

УДК 517.9

М.В. Плахотник, В.В. Федоренко

Київський національний ун-т імені Тараса Шевченка, Київ

E-mail: makar_plakhotnyk@ukr.net

Ин-т математики НАН України, Київ

E-mail: vfedor@imath.kiev.ua

Топологічна спряженість кусково-лінійних унімодальних відображень

A method for constructing of the homeomorphism which determines the topological conjugation of two piecewise linear continuous maps of the interval whose graphs looks like symbol Λ is proposed.

Вступ. Робота присвячена топологічній спряженості динамічних систем, породжених неперервними відображеннями інтервалу $[0; 1]$ на себе.

Нагадаємо, що відображення f та $\tilde{f} \in C([0; 1])$ називаються топологічно спряженими, якщо існує гомеоморфізм $h \in C([0; 1])$, для якого комуते діаграма

$$\begin{array}{ccc} [0; 1] & \xrightarrow{f} & [0; 1] \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ [0; 1] & \xrightarrow{\tilde{f}} & [0; 1], \end{array}$$

тобто виконується рівність

$$h(f(x)) = \tilde{f}(h(x))$$

для будь-якого $x \in [0; 1]$.

Питання про топологічну спряженість є одним з найважливіших в теорії динамічних систем [3]. Але знайти аналітичне представлення гомеоморфізму вдається лише в окремих випадках. Зауважимо, що якщо виписане вище співвідношення розглядати як функціональне рівняння, і при цьому функції f та \tilde{f} вважати лінійними, то методи розв'язання таких функціональних рівнянь, аж до виписування розв'язку в аналітичному вигляді, наведено в [2]. Водночас, в задачі, яку розглядаємо, функції f та \tilde{f} не є лінійними, але є найпростішими серед нелінійних, що пояснює актуальність задачі.

Прикладом аналітичного представлення спрягаючого гомеоморфізму в одновимірній динаміці є

$$h(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$

котрий задає топологічну спряженість логістичного відображення

$$\tilde{f}(x) = 4x(1-x)$$

та відображення

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1/2; \\ 2-2x, & x \geq 1/2, \end{cases} \quad (1)$$

Відмітимо, що топологічна спряженість неперервних відображень інтервалу в себе вивчалась також в [3]. В цій роботі описано класи топологічно спряжених відображень, напівгрупа ітерацій яких є скінченною групою.

Відображення з $C([0; 1])$ називається унімодальним, якщо воно зростає на деякому підінтервалі $[0; v]$ та спадає на підінтервалі $[v; 1]$, де $v \in (0; 1)$. Будемо розглядати найпростіші унімодальні неперервні кусково-лінійні відображення f_v інтервалу $[0; 1]$ на себе — лінійні на кожному з інтервалів $[0; v]$ та $[v; 1]$ такі, що $f_v([0; v]) = f_v([v; 1]) = [0; 1]$. Явна формула відображення f_v має вигляд

$$f_v(x) = \begin{cases} \frac{x}{v}, & x \leq v; \\ \frac{v-x}{1-v}, & x > v. \end{cases} \quad (2)$$

Знаходження гомеоморфізму h , який є розв'язком функціонального рівняння

$$h(f(x)) = f_v(h(x)). \quad (3)$$

рівносильне розв'язанню системи лінійних функціональних рівнянь

$$\begin{cases} h(2x) = \frac{1}{v} h(x) & x \leq 1/2, \\ h(2-2x) = \frac{1-h(x)}{1-v} & x > 1/2. \end{cases}$$

В роботі [4] показано, що пряме застосування методів розв'язання лінійних функціональних рівнянь, описаних в [2], не дає можливості виписати аналітично шукану функцію h , оскільки потребує розв'язання суттєво нелінійних функціональних рівнянь, аналітичні методи розв'язання яких на даний час не відомі.

В нашій роботі пропонується спосіб побудови гомеоморфізму h , який визначає топологічну спряженість відображення f_v та відображення (1). Надалі, якщо не сказано інше, значення параметру v вважатимемо фіксованим, і не будемо щоразу повторюватися, що відображення h , котре будемо, залежить від v .

2. Існування гомеоморфізму, який задає топологічну спряженість. Побудуємо гомеоморфізм h , що задовольняє функціональне рівняння (3).

Для спочатку побудуємо щільну множину A у множині визначення гомеоморфізму h та щільну множину B у множині його значень так, щоб виконувалась рівність $h(A) = B$.

2.1. Побудова множини A . Наступні леми описують найпростіші властивості гомеоморфізму h .

Лема 1. *Відображення h є монотонно зростаючим таким, що $h(0) = 0$ та $h(1) = 1$.*

Доведення. Оскільки відображення h є гомеоморфізмом, то воно або монотонно зростає, або монотонно спадає. Оскільки h відображає інтервал $[0; 1]$ на себе, то або $h(0) = 0$ та $h(1) = 1$, або $h(0) = 1$ та $h(1) = 0$.

