244
3	15	8.645106	0.013810	0.119393	0.006982	0.003530
1	30	1.750829	0.141948	0.248527	0.247672	0.432138
2	30	5.341370	0.030232	0.161480	0.020265	0.013584
3	30	8.585767	0.013987	0.120090	0.006669	0.003180
1	45	1.738191	0.141616	0.246155	0.247795	0.433584
2	45	5.312764	0.030306	0.161011	0.019890	0.013054
3	45	8.540494	0.014048	0.119976	0.006392	0.002908
1	60	1.742117	0.141858	0.247133	0.247893	0.433188
2	60	5.323031	0.030286	0.161213	0.020030	0.013247
3	60	8.558561	0.014022	0.120009	0.006505	0.003018
1	75	1.748729	0.141939	0.248213	0.247759	0.432471
2	75	5.339262	0.030221	0.161360	0.020234	0.013548
3	75	8.585909	0.013973	0.119971	0.006669	0.003183

5. Висновки

Показано, що формування математичних моделей динаміки твердих тіл з рідиною на засадах теорії подібності (критерій Бонда) має великі переваги над іншими підходами, в яких врахування сил поверхневого натягу ігнорується. Використовуваний тут безрозмірний комплекс (число Бонда $b = \dfrac{\rho g L^2}{\sigma}$) включає всебе один геометричний і три фізичних параметри при фіксованих кутах змочування γ, що дає змогу одержати низку змістовних висновків щодо залежностей динамічних характеристик руху рідини (частот вільних коливань і приєднаних мас μ_n, λ_n, $m_n = \lambda_n^2/\mu_n$) від зміни числа Бонда. Як видно із наведених таблиць, числові значення цих динамічних характеристик стабілізуються зі зростанням числа Бонда, тобто зі зменшенням поверхневого натягу за фіксованих значень розміру циліндра або зі збільшенням розмірів циліндра за фіксованого значення коефіцієнта поверхневого натягу. Це дає можливість теоретично знаходити критичні значення лінійних розмірів резервуарів, для яких традиційні методи визначення динамічних характеристик рідини ще можна застосовувати. Особливо зазначимо, що неврахування цих обставин призводить часто до невірних тлумачень експериментальних результатів, одержаних з використанням невеликих резервуарів.

[1] *Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. — Киев: Наук. думка, 1984. — 232 с.

[2] *Луковский И.А.* Определение динамических характеристик жидкости в подвижном сосуде, находящемся в условиях слабого гравитационного поля, методом разложения по собственным функциям // Матем. физика. — Киев: 1972, — Вып. 11. — С. 57–64.

[3] *Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Тюпцов А.Д.* Гидромеханика невесомости. — М.: Наука, 1976. — 504 с.

[4] *Барняк М.Я.* Вариационные формулировки задачи о малых колебаниях жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости // Динамика и устойчивость управляемых систем. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. — С. 74–83.

[5] *Барняк М.Я., Луковський І.О.* Побудова розв'язків крайових задач статики і динаміки капілярної рідини в циліндричній посудині // Аналітична механіка та її застосування: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **9**, № 1. — С. 68–81.