Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 4, 54–67

УДК 517.52

Багатовимірне узагальнення овальної теореми для періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду

Д.І. Боднар, М.М. Бубняк

Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль; bodnar4755@ukr.net, mariabubnyak@gmail.com

$\overrightarrow{p}$-periodic branched continued fractions of the special form are defined. The multidimentional analog of the convergence oval theorem is proved and truncation error bounds are established if elements of this fractions belong to the oval regions and parameters of this regions satisfied some conditions. Values of $\overrightarrow{p}$-periodic branched continued fraction are investigated.

Определены $\overrightarrow{p}$-периодические ветвящиеся цепные дроби специального вида. Установлен многомерный аналог овальной теоремы сходимости, на основании которой получены оценки сходимости в овальных областях при некоторых дополнительных условиях на параметры этих областей. Исследованы значения, к которым сходятся $\overrightarrow{p}$-периодические ветвящиеся цепные дроби специального вида.

1. Вступ

Нехай

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \dots \tag{1}$$

є неперервним дробом з комплексними елементами. При дослідженні множин збіжності цього дробу використовують множини елементів та множини значень. Для заданої послідовності множин $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ із

$\widehat{\mathbb{C}}$ визначимо послідовність множин $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ за допомогою співвідношень: $\Omega_n = \{(a_n, b_n) \in \mathbb{C}^2 : a_n/(b_n + V_n) \subseteq V_{n-1}\}$. Послідовність $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ називають послідовністю множин елементів дробу (1), яка відповідає послідовності множин значень $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ [14, с. 70]. Окрім того, якщо умови $(a_n, b_n) \in \Omega_n$, $n \geq 1$, гарантують збіжність неперервного дробу, то Ω_n, $n \geq 1$, називають множинами збіжності. Якщо $\Omega_n = \Omega$, $n \geq 1$, то множину Ω називають простою множиною збіжності. У 1865 р. Worpitsky довів, що круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/4\}$ є простою множиною збіжності неперервного дробу (1), де $b_n = 1$, $n \geq 0$. R. Lane у 1945 р. встановив, що послідовності кругів V_n, де $V_n = \{z \in \mathbb{C} : |z - \Gamma_n| \leq \rho_n\}$ $|\Gamma_n| < \rho_n$, $n \geq 0$, відповідає послідовність овальних множини елементів Ω_n, де $\Omega_n = \{(a_n, b_n) \in \mathbb{C}^2 : |a_n(\overline{b}_n + \overline{\Gamma}_n) - \Gamma_n(|b_n + \Gamma_n|^2 - \rho_n^2)| + |a_n|\rho_n \leq \rho_{n-1}(|b_n + \Gamma_n|^2 - \rho_n^2)\}$. Овальні множини збіжності досліджували H.L. Hillam, W.J. Thron [9], W.B. Jones, W.J. Thron [11], H. Waadeland [16], L. Lorentzen [14] та ін. Детальний огляд геометричних властивостей овальної області подано у [10]. У працях [8, 14] особливої уваги варте застосування овальної теореми для встановлення оцінок швидкості збіжності дробу (1).

Огляд досліджень, які стосуються овальної теореми, наведено у працях [11, 14, 15, 17].

Періодичні дроби є важливий підклас неперервних дробів. Дріб (1) називають p-періодичним, якщо послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ є p-періодичними ($p \geq 1$), тобто $a_{n+p} = a_n$, $b_{n+p} = b_n$, $n \geq 1$. D. Bernoulli, E. Galois, O. Stolz, R. Lane, H.S. Wall, T. Tile, A. Pringsheim, O. Perron та інші досліджували питання збіжності цих дробів. Ознаки збіжності для періодичних неперервних дробів часто формулюють, використовуючи нерухомі точки дробово-лінійного відображення.

Розглянемо дробово-лінійне відображення $t(\omega) = \dfrac{a\omega + b}{c\omega + d}$, де a, b, c, d, $\omega \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$. Воно має дві нерухомі точки x та y. Точку x називають притягувальною (attracting), якщо $t^n(\omega) = t(t^{n-1}(\omega)) \to x$ при $n \to \infty$ для всіх $\omega \neq y$. Тоді y – відштовхувальна (repelling) точка цього відображення. Розглянемо відношення $k = \dfrac{cy + d}{cx + d}$. Якщо $|k| < 1$, то $t(\omega)$ називають дробово-лінійним відображенням локсодронічного типу, якщо $|k| = 1$ – еліптичного, а $k = 1$ – параболічного типу [14, с. 175]. Узагальненням періодичних дробів є гранично-періодичні неперервні дроби. Дріб

$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\mathrm{D}}} \dfrac{a_n}{b_n}$ називають граничним-p-періодичним, якщо виконуються умови: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{np+m} = a_m^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_{np+m} = b_n^*$, $m = \overline{1,p}$. Скінченні дроби вигляду

$$h_n = b_n + \frac{a_n|}{|b_{n-1}} + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-2}} + \ldots + \frac{a_2|}{|b_1}, \quad n \geq 1, \quad b_0 = 1,$$

називають зворотними (reversed) дробами гранично-періодичного неперервного дробу [14, с. 48]. Ознаки збіжності періодичних та гранично-періодичних неперервних дробів наведено в [14, 15, 17].