Підставимо в рівність (3) значення $x = 0$ та отримаємо

$$h(f(0)) = f_v(h(0)).$$

Оскільки $f(0) = 0$, то має виконуватися рівність $h(0) = f_v(h(0))$, тобто точка $x = h(0)$ є нерухомою точкою відображення f_v .

Втім для відображення f_v точка $x = 1$ не є нерухомою, а точка $x = 0$ є нерухомою. Отже, $h(0) = 0$. Останнє доводить лему.

З означення топологічної спряженості випливають дві наступні властивості відображення h .

Позначимо n -ту ітерацію відображення f через f^n , тобто

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_{n \text{ разів}}.$$

Лема 2. *Якщо має місце (3), то для кожного натурального n виконується рівність*

$$h(f^n(x)) = f_v^n(h(x)). \quad (4)$$

Лема 3. *Якщо відображення f_{v_1} топологічно спряжене відображенню f_{v_2} , а відображення f_{v_2} топологічно спряжене відображенню f_{v_3} , то відображення f_{v_1} топологічно спряжене відображенню f_{v_3} .*

Метод, який ми використовуємо для знаходження відображення h , полягає в дослідженні динамічних властивостей відображень f та f_v , котрі випливають з найпростішого аналізу діаграм Ламерея цих відображень.

Ми побудуємо строго зростаюче відображення h на множині раціональних чисел інтервалу $[0; 1]$, зі знаменником, що дорівнює деякому степеню двійки. Ця множина є щільною на проміжку $[0; 1]$ і за неперервністю зможемо продовжити відображення h на весь проміжок $[0; 1]$.

Позначення 1. *Позначимо A_n , $n \geq 1$ множини всіх тих точок інтервалу $[0; 1]$ таких, що*

$$f^n(A_n) = 0.$$

Лема 4.

$$\left\{ 0; \frac{1}{2^{n-1}}; \dots; \frac{k}{2^{n-1}}; \dots; \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}}; 1 \right\}.$$

Доведення. Якщо двійковий запис числа $x \in [0; 1]$ має вигляд

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i \dots,$$

де $\alpha_i, i = 1, 2, \dots$, дорівнює 0 або 1, то двійковий запис числа $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_i \dots, & \text{якщо } \alpha_1 = 0, \\ 0, \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3 \dots \bar{\alpha}_i \dots, & \text{якщо } \alpha_1 = 1, \end{cases}$$

де $\bar{\alpha}_i = 1 - \alpha_i$.

Звідси випливає, що для кожного числа $x \in [0; 1]$ умова $f^n(x) = 0$ означає, що цифри його двійкового запису, починаючи з $(n + 1)$ -ої дорівнюють нулю, а перші n цифр є довільними.

Зазначене доводить лему.

З леми 4 випливає наступна властивість множини $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, яку позначимо через A .

Лема 5. Множина A є щільною в проміжку $[0; 1]$.

Властивості множин A_n та A підсумуємо в такій теоремі.

Теорема 1. Множини A_n та A мають наступні властивості.

1. $A_n \supseteq A_{n-1}$ при $n \geq 1$.

2. $\bar{A} = [0; 1]$.

3. На точки множини A_n відображення f діє за формулою

$$f\left(\frac{i}{2^n}\right) = \begin{cases} \frac{i}{2^{n-1}}, & 0 \leq i \leq 2^{n-1}; \\ \frac{2^n - i}{2^{n-1}}, & 2^{n-1} < i \leq 2^n \end{cases}$$

4. При будь-якому фіксованому $n \geq 2$ має місце рівність $f(A_n) = A_{n-1}$.

Приклад 1. Обмеження функції f на множину A_3 діє як підстановка:

$$f = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2^3} & \frac{2}{2^3} & \frac{3}{2^3} & \frac{4}{2^3} & \frac{5}{2^3} & \frac{6}{2^3} & \frac{7}{2^3} & \frac{8}{2^3} \\ 0 & \frac{1}{2^2} & \frac{2}{2^2} & \frac{3}{2^2} & \frac{4}{2^2} & \frac{3}{2^2} & \frac{2}{2^2} & \frac{1}{2^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Графічно множину A_n можна побувати за допомогою діаграми Ламерея для орбіт точок відображень інтервалу, як повний прообраз точки 0 відображення f^n .

Аналогічно до того, як ми побудували множину A_n для відображення f , побудуємо множину B_n для відображення f_v .

2.2. Побудова множини B .

Позначення 2. Позначимо B_n , $n \geq 1$ множину всіх тих точок інтервалу $[0; 1]$ таких, що

$$f_v^n(B_n) = 0.$$

Лема 6. Для будь-якого $v \in (0; 1)$

$$B_1 = \{0; 1\} \text{ та } B_2 = \{0; v; 1\}.$$

Доведення. Лема очевидно випливає з означення відображення f_v .

