Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 4, 68–75

УДК 517.53

Сумісні апроксимації Паде деяких базисних гіпергеометричних рядів

Н.М. Гаврилюк, А.П. Голуб

Інститут математики НАН України, Київ;
nataliyagavrylyuk@gmail.com, golub@imath.kiev.ua

The exact expressions of simultaneous Padé approximants for the sets of basic hypergeometric series are derived.

Найден явный вид для совместных аппроксимант Паде наборов базисных гипергеометрических рядов.

Сумісні апроксимації Паде вперше вивчалися Ш. Ермітом [4]. Їх було використано для встановлення трансцендентності числа e.

Означення 1 ([9]). Нехай $F = \{f_\lambda(z)\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$ — набір формальних степеневих рядів вигляду

$$f_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k^{(\lambda)} z^k, \tag{1}$$

а $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots n_\Lambda)$ — вектори з невід'ємними цілими координатами. Сумісними апроксимантами Паде набору F індексу $R = [M/N]$ називаються раціональні поліноми

$$[M/N]_F^{(\lambda)}(z) = \frac{P_R^{(\lambda)}(z)}{Q_R(z)}, \quad \lambda = \overline{1, \Lambda}, \tag{2}$$

$\deg P_R^{(\lambda)} \le m_\lambda$, $\deg Q_R \le |N| = n_1 + n_2 + \ldots + n_\Lambda$, для яких виконується співвідношення

$$f_\lambda(z) - [M/N]_F^{(\lambda)}(z) = O(z^{n_\lambda + m_\lambda + 1}), \quad \lambda = \overline{1, \Lambda},$$

тобто при кожному $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, розвинення в степеневі ряди раціональних поліномів (2) збігаються з формальними степеневими рядами (1) до членів, що містять $z^{n_\lambda + m_\lambda + 1}$ включно.

У [9] викладено огляд історії розвитку теорії сумісних апроксимацій Паде. У [6] наведено результати, що стосуються застосування до побудови та вивчення сумісних апроксимацій Паде методу узагальнених моментних зображень Дзядика [7].

Означення 2 ([6]). Узагальненим моментним зображенням числової послідовності $\{s_k\}_{k=o}^{\infty}$ на добутку лінійних просторів $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ називається двопараметрична сукупність рівностей

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty},$$

де $x_k \in \mathcal{X}, \quad k = \overline{0, \infty}, \quad y_j \in \mathcal{Y}, \quad j = \overline{0, \infty}, \quad a \ \langle ., . \rangle$ — білінійна форма, визначена на $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

У [3] були, зокрема, побудовані узагальнені моментні зображення послідовності

$$s_k = \frac{t_0}{(1 - \delta\gamma^k)t_0 + \delta\gamma^k}, \quad k = \overline{0, \infty},$$

де $t_0 \in (0, 1), \delta \in (0, \infty), \gamma \in (0, \infty) \backslash \{1\}$.

У [5] на цій підставі було знайдено явні вирази для апроксимант Паде базисного гіпергеометричного ряду

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{1+\varepsilon}\, {}_2\phi_1 \left[\begin{array}{c} 1; -\varepsilon \\ -\varepsilon\gamma \end{array} ; \gamma; z \right] &= \frac{1}{1+\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\varepsilon; \gamma)_k}{(-\varepsilon\gamma; \gamma)_k} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{1 + \varepsilon\gamma^k}, \end{aligned} \tag{3}$$

де $\varepsilon \in (0, \infty), \ \gamma \in (0, \infty) \backslash \{1\}$, а q-символ Похгаммера визначається за формулою

$$(a; q)_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (1-a)(1-aq) \cdot \ldots \cdot (1 - aq^{n-1}), & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

У даній статті будуються сумісні апроксиманти Паде наборів функцій вигляду (3).

Відзначимо, що сумісні апроксиманти Паде для наборів базисних гіпергеометричних рядів вивчалися багатьма дослідниками (див., наприклад, [1]– [2], [10]).