2. Означення та позначення

Гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) з N гілками розгалуження означив В. Я. Скоробогатько. Задача відповідності між такими дробами і кратними степеневими рядами спонукала до появи двовимірних неперервних дробів (J. A. Murphy, M. O'Donohoe, Х. Й. Кучмінська, W. Siemaszko, A. Cuyt, О. М. Сусь та ін.). Труднощі при переході до n змінних зумовили появу ГЛД з нерівнозначними змінними. Такі дроби при фіксованих значеннях змінних назвали ГЛД спеціального вигляду:

$$\left(1 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \tag{2}$$

де $a_{i(k)} \in \mathbb{C}$, $i(k) \in I$, $I = \{i_1 i_2 \ldots i_k\colon 1 \leq i_k \leq i_{k-1}; k \geq 1; i_0 = N\}$, N – фіксоване натуральне число. Їх дослідженням займалися Д. І. Боднар, Т. М. Антонова, Р. І. Дмитришин, О. Є. Баран та інші [1–5].

Дріб (2) назвемо $\overrightarrow{p}$-періодичним гіллястим ланцюговим дробом спеціального вигляду, де $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ і $p_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,N}$, якщо елементи цього дробу задовольняють умови: $a_{\underbrace{r\ldots r}_{q}} = a_{\underbrace{r\ldots r}_{s}}$, де $q \geq 1$ і $q = np_r + s$, $r = \overline{1,N}$, $1 \leq s \leq p_r$, і $a_{i(m)\underbrace{r\ldots r}_{q}} = a_{\underbrace{r\ldots r}_{s}}$, де $m \geq 1$, $i(m) \in I$, $r < i_m$.

Позначимо $a_{\underbrace{r\ldots r}_{s}} = c_{r,s}$. Тоді дріб (2) можна записати у вигляді

$$\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k,s}}{1}\right)^{-1}, \tag{3}$$

причому значення s, що залежать від поверху k та періоду p_{i_k}, одержуємо з наступних розкладів: $k = p_{i_k}n + s$, якщо $i_1 = i_2 = \ldots = i_k$, або $k - m = p_{i_k}n + s$, якщо $i_1 \geq i_2 \geq \ldots \geq i_m > i_{m+1} = \ldots = i_k$, $n \geq 0$.

Визначимо рекурентно залишки дробу (3):

$$R_n^{(1,j)} = 1 + \frac{c_{1,j+1}}{R_{n-1}^{(1,j+1)}}, \quad R_n^{(q,j)} = 1 + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{c_{k,1}}{R_{n-1}^{(k,2)}} + \frac{c_{q,j}}{R_{n-1}^{(q,j+1)}} \tag{4}$$

за початкових умов: $R_0^{(q,j)} = 1$, $q = \overline{1,N}$, $j \geq 1$. Назвемо $R_n^{(q,j)}$ – j-м залишком q-ї гілки n-го порядку. Вираз $F_n = \left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k,s}}{1}\right)^{-1}$, $n \geq 1$, $F_0 = 1$, називають n-м підхідним дробом $\overrightarrow{p}$-періодичного дробу (3), зокрема $F_n = \left(R_n^{(N,1)}\right)^{-1}$.

Для залишків $\overrightarrow{p}$-періодичного ГЛД виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} R_n^{(q,m)} &= R_n^{(q,s)} \quad (m = r_q p_q + s; 1 \leq s \leq p_q), \\ R_n^{(q,m)} &= R_n^{(q-1,1)} + \frac{c_{q,m}}{R_{n-1}^{(q,m+1)}} \quad (m + 1 \leq p_q). \end{aligned} \tag{5}$$

3. Основні результати

Встановимо формулу різниці двох підхідних дробів $\overrightarrow{p}$-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду.

Розглянемо p_j-періодичний неперервний дріб ($j = \overline{1,N}$), який є деякою гілкою дробу (3),

$$1 + \frac{c_{j,1}|}{|1} + \frac{c_{j,2}|}{|1} + \ldots + \frac{c_{j,p_j}|}{|1} + \frac{c_{j,1}|}{|1} + \ldots \tag{6}$$

Нехай $r_{j,s}$ – кількість повторів елемента $c_{j,s}$ у k_j-підхідному дробі неперервного дробу (6). Якщо $k_j = \lambda_j p_j + l_j$ $(0 \le l_j \le p_j - 1)$, то

$$r_{j,s} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } k_j = 0, \\ \lambda_j + 1, \text{ якщо } l_j \le p_j - 1, \\ \lambda_j, \text{ якщо } l_j = 0. \end{cases}$$

Очевидно, що $k_j = \sum_{s=1}^{p_j} r_{j,s}$. Визначимо множину індексів

$$J_{n+1}^{(N)} = \{k_1, k_2, \ldots, k_N : k_j \ge 0, \sum_{j=1}^{N} k_j = n+1\}, \quad n \ge 0.$$

Лема 3.1. *За умови, що* $R_n^{(q,j)} \ne 0$, $q = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,p_q}$, $n \ge 1$, *справджується формула різниці двох підхідних дробів ГЛД (3):*

$$F_{n+m} - F_n = \frac{(-1)^{n+1}}{R_{n+m}^{(N,1)} \cdot R_n^{(N,1)}} \sum_{k \in J_{n+1}^{(N)}} \prod_{i=1}^{N} \frac{c_{i,1}^{r_{i,1}} \ldots c_{i,p_i}^{r_{i,p_i}}}{\prod_{j=1}^{k_i+1} \left(R_{m+l_i-j}^{(i,j+1)} \widehat{R}_{l_i-j}^{(i,j+1)} \right)}, \quad (7)$$

де $n \ge 0$, $m \ge 1$, $l_i = n - \sum_{t=i+1}^{N} k_t$, $\widehat{R}_n^{(i,j)} = R_n^{(i,j)}$, *якщо* $n \ge 0$, *і* $\widehat{R}_{-1}^{(i,j)} = 1$.

Доведення. Послідовно застосовуючи формули (5), отримуємо

$$R_{m+n-k}^{(\nu+1,j)} - R_{n-k}^{(\nu+1,j)} = \sum_{q=0}^{n-k} \prod_{i=1}^{q} \frac{c_{\nu+1,j+i-1}}{R_{n+m-k-i}^{(\nu+1,j+i)} R_{n-k-i}^{(\nu+1,j+i)}} \times$$
$$\times \left(R_{n+m-k-q}^{(\nu,1)} - R_{n-k-q}^{(\nu,1)} \right) + \prod_{i=1}^{n-k+1} \frac{c_{\nu+1,j+i-1}}{R_{n+m-k-i}^{(\nu+1,j+i)} \widehat{R}_{n-k-i}^{(\nu+1,j+i)}},$$

де $m > 0$, $n > 0$, $0 \le k \le n$, $j = \overline{1, n-k}$, $\nu = \overline{1, N-1}$.

Оскільки $F_n = 1/R_n^{(N,1)}$, то

$$F_{n+m} - F_n = -\left(R_{n+m}^{(N,1)} - R_n^{(N,1)} \right) / \left(R_{n+m}^{(N,1)} R_n^{(N,1)} \right).$$

Використовуючи метод математичної індукції по q, доведемо, що

$$R_{n+m}^{(q,1)} - R_n^{(q,1)} = (-1)^n \sum_{k \in J_{n+1}^{(q)}} \prod_{l=1}^{q} \frac{c_{l,1}^{r_{l,1}} \ldots c_{l,p_l}^{r_{l,p_l}}}{\prod_{j=1}^{k_l+1} \left(R_{m+g_l-j}^{(l,j+1)} \widehat{R}_{g_l-j}^{(l,j+1)} \right)}. \quad (8)$$

Якщо $q = 1$, то $R_n^{(1,1)}$ – p_1-періодичний неперервний дріб. Враховуючи співвідношення (5) і рівності $R_k^{(1,p_1+1)} = R_k^{(1,1)}$, $k \geq 1$, маємо

$$R_{n+m}^{(1,1)} - R_n^{(1,1)} = \frac{(-1)^{\lambda_1 p_1} c_{1,1}^{\lambda_1} c_{1,2}^{\lambda_1} \dots c_{1,p_1}^{\lambda_1}}{\prod_{j=1}^{\lambda_1 p_1} \left(R_{n+m-j}^{(1,j+1)} R_{n-j}^{(1,j+1)} \right)} (R_{n+m-\lambda_1 p_1}^{(1,\lambda_1 p_1+1)} - R_{n-\lambda_1 p_1}^{(1,\lambda_1 p_1+1)}) =$$

$$= \dots = (-1)^n \frac{c_{1,1}^{r_{1,1}} \dots c_{1,p_1}^{r_{1,p_1}}}{\prod_{j=1}^{n+1} \left(R_{n+m-j}^{(1,j+1)} \widehat{R}_{n-j}^{(1,j+1)} \right)} \quad n, m > 0,$$

де $r_{1,j} = \lambda_1+1$, якщо $j \leq l_1+1$, $r_{1,j} = \lambda_1$ у решті випадків $n = \lambda_1 p_1 + l_1$, $0 \leq l_1 \leq p_1 - 1$, $j = \overline{1, p_1}$.

Припускаючи, що для $q = \nu$ виконується рівність (8), маємо

$$R_{n+m}^{(\nu+1,1)} - R_n^{(\nu+1,1)} = R_{n+m}^{(\nu,1)} - R_n^{(\nu,1)} +$$
$$+ \frac{-1 c_{\nu+1,1}}{R_{n+m-1}^{(\nu+1,2)} R_{n-1}^{(\nu+1,2)}} \left(R_{n+m-1}^{(\nu,1)} - R_{n-1}^{(\nu,1)} \right) + \dots +$$
$$+ \prod_{s=1}^{n} \frac{-c_{\nu+1,s}}{R_{n+m-s}^{(\nu+1,s+1)} R_{n-s}^{(\nu+1,s+1)}} \left(R_m^{(\nu,1)} - R_0^{(\nu,1)} \right) -$$
$$- \prod_{i=1}^{n+1} \frac{-c_{\nu+1,s}}{R_{n+m-s}^{(\nu+1,s+1)} \widehat{R}_{n-s}^{(\nu+1,s+1)}}.$$

Враховуючи періодичність уздовж $\nu+1 : c_{\nu+1,k_{\nu+1}} = c_{\nu+1,s_{\nu+1}}$, де $k_{\nu+1} = u_{\nu+1} p_{\nu+1} + s_{\nu+1}$ $(1 \leq s_{\nu+1} \leq p_{\nu+1})$, маємо

$$R_{n+m}^{(\nu+1,1)} - R_n^{(\nu+1,1)} = (-1)^n \sum_{k \in J_{n+1}^{(\nu)}} \prod_{i=1}^{\nu} \frac{c_{i,1}^{r_{i,1}} \dots c_{i,p_i}^{r_{i,p_i}}}{\prod_{j=1}^{k_\nu+1} \left(R_{m+l_i-j}^{(i,j+1)} \widehat{R}_{l_i-j}^{(i,j+1)} \right)} +$$
$$+ \frac{(-1)^n c_{\nu+1,1}}{R_{n+m-1}^{(\nu+1,2)} R_{n-1}^{(\nu+1,2)}} \sum_{k \in J_n^{(\nu)}} \prod_{i=1}^{\nu} \frac{c_{i,1}^{r_{i,1}} \dots c_{i,p_i}^{r_{i,p_i}}}{\prod_{j=1}^{k_\nu+1} \left(R_{m+l_i-j}^{(i,j+1)} \widehat{R}_{l_i-j}^{(i,j+1)} \right)} + \dots +$$
$$+ \frac{(-1)^n c_{\nu+1,1}^{r_{\nu+1,1}} \dots c_{\nu+1,p_{\nu+1}}^{r_{\nu+1,p_{\nu+1}}}}{\prod_{s=1}^{n+1} R_{n+m-s}^{(\nu+1,s+1)} \widehat{R}_{n-s}^{(\nu+1,s+1)}}.$$

Після елементарних перетворень одержимо формулу (8) при $q = \nu+1$. Використовуючи її для різниці залишків N-ї гілки, тобто $q = N$, одержуємо (7). □

Доведемо багатовимірне узагальнення овальної теореми для періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду.