Теорема 1. *Сумісні апроксиманти Паде набору функцій* $F = \{f_\lambda\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$, *де*

$$f_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{1+\varepsilon_\lambda \gamma^k}, \quad \lambda = \overline{1,\Lambda},$$

де $\varepsilon_\lambda \in (0,\infty)$, $\gamma \in (0,\infty)\backslash\{1\}$, $\log_\gamma \dfrac{\varepsilon_\mu}{\varepsilon_\lambda} \notin \mathbb{Z}$ *при* $\lambda \neq \mu$, $\lambda, \mu = \overline{1,\Lambda}$, *індексу* $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots n_\Lambda)$ *такого, що* $m_\lambda \geq |N| - 1$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, *можна записати у вигляді*

$$[M/N]_F^{(\lambda)}(z) = \frac{P_R^{(\lambda)}(z)}{Q_R(z)}, \quad \lambda = \overline{1,\Lambda}.$$

Тут

$$Q_R(z) = \sum_{k=0}^{|N|} c_k^{(R)} z^{|N|-k},$$

$$P_R^{(\lambda)}(z) = \sum_{k=0}^{|N|} c_k^{(R)} z^{|N|-k} \sum_{p=0}^{m_\lambda+k-|N|} \frac{z^p}{1+\varepsilon_\lambda \gamma^p}, \quad \lambda = \overline{1,\Lambda},$$

а коефіцієнти $c_k^{(R)}$, $k = \overline{0,|N|}$, *мають вигляд*

$$c_k^{(R)} = (-1)^{|N|-k} \cdot \frac{\prod\limits_{\lambda=1}^{\Lambda} \left(-\varepsilon_\lambda \gamma^{m_\lambda - |N| + k + 1}; \gamma\right)_{n_\lambda}}{(\gamma;\gamma)_k (\gamma;\gamma)_{|N|-k} \gamma^{(2|N|-k-1)k/2}}.$$

Доведення. Згідно з [6] для побудови відповідних апроксимант потрібно побудувати узагальнені поліноми вигляду

$$Y_{|N|} = \sum_{j=0}^{|N|} c_j^{(R)} y_j,$$

де лінійні неперервні функціонали y_j мають вигляд

$$y_j(x) = x(t_j) = x\left(\frac{t_0}{(1-\gamma^j)\, t_0 + \gamma^j}\right), \quad j = \overline{0,\infty},$$

для яких виконуються умови біортогональності

$$\left\langle x^{(\lambda)}_{k+m_\lambda-|N|+1}, Y_{|N|}\right\rangle = 0,$$

при $k=\overline{0,n_\lambda-1}$, $\lambda=\overline{1,\Lambda}$, де

$$x^{(\lambda)}_k(t) = \frac{t}{(1-\delta_\lambda t^k)t+\delta\gamma^k}, \quad k=\overline{0,\infty},$$

$\delta_\lambda = \dfrac{t_0}{1-t_0}\varepsilon_\lambda$, $\lambda=\overline{1,\Lambda}$, а білінійна форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ визначається формулою

$$\langle x,y\rangle = y(x).$$

Такий біортогональний поліном можна з точністю до сталого множника записати у вигляді визначника

$$Y_{|N|} = \begin{vmatrix} s^{(1)}_{m_1-|N|+1} & s^{(1)}_{m_1-|N|+2} & \dots & s^{(1)}_{m_1+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s^{(1)}_{m_1+n_1-|N|} & s^{(1)}_{m_1+n_1-|N|+1} & \dots & s^{(1)}_{m_1+n_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s^{(\Lambda)}_{m_\Lambda-|N|+1} & s^{(\Lambda)}_{m_\Lambda-|N|+2} & \dots & s^{(\Lambda)}_{m_\Lambda+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s^{(\Lambda)}_{m_\Lambda+n_\Lambda-|N|} & s^{(\Lambda)}_{m_\Lambda+n_\Lambda-|N|+1} & \dots & s^{(\Lambda)}_{m_\Lambda+n_\Lambda} \\ y_0 & y_1 & \dots & y_{|N|} \end{vmatrix},$$

де $s^{(\lambda)}_k = y_0(x_k) = \dfrac{1}{1+\varepsilon_\lambda\gamma^k}$, $k=\overline{0,\infty}$, $\lambda=\overline{1,\lambda}$.