Нехай існують скінченні границі $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(q,1)} = Z^{(q)}$, $q=\overline{1,N}$. Розглянемо дробово-лінійні відораження: $s^{(q,j)}(\omega) = Z^{(q-1)} + c_{q,j}/\omega$ і $t^{(q,j)}(\omega) = c_{q,j}/(Z^{(q-1)}+\omega)$, $j=\overline{1,p_q}$, $Z^{(0)}=1$ та їх композицію $S^{(q)}(\omega) = s^{(q,1)}\circ s^{(q,2)}\circ\ldots\circ s^{(q,p_q)}(\omega)$ і $T^{(q)}(\omega) = t^{(q,1)}\circ t^{(q,2)}\circ\ldots\circ t^{(q,p_q)}(\omega)$, $q=\overline{1,N}$. Позначимо $X^{(1)}$ – притягувальна нерухома точка дробово-лінійного відображення $S^{(1)}(\omega)$, $Y^{(q)}$ – відштовхувальні нерухомі точки відображень $T^{(q)}(\omega)$, $q=\overline{2,N}$.

Теорема 3.1. *Нехай елементи $c_{q,j}$, $q=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,p_q}$, $\overrightarrow{p}$-періодичного ГЛД (3) належать овальним областям*

$$\mathcal{O}_q = \left\{ z\in\mathbb{C} : |z-d_q| + |z|\frac{\rho_q^*}{|1+\overline{\Gamma}^*|} < \frac{\rho_q}{|\Gamma_q|}|d_q| \right\}, \quad q=\overline{1,N}, \tag{9}$$

де $\Gamma_q\in\mathbb{C}$, $\rho_q>0$, $|\Gamma_q|<\rho_q$ $(q=\overline{1,N})$, $d_q = \Gamma_q(1+\Gamma_q^*)\left(1-\dfrac{\rho_q^{*2}}{|1+\Gamma_q^*|^2}\right)$, $\Gamma_q^* = \sum_{j=1}^q \Gamma_j$, $\rho_q^* = \sum_{j=1}^q \rho_j$, $\rho_q^* < |1+\Gamma_q^*|$, $q=\overline{1,N}$.

Тоді

1. *Послідовності залишків* $\{R_n^{(q,1)}\}_{n=1}^{\infty}$, $q=\overline{1,N}$ *дробу збігаються. Зокрема, дріб (3) збігається.*
2. *Якщо дробово-лінійні відображення* $T^{(q)}(\omega)$, $q=\overline{2,N}$, *– локсодронічного типу, а* $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(q,1)} = Z^{(q)}$, *то*
$$Z^{(q)} = \begin{cases} X^{(1)}, & \textit{якщо } q=1, \\ -Y^{(q)}, & \textit{якщо } 2\le q\le N, \end{cases} \qquad q=\overline{1,N}$$
і $\lim\limits_{\nu\to\infty} F_n = F$, *де* $F = (Z^{(N)})^{-1}$.
3. *n-ні підхідні дроби ГЛД (3) належать кругу*
$$K = \left\{ z\in\mathbb{C} : \left| z - \frac{\Gamma_N^*}{|1+\Gamma_N^*|^2-\rho_N^{*2}} \right| \le \frac{\rho_N^*}{|1+\Gamma_N^*|^2-\rho_N^{*2}} \right\}.$$

Доведення. Нехай $\mathcal{B}(\Gamma_q,\rho_q) = \{z\in\mathbb{C} : |z-\Gamma_q|\le\rho_q\}$, $q=\overline{1,N}$, задані круги. Покажемо, що $R_n^{(q,j)}\in\mathcal{B}(1+\Gamma_q^*,\rho_q^*)$, $q=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,p_q}$,

$n \geq 1$. Очевидно, що $1 + \sum_{j=1}^{q} \mathcal{B}(\Gamma_j, \rho_j) = \mathcal{B}(1 + \Gamma_q^*, \rho_q^*)$, $q = \overline{1, N}$, і $0 \overline{\in} \mathcal{B}(1 + \Gamma_q^*, \rho_q^*)$. Позначимо через C та R відповідно центр та радіус круга $\dfrac{c_{q,j}}{\mathcal{B}(1 + \Gamma_q^*, \rho_q^*)}$. Умова $\dfrac{c_{q,j}}{\mathcal{B}(1 + \Gamma_q^*, \rho_q^*)} \subset \mathcal{B}(\Gamma_q, \rho_q)$ еквівалентна виконанню нерівності $|\Gamma_q - C| + R \leq \rho_q$, що рівносильно $\left| \dfrac{c_{q,j}(1 + \overline{\Gamma}_q^*)}{|1 + \Gamma_q^*|^2 - \rho_q^{*2}} - \Gamma_q \right| + \dfrac{|c_{q,j}|\rho_q^*}{|1 + \Gamma_q^*|^2 - \rho_q^{*2}} \leq \rho_q$. Отже, $R_n^{(q,j)} \neq 0$, $n \geq 1$, $q = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, p_q}$.