Розвиваючи його за елементами останнього рядка, отримуємо

$$Y_{|N|} = \sum_{j=0}^{|N|}(-1)^j y_j W_j,$$

де

$$W_j = \det\|s^{(\lambda)}_{m_\lambda-|N|+i+k+1} : i=\overline{0,n_\lambda-1},\ \lambda=\overline{1,\Lambda};\ k\in[0,|N|]\backslash\{j\}\|.$$

Використовуючи побудоване в [3] узагальнене моментне зображення, отримуємо

$$s_{i+k}^{(\lambda)} = x_i^{(\lambda)}(t_k) = \frac{t_k}{(1-\delta_\lambda\gamma^i)t_k + \delta_\lambda t^i} = \frac{\dfrac{1}{\delta_\lambda\gamma^i}}{\dfrac{1}{\delta_\lambda\gamma^i} - 1 + \dfrac{1}{t_k}} = \frac{\omega_{\lambda,i}}{x_{\lambda,i} + \tilde{y}_k},$$

де $\omega_{\lambda,i} = \dfrac{1}{\delta_\lambda\gamma^i}, \quad x_{\lambda,i} = \dfrac{1}{\delta_\lambda\gamma^i} - 1, \quad \tilde{y}_k = \dfrac{1}{t_k}.$

Тоді $W_j =$

$$= \det\left\| \frac{w_{\lambda,m_\lambda-|N|+i+1}}{x_{\lambda,m_\lambda-|N|+i+1} + \tilde{y}_k} : i = \overline{0, n_\lambda - 1},\ \lambda = \overline{1,\Lambda};\ k \in [0,|N|]\backslash\{j\} \right\| =$$

$$= \prod_{\lambda=1}^{\Lambda} \prod_{i=0}^{n_\lambda-1} w_\lambda, m_\lambda - |N| + i + 1 \times$$

$$\times \det\left\| \frac{1}{x_{\lambda,m_\lambda-|N|+i+1} + \tilde{y}_k} :\ i = \overline{0, n_\lambda - 1},\ \lambda = \overline{1,\Lambda};\ k \in [0,|N|]\backslash\{j\} \right\| =$$

$$= \prod_{\lambda=1}^{\Lambda} \prod_{i=0}^{n_\lambda-1} w_\lambda, m_\lambda - |N| + i + 1 \times$$

$$\times \det\left\| \frac{1}{\tilde{x}_m + \tilde{y}_k} \ :\ m \in [0,|N|-1];\ k \in [0,|N|]\backslash\{j\} \right\|,$$

де $\tilde{x}_m = x_{\lambda,m_\lambda-|N|+i+1}$, якщо $m = n_1 + n_2 + \ldots + n_{\lambda-1} + i$, а $i \le n_\lambda - 1$, так що

$$\lambda = \max\{p : \sum_{l=1}^{p-1} n_l \le m\},$$

а

$$i = m - \sum_{l=1}^{\lambda-1} n_l.$$

Останній визначник є визначником матриці Коші (див. [8]):

$$\frac{\prod\limits_{k<m;\ k,m\neq j} (\tilde{x}_k - \tilde{x}_m)(\tilde{y}_k - \tilde{y}_m)}{\prod\limits_{k,m;\ m\neq j} (\tilde{x}_k + y_m)} = \frac{\prod\limits_{m=1}^{|N|} \prod\limits_{k=0}^{m-1} (\tilde{y}_k - \tilde{y}_m)}{\prod\limits_{k=0}^{j-1} (\tilde{y}_k - \tilde{y}_j) \prod\limits_{m=j+1}^{|N|} (y_j - y_m)} \times$$