Можна показати, використовуючи [14], що $\partial \mathcal{O}_q$ – це овал, який є симетричним відносно прямої $e^{\alpha_q i}\mathbb{R}$, де $\alpha_q = \arg \Gamma_q(1 + \Gamma_q^*)$. Точки його перетину з прямою $e^{\alpha_q i}\mathbb{R}$ позначимо $v_{q,1}$ та $v_{q,2}$. Відомо, що

$$\begin{aligned} v_{q,1} &= (|\Gamma_q| - \rho_q)(|1 + \Gamma_q^*| - \rho_q^*)e^{\arg \alpha_q}, \\ v_{q,2} &= (|\Gamma_q| + \rho_q)(|1 + \Gamma_q^*| - \rho_q^*)e^{\arg \alpha_q}, \end{aligned} \tag{10}$$

де $v_{q,1}$, $v_{q,2}$ – відповідно мала та велика осі овалу $\partial \mathcal{O}_q$ Очевидно, що $\mathcal{B}(0, |v_{1,q}|) \subset \overline{\mathcal{O}}_q \subset \mathcal{B}(0, |v_{2,q}|)$ і $\mathcal{B}(d_q, |v_{2,q}| - |d_q|) \subset \overline{\mathcal{O}}_q \subset \mathcal{B}(d_q, |v_{1,q}| + |d_q|)$.

За допомогою методу математичної індукції по q доведемо, що послідовності залишків $\{R_n^{(q,1)}\}_{n=1}^{\infty}$, $q = \overline{1, N}$ збігаються.

Оскільки $c_{1,j} \in \mathcal{O}_1$, то згідно з овальною теоремою 3.1 з [10], послідовність $\{R_n^{(1,1)}\}_{n=1}^{\infty}$ збігається.

Припустимо, що для деякого k послідовності $\{R_n^{(s,1)}\}_{n=1}^{\infty}$, $s = \overline{2, k}$, збігаються.

Використовуючи багатовимірний аналог теореми Стільтьєса–Віталі, доведемо збіжність послідовності $\{R_n^{(k+1,1)}\}_{n=1}^{\infty}$. Побудуємо функціональний дріб, частинними чисельниками якого є комплексні змінні

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{j_k=1}^{j_{k-1}} \frac{z_{j_k,s}}{1}, \tag{11}$$

де $j_0 = k + 1$. Позначимо $\sigma_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} p_j$ і $z^{(\sigma_{k+1})} = (z_{1,1}, z_{1,2}, \ldots, z_{1,p_1}, \ldots, z_{k+1,1}, z_{k+1,2} \ldots, z_{k+1,p_{k+1}})$, $f_n(z^{(\sigma_{k+1})})$ – n-й підхідний дріб (11) та $R_n^{(k+1,j)}(z^{(\sigma_{k+1})})$ – його залишки $n \geq 1$, $j = \overline{1, p_{k+1}}$. Зауважимо, що $R_n^{(k+1,1)}(z^{(\sigma_{k+1})}) = f_n(z^{(\sigma_{k+1})})$. Визначимо множину

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_1^{p_1} \times \ldots \times \mathcal{O}_{k+1}^{p_{k+1}},$$

де $\mathcal{O}_q^{p_q} = \underbrace{\mathcal{O}_q \times \ldots \times \mathcal{O}_q}_{p_q}$ і $\mathcal{O}_q$ – овальні області вигляду (9). Якщо $z_{q,j} \in \mathcal{O}_q$, то $R_n^{(q,j)}(z^{(\sigma_{k+1})}) \in \mathcal{B}(1+\Gamma_q^*, \rho_q^*)$, $q = \overline{1,k+1}$, $j = \overline{1,p_q}$. Отже, послідовність $\{R_n^{(k+1,1)}(z^{(\sigma_{k+1})})\}_{n=1}^{\infty}$ є рівномірно-обмеженою в області $\mathcal{O}$.

Нехай $\mathfrak{D} = \{z^{(\sigma_{k+1})} \in \mathbb{C}^{\sigma_{k+1}} : |z_k| \le r(k = \overline{1,\sigma_{k+1}})\}$ – замкнений полікруг, що міститься в множині $\mathcal{O}$, де $r = \min\limits_{j=\overline{1,k+1}}\{\frac{1}{4N}; |v_{j,1}|\}$ і $v_{j,1}$– мала вісь овалу $\mathcal{O}_j$. Збіжність функціонального ГЛД на $\mathfrak{D}$ множини $\mathcal{O}$ випливає з узагальнення теореми Worpitsky для ГЛД спеціального вигляду [4].

Отже, функціональний дріб (11) рівномірно збігається на будь-якому компакті множини $\mathcal{O}$. Зокрема, в точці $M \in \mathcal{O}$ з координатами $z_{q,j} = c_{q,j}$, $q = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,p_q}$.

Знайдемо границі $Z^{(q)}$ послідовностей $\{R_n^{(q,1)}\}_{n=1}^{\infty}$, $q = \overline{1,N}$. Якщо $q = 1$, то $R_n^{(1,1)}$– n-й підхідний дріб p_1-періодичного неперервного дробу. Оскільки послідовність $\{R_n^{(1,1)}\}_{n=1}^{\infty}$ збіжна, то дробово-лінійне відображення $S^{(1)}(\omega)$ є локсодронічного або параболічного типу. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(q,1)} = Z^{(1)}$, де $Z^{(1)} = X^{(1)}$ – притягувальна цього відображення. Оскільки $\mathsf{dist}(0, \partial\mathcal{O}_1) = |1+\Gamma_1| - \rho_1 > 0$, то $Z^{(1)} \neq 0$.

Розглянемо залишки 2-ї гілки і запишемо їх у вигляді

$$R_n^{(2,1)} = R_n^{(1,1)} + \frac{c_{2,1}|}{|R_{n-1}^{(1,1)}} + \ldots + \frac{c_{2,s}|}{|R_0^{(1,1)}},$$

де $n = rp_2 + s$ $(1 \le s \le p_2)$. Оскільки послідовність елементів $c_{2,n}$ є p_2-періодичною послідовністю $(c_{2,n} = c_{2,s})$ і $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(1,1)} = Z^{(1)}$, то $R_n^{(2,1)}$ є n-й підхідний дріб зворотного p_2-періодичного неперервного дробу.

Оскільки $T^{(2)}(\omega)$ локсодронічного типу, то згідно з теоремою 4.13 [14] маємо $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(2,1)} = Z^{(2)}$, де $Z^{(2)} = -Y^{(2)}$ і $Y^{(2)}$– відштовхувальна точка дробово-лінійного відображення $T^{(2)}(\omega)$. Оскільки $\mathsf{dist}(0, \partial\mathcal{O}_2) = |1+\Gamma_2^*| - \rho_2^* > 0$, то $Z^{(2)} \neq 0$.

Припустимо, що для деякого ν виконуються співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(s,1)} = Z^{(s)}$, де $Z^{(s)} = -Y^{(s)}$ ($Y^{(s)}$– відштовхувальні точки дробово-лінійних відображень $T^{(s)}(\omega)$) і $Z^{(s)} \neq 0$, $s = \overline{3,\nu}$.

Запишемо залишки $\nu+1$ гілки вигляді

$$R_n^{(\nu+1,1)} = R_n^{(\nu,1)} + \frac{c_{\nu+1,1}|}{|R_{n-1}^{(\nu,1)}} + \cdots + \frac{c_{\nu+1,s}|}{|R_0^{(k,1)}},$$

де $n = rp_{\nu+1} + s$, $1 \le s \le p_{\nu+1}$. Аналогічно, як і для 2-ї гілки, маємо $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(\nu+1,1)} = Z^{(\nu+1)}$, де $Z^{(\nu+1)} = -Y^{(\nu+1)}$ і $Y^{(\nu+1)}$– відштовхувальна точка дробово-лінійного відображення $T^{(\nu+1)}(\omega)$ локсодронічного типу.

Оскільки $F_n = 1/R_n^{(N,1)}$ і $|R_n^{(N,1)}| > \delta$, де $\delta = |1+\Gamma_N^*| - \rho_N^*$ $(n > 0)$, то послідовність $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається. Окрім того, що дробово-лінійні відображення $T^{(q)}(\omega)$, $q = \overline{2,N}$ є локсодронічного типу, $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = F$ і $F = (Z^{(N)})^{-1}$. Оскільки $R_n^{(N,1)} \in \mathcal{B}(1+\Gamma_N^*, \rho_N^*)$, то $F_n \in K$, $n > 1$. $\square$

Встановимо оцінки швидкості збіжності періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду.

Теорема 3.2. *Нехай елементи* $c_{q,j}$, $q = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,p_q}$, $\overrightarrow{p}$*-періодичного ГЛД (3) належать овальним областям* $\mathcal{O}_q$*:* $c_{q,j} \in \mathcal{O}_q$, $q = \overline{1,N}$, *де* $\mathcal{O}_q$ *визначають за формулами (9).*

1. Якщо виконуються умови

$$\rho_q < (|1+\Gamma_q^*| - |\Gamma_q| - \rho_{q-1}^*)/2,$$

де $\rho_0 = 0$, $q = \overline{1,N}$, *то справджуються оцінка швидкості збіжності дробу (3)*

$$|F - F_n| \le LC_{n+N-1}^{N-1}\zeta^{n+1}, \quad n \ge 1, \tag{A}$$

де $\zeta = \max\limits_{q=\overline{1,N}}\{\zeta_q\}$, $\zeta_q = \dfrac{\rho_q + |\Gamma_q|}{|1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*}$.

2. Якщо Γ_q *і* ρ_q, $q = \overline{1,N}$, *задовольняють умови*

$$\rho_q < (|1+\Gamma_q^*| - |\Gamma_q| - 3\rho_{q-1}^*)/2,$$

де $\rho_0 = 0$ *і* $q = \overline{1,N}$, *то справджується оцінка*

$$|F - F_n| \le LC_{n+N-1}^{N-1}\xi^{n+1}, \quad n \ge 1, \tag{B}$$

де $\xi = \max\limits_{q=\overline{1,N}}\{\eta_q\}$, $\xi_q = \dfrac{|\Gamma_q| + \rho_q^* + \rho_{q-1}^*}{|1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*}$, $L = \dfrac{M}{(|1+\Gamma_N^*| - \rho_N^*)^2}$, $M =$ $= \max\limits_{q=\overline{1,N}}\{|1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*\}$.

Доведення. Для оцінок швидкості збіжності дробу (3) використаємо формулу (7). Якщо виконуються умови $c_{q,j} \in \mathcal{O}_q$, $q = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,p_q}$, то залишки $R_n^{(q,j)}$ належать відповідним кругам $\mathcal{B}(1+\Gamma_q^*, \rho_q^*)$. Тому виконуються також оцінки $|R_n^{(q,j)}| \geq |1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*$, $q = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,p_q}$.