$$\times \prod_{m=1}^{|N|-1} \prod_{k=0}^{m-1} (\tilde{x}_k - \tilde{x}_m) \frac{\prod\limits_{k=0}^{|N|-1} (\tilde{x}_k + \tilde{y}_j)}{\prod\limits_{k=0}^{|N|-1} \prod\limits_{m=0}^{|N|} (\tilde{x}_k + \tilde{y}_m)} =$$

$$= \varkappa_R \frac{\prod\limits_{k=0}^{|N|-1} (\tilde{x}_k + \tilde{y}_j)}{\prod\limits_{k=0}^{j-1} (\tilde{y}_k - \tilde{y}_j) \prod\limits_{m=j+1}^{|N|} (\tilde{y}_j - \tilde{y}_m)} = \varkappa_R \frac{\prod\limits_{\lambda=1}^{\Lambda} \prod\limits_{i=0}^{n_\lambda-1} (x_{\lambda,m_\lambda-|N|+i+1} + \tilde{y}_j)}{\prod\limits_{k=0}^{j-1} (\tilde{y}_k - \tilde{y}_j) \prod\limits_{m=j+1}^{|N|} (\tilde{y}_j - \tilde{y}_m)} =$$

$$= \varkappa_R \frac{\prod\limits_{\lambda=1}^{\Lambda} \prod\limits_{i=0}^{n_\lambda-1} \left(\frac{1}{\delta_{\lambda,} \gamma^{m_\lambda-|N|+i+1}} - 1 + \frac{1}{t_j} \right)}{\prod\limits_{k=0}^{j-1} \left(\frac{1}{t_k} - \frac{1}{t_j} \right) \prod\limits_{m=j+1}^{|N|} \left(\frac{1}{t_j} - \frac{1}{t_m} \right)} =$$

$$= \varkappa_R^{(1)} \frac{\prod\limits_{\lambda=1}^{\Lambda} \prod\limits_{i=0}^{n_\lambda-1} \left(t_j - \delta_\lambda \gamma^{m_\lambda-|N|+i+1} t_j + \delta_\lambda \gamma^{m_\lambda-|N|+i+1} \right)}{t_j \prod\limits_{k=0}^{j-1} (t_j - t_k) \prod\limits_{m=j+1}^{|N|} (t_m - t_j)},$$

де $\varkappa_R$, $\varkappa_R^{(1)}$ — константи, що не залежить від j.

Аналогічно [5] можна записати

$$t_j - t_i = \frac{t_0(1-t_0)(\gamma^i - \gamma^j)}{((1-\gamma^j)t_0 + \gamma^j)((1-\gamma^i)t_0 + \gamma^i)},$$

тому

$$\prod_{k=0}^{j-1} (t_j - t_k) = \left(\frac{t_0(1-t_0)}{(1-\gamma^j)t_0 + \gamma^j} \right)^j \frac{\gamma^{j(j-1)/2} (\gamma;\gamma)_j}{\prod\limits_{k=0}^{j-1} ((1-\gamma^k)t_0 + \gamma^k)},$$

$$\prod_{m=j+1}^{|N|} (t_m - t_j) = \left(\frac{t_0(1-t_0)}{(1-\gamma^j)\, t_0 + \gamma^j} \right)^{|N|-j} \frac{\gamma^{j(|N|-j)} (\gamma;\gamma)_{|N|-j}}{\prod\limits_{m=j+1}^{|N|} ((1-\gamma^m)t_0 + \gamma^m)}.$$