1. Оскільки $c_{q,j} \in \mathcal{O}_q$, то $|c_{q,j}| < |v_{2,q}|$, $q = \overline{1,N}$; $j = \overline{1,p_q}$. Отже, для $j = \overline{1,p_q}$, $1 \leq s \leq n+1$ маємо

$$\frac{|c_{q,j}|}{|R_{n+m-s}^{(q,j+1)}||R_{n-s}^{(q,j+1)}|} \leq \frac{(\rho_q + |\Gamma_q|)(|1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*)}{(|1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*)^2}.$$

Введемо позначення $\zeta_q = \dfrac{\rho_q + |\Gamma_q|}{|1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*}$ і $A_q = \dfrac{|c_{q,1}|^{k_{q,1}}|c_{q,2}|^{k_{q,2}} \dots |c_{q,p_q}|^{k_{q,p_q}}}{\prod_{j=1}^{k_q+1} |R_{l_q+m-j}^{(q,j+1)}||\widehat{R}_{l_q-j}^{(q,j+1)}|}$. Оскільки $k_{q,1} + \dots + k_{q,p_q} = k_q$, $q = \overline{1,N}$, то маємо оцінки $A_q \leq \zeta_q^{k_q}$, $k_q \leq n$ і $A_q \leq (|1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*)\zeta^k$, $k = n+1$. Враховуючи це, одержуємо

$$|F_{m+n} - F_n| \leq \frac{1}{(|1+\Gamma_N^*| - \rho_N^*)^2} \sum_{k \in J_{n+1}^{(N)}} \zeta_1^{k_1}\zeta_2^{k_2}\dots\zeta_N^{k_N} \leq LC_{n+N-1}^{N-1}\zeta^{n+1}.$$

При $m \to \infty$ отримаємо оцінку (A).

2. Оскільки $c_{q,j} \in \mathcal{O}_q$, $q = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,p_q}$, то, враховуючи рекурентні співвідношення (5), одержуємо: $\dfrac{c_{q,j}}{R_{n-1}^{(q,j+1)}} \in \mathcal{B}(\Gamma_q, \rho_q^* + \rho_{q-1}^*)$, $n \geq 1$, $q = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,p_q}$. Отже, справджуються наступні оцінки: $\left|\dfrac{c_{q,j}}{R_{n-1}^{(q,j+1)}}\right| \leq |\Gamma_q| + \rho_q^* + \rho_{q-1}^*$ і $\dfrac{|c_{q,j}|}{|R_{n+m-s}^{(q,j+1)}||R_{n-s}^{(q,j+1)}|} \leq \dfrac{|\Gamma_q| + \rho_q^* + \rho_{q-1}^*}{|1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*}$. Позначимо $\xi_q = \dfrac{|\Gamma_q| + \rho_q^* + \rho_{q-1}^*}{|1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*}$, $q = \overline{1,N}$. Використовуючи попередню схему доведення, маємо оцінку (B). □

Позначимо $\mathcal{W}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/(4N)\}$ і $\mathcal{W}_q = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/(4q)\}$, $q = \overline{2,N}$. Багатовимірні узагальнення теореми Ворпіцкого див. [4] для періодичних ГЛД (3) сформулюємо так

1. Нехай дріб (3) є 1-періодичним, тобто $\overrightarrow{p} = (1, 1, \ldots, 1)$. Якщо елементи $c_{q,1}$, $q = \overline{1, N}$, цього дробу задовольняють умови $|c_{q,1}| \le \le 1/(4N)$, $q = \overline{1, N}$, тобто $c_{q,1} \in \mathcal{W}_1$, то цей дріб збігається.

2. Нехай дріб (3) є $\overrightarrow{p}$-періодичним, $p_q \ge 1$, $q = \overline{1, N}$. Якщо елементи $c_{q,j}$, $q = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, p_q}$, такого дробу задовольняють умови $|c_{q,1}| \le 1/(4N)$ і $|c_{q,j}| \le 1/(4q)$, $q = \overline{1, N}$, $j = \overline{2, p_q}$, тобто $c_{q,1} \in \mathcal{W}_1$ і $c_{q,j} \in \mathcal{W}_q$, то ГЛД (3) збігається.

Приклад 3.1. Розглянемо (2,1)-періодичний ГЛД з 2 гілками розгалуження вигляду

$$\cfrac{c_{1,1}}{1+\cfrac{c_{1,2}}{1+\cfrac{c_{1,1}}{1+\cfrac{c_{1,2}}{1+\ddots}}}} + \cfrac{c_{2,1}}{1+\cfrac{c_{1,1}}{1+\cfrac{c_{1,2}}{1+\cfrac{c_{1,1}}{1+\ddots}}} + \cfrac{c_{2,1}}{1+\cfrac{c_{1,1}}{1+\cfrac{c_{1,2}}{1+\ddots}} + \cfrac{c_{2,1}}{1+\ddots}}}.$$

Покладемо, що $\Gamma_1 = 0.15+0.15i$ і $\rho_1 = 0.25$, $\Gamma_2 = 0.1$ і $\rho_2 = 0.12$. Умови теорем 3.1 та 3.2 за цих значень виконуються. Крім цього, оскільки великі осі овалів вигляду (9) становлять $|v_{1,2}| \approx 0.42$ і $|v_{2,2}| \approx 0.195$, то овали $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ не є підмножинами кругів Ворпіцкого для (2,1)-періодичного ГЛД (3).

Задамо елементи $(2,1)$-періодичного ГЛД: $c_{1,1} = 0.1e^{\alpha i}$, $c_{1,2} = = 0.4e^{\alpha i}$ ($\alpha = \arg\Gamma_1(1+\Gamma_1)$ і $\alpha = 0.915$), $c_{2,1} = 0.17$. У таблиці подано результати обчислень залишків $R_n^{(q,1)}$, $q = \overline{1, 2}$, відповідно до рекурентних формул (5). Обчислимо значення границі послідовності залишків 1-ї гілки $X_1 = \lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(1,1)}$. Оскільки $R_n^{(1,1)}$ – n-й підхідний дріб 2-періодичного неперервного дробу, то $X^{(1)} = (\lambda - 2 \times c_{1,2} + \sqrt{\lambda^2 - 4c_{1,2} \cdot c_{1,1}})/2$ ($\lambda = 1 + c_{1,1} + c_{1,2}$) [14, с. 181]. За заданих елементів дробу $X^{(1)} = = 1.06991 + 0.0247775i$. Розглянемо дробово-лінійне відображення $T^{(2)}(\omega) = c_{2,1}/(X^{(1)} + \omega)$. Його нерухомі точки знаходимо за формулами $x = (-X^{(1)} + \sqrt{(-X^{(1)})^2 + 4c_{2,1}})/2$, $y = (-X^{(1)} - \sqrt{(-X^{(1)})^2 + 4c_{2,1}})/2$. Їх значення становлять $x = 0.14- -0.002i$ та $y = -1.21032 - 0.00222i$. Оскільки $|k| = \left|\dfrac{y + X^{(1)}}{x + X^{(1)}}\right| = = 0.116$, то дробово-лінійне відображення $T^{(2)}(\omega)$ є локсодронічного типу. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(2,1)} = Z^{(2)}$, де $Z^{(2)} = -y$, і значення цієї границі дорівнює $1.21032 + 0.0222018i$.

n	$R_n^{(1,1)}$	$R_n^{(2,1)}$
1	$1.089+0.044i$	$1.2597+0.044i$
2	$1.00415+0.023526i$	$1.1389+0.0187i$
3	$1.06999+0.025294i$	$1.2192+0.0228i$
4	$1.068853+0.023978i$	$1.2082+0.0213i$
5	$1.0699904+0.02478i$	$1.21056+0.02229i$
6	$1.069901+0.024753i$	$1.21028+0.02216i$
7	$1.0699085+0.024777i$	$1.21032+0.0222i$
8	$1.069908+0.024777i$	$1.210319+0.0222009i$
9	$1.0699087+0.0247774i$	$1.21032+0.0222019i$
10	$1.069908+0.024777i$	$1.2103202+0.0222017i$
11	$1.0699087+0.0247774i$	$1.2103202+0.0222018i$
12	$1.06990875+0.02477748i$	$1.210320205+0.02220181352i$
13	$1.06990875+0.02477748i$	$1.21032020575+0.02220181376i$
14	$1.06990875+0.02477748657i$	$1.21032020578+0.0222018137i$
15	$1.06990875+0.02477748656i$	$1.2103202577+0.02220181337i$

4. Висновки

Означено $\overrightarrow{p}$-періодичний гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду. Для нього встановлено формулу різниці підхідних дробів. За цією формулою доведено оцінки швидкості збіжності цих дробів. Досліджено овальні множини збіжності та встановлено оцінки похибок апроксимації в цих областях.

[1] *Антонова Т. М.* Багатовимірне узагальнення теореми про параболічні області збіжності неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 7–12.

[2] *Антонова Т. М., Боднар Д. І.* Області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Теорія наближення функцій та її застосування. – Праці Ін-ту математики НАН України. – 2000. – **31.** – С. 19–32.

[3] *Антонова Т. М.* Про прості кругові множини абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Карпат. мат. публікації. – 2012. – **4**, № 2. – С. 165–174.

[4] *Баран О. Є.* Аналог ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39**, № 2. – С. 35–38.

[5] *Баран О. Є.* Деякі області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Карпатські мат. публікації. – 2013. – **5**, № 1. – С. 4–13.

[6] *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби / Д. И. Боднар – Киев : Наук. Думка, 1986. – 176 с.

[7] *Боднар Д. І., Бубняк М. М.* Оцінки швидкості поточкової та рівномірної збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 4. – С. 24–32.

[8] *Cuyt A., Jones W.B., Petersen V.B.* Handbook of Continued Fractions of Special Functions. – Kluwer Academic Publisher, 2007.

[9] *Hillam K.L., Thron W.J.* A General Convergence Criterion for Continued Fractions $K(a_n/b_n)$ // Proc. Amer. Math. Soc. – 1965. **16**. – p. 1256–1262.

[10] *Jacobsen L., Thron W.J.* Oval Convergence Regions and Circular Limit Regions for Continued Fractions $K(a_n/1)$ // "Analytic Theory of Continued Fractions"II, Lecture Notes in Mathematics 1199, W.J.Thron eds., Springer-Verlag: Berlin, 1986. – p. 90–126.

[11] *Jones W.B., Thron W.J.* Continued Fractions // Analytic Theory and Applications, Encyclopedia of Mathematics and its Applications. New York: – Addison-Wesley Publishing Company, 1980.

[12] *Lane R.E.* The Convergence and Values of Periodic Continued Fractions // Bull. Amer. Math. Soc.– 1945. – **51**, – p. 246–250.

[13] *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions with applications. – Amsterdam : Elsevier Publishers B. V., 1992.

[14] *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued Fractions. Atlantis Press – World Scientific, Amsterdam-Paris: 2008.

[15] *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbruchen. – Stuttgard: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1957. – **2**. – 322 p.

[16] *Waadeland H.* On Continued Fractions $K(a_n/1)$, where all a_n are lying on a Cartesian Oval // Roucky Mountain Journal of Mathematics. – 1992. – **22**, № 3. – p. 1123–1138.

[17] *Wall H.S.* Analytic Theory of Continued Fractions. – Van Nostrand, New York: 1948.