Тепер підрахуємо чисельник

$$\prod_{\lambda=1}^{\Lambda} \prod_{i=0}^{n_\lambda-1} \left(t_j - \delta_\lambda \gamma^{m_\lambda-|N|+i+1} t_j + \delta_\lambda \gamma^{m_\lambda-|N|+i+1} \right) =$$

$$= \prod_{\lambda=1}^{\Lambda} \prod_{i=0}^{n_\lambda-1} \left(\frac{t_0}{(1-\gamma^j)t_0+\gamma^j} - \frac{\delta_\lambda \gamma^{m_\lambda-|N|+i+1} t_0}{(1-\gamma^j)t_0+\gamma^j} + \delta_\lambda \gamma^{m_\lambda-|N|+i+1} \right) =$$

$$= \frac{\prod_{\lambda=1}^{\Lambda} \prod_{i=0}^{n_\lambda-1} \left(t_0 - \delta_\lambda \gamma^{m_\lambda-|N|+i+j+1} t_0 + \delta_\lambda \gamma^{m_\lambda-|N|+i+j+1}\right)}{((1-\gamma^j)t_0+\gamma^j)^{|N|}} =$$

$$= \frac{t_0^{|N|} \prod_{\lambda=1}^{\Lambda} \prod_{i=0}^{n_\lambda-1} \left(1 + \varepsilon_\lambda \gamma^{m_\lambda-|N|+i+j+1}\right)}{((1-\gamma^j)t_0+\gamma^j)^{|N|}} =$$

$$= \frac{t_0^{|N|} \prod_{\lambda=1}^{\Lambda} (-\varepsilon_\lambda \gamma^{m_\lambda-|N|+j+1}; \gamma)_{n_\lambda}}{((1-\gamma^j)t_0+\gamma^j)^{|N|}}.$$

Отже,

$$W_j = \varkappa_R^{(2)} \frac{\prod_{\lambda=1}^{\Lambda} \left(-\varepsilon_\lambda \gamma^{m_\lambda-|N|+j+1}; \gamma\right)_{j+n_\lambda}}{(\gamma;\gamma)_j (\gamma;\gamma)_{|N|-j} \gamma^{(2|N|-j-1)j/2}}, \quad j = \overline{0, |N|},$$

при цьому можна покласти, що константа $\varkappa_R^{(2)}$ дорівнює 1.

Звідси отримуємо значення коефіцієнтів $c_j^{(R)}$, $j = \overline{0, |N|}$, біортогонального полінома $Y_{|N|}$, а тим самим згідно з [6] і формули для чисельників та знаменників сумісних апроксимант Паде набору функцій F. □

[1] *Bruin M.G. de.* Simultaneous rational appoximation to some q–hypergeometric functions // Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation. —Dordrecht: Redel, 1988, — P. 135–142.

[2] *Bruin M.G. de, Driver K.A., Lubinsky D.S.*. Convergence of simultaneous Hermite – Padé approximants to the n–tuple of q–hypergeometric series $\left\{ {}_1\Phi_1 \left(\begin{matrix} (1,1) \\ (c,\gamma_j) \end{matrix} ; z \right) \right\}_{j=1}^{n}$ // Numer. Algorithms. — 1992. — **3**. — P. 185–192.

[3] *Golub A.P.* Generalized moment representations and Padé approximants associated with bilinear transformations // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, №5 — С.335–339.

[4] *Hermite C.* Sur la fonction exponentielle // Oeuvres, t.III. — 1873. — P. 151–181.

[5] *Гаврилюк Н.М., Голуб А.П.* Апроксимації Паде рядів, пов'язаних з дробово-лінійними перетвореннями // Теорія наближення функцій та суміжні питання. Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, №3. — С.47–55.

[6] *Голуб А.П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — 222 с.

[7] *Дзядик В.К.* Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АП УРСР. — 1981. — **6.** — С. 8–12.

[8] *Маршалл А., Олкин И.* Неравенства: Теория мажоризации и ее приложения. — М.: Мир, 1983. – 576 с.

[9] *Никишин Е.М., Сорокин В.Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. — М: Наука, 1988. — 256 с.

[10] *Чирский В.Г.* Приближения Эрмита–Паде для некоторых q–базисных гипергеометрических рядов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика и механика. — 200. — №2. — С. 7–11.