Лема 7. Потужність множини B_n дорівнює $2^{n-1} + 1$.

Доведення. Доведемо теорему методом математичної індукції.

Для $n = 1, 2$ твердження теореми випливає з леми 6.

Нехай для B_{n-1} має місце твердження теореми. Оскільки кожна точка, крім точки $x = 1$, множини B_{n-1} має два прообрази, а точка $x = 1$ має один прообраз відображення f_v , то потужність множини B_n на одиницю менша, ніж подвійна потужність множини B_{n-1} .

Далі нам знадобляться дві наступні технічні леми.

Лема 8. Нехай $a; b \in [0; 1]$, $a < b$ і лінійне відображення $g(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Тоді графік відображення $s = f_v(g)$ є ламаною, що складається з двох ланок, причому $s(a) = s(b) = 0$ та $s(t) = 1$, де

$$t = a + v(b - a).$$

Лема 9. Нехай $a; b \in [0; 1]$, $a < b$ і лінійне відображення $g(x) = \frac{x-b}{a-b}$. Тоді графік відображення $s = f_v(g)$ є ламаною, що складається з двох ланок, причому $s(a) = s(b) = 0$ та $s(t) = 0$, де

$$t = b - v(b - a).$$

З лем 8 та 9 випливає такий наслідок:

Наслідок 1. *Нехай $a; b \in [0; 1]$, $a < b$ і лінійне відображення g таке, що $g([a; b]) = [0; 1]$. Тоді графік відображення $s = f_v(g)$ є ламаною, що складається з двох ланок, і для значення екстремуму t якого, має місце рівність множини*

$$\left\{ \frac{t-a}{b-a}; \frac{b-t}{b-a} \right\} = \{v; 1-v\}.$$

Позначення 3. *Позначимо екстремуми відображення f_v^n через $\beta(k, n)$ де $k = 0; 1; \dots; 2^n$, причому для $0 \leq k_1 < k_2 \leq 2^n$ з нерівності $k_1 < k_2$ випливає нерівність $\beta(k_1; n) < \beta(k_2; n)$.*

Лема 10. *Множина B є щільною в проміжку $[0; 1]$.*

Доведення. Для кожного $n \geq 1$ розглянемо максимум d_n відстані між сусідніми точками множини B_n .

Довести щільність множини B означає довести, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0. \quad (5)$$

Розглянемо дві довільні сусідні точки $\beta_{i,n}; \beta_{i+1,n}$ множини B_n .

Нагадаємо, що за побудовою множини B_n токи $\beta(i, n)$ та $\beta(i+1; n)$ – екстремуми відображення f_v^n . Тому для точок $\beta(2i, n+1)$, $\beta(2i+1, n+1)$ та $\beta(2i+2; n+1)$ маємо рівності

$$\begin{cases} \beta(2i+1, n+1) = \beta(i, n) \\ \beta(2i+2; n+1) = \beta(i+1, n), \end{cases}$$

причому з лем 8 та 9 маємо, наступні вclusions:

$$\begin{aligned} \frac{\beta(2i+1, n+1) - \beta(i, n)}{\beta(2i+1, n+1) - \beta(i, n)} &\in \{v; 1-v\}; \\ \frac{\beta(2i+1, n+1) - \beta(i, n)}{\beta(2i+1, n+1) - \beta(i, n)} &\in \{v; 1-v\}. \end{aligned}$$

Ці вclusions гарантують рівність

$$d_{n+1} \leq \max\{v; 1-v\} \cdot d_n.$$

Зауважимо, що $0 < \max\{v; 1-v\} < 1$, і це обумовлює те, що послідовність $\{d_n\}$ дійсно прямує до 0.

Отже, для множин B_n та $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ маємо наступний аналог теореми 1.

Теорема 2. Множини B_n та B мають наступні властивості.

1. $B_n \supseteq B_{n-1}$ при $n \geq 1$.
2. $\bar{B} = [0; 1]$.
3. При будь-якому фіксованому $n \geq 2$ має місце рівність $f_v(B_n) = B_{n-1}$.

Для означення гомеоморфізму h перепозначимо точки множини A_n .

Позначення 4. Позначимо

$$\alpha(k, n) = \frac{k}{2^n}, \text{ де } k = 0; 1; \dots; 2^n. \quad (6)$$

Використовуючи це позначення, можемо стверджувати, що

$$A_n = \{\alpha(k; n-1), 0 \leq k \leq 2^{n-1}\}.$$

Зауважимо, що $\alpha(k; n)$ – екстремуми відображення f^n .

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ побудуємо зростаюче відображення h_n , визначене на проміжку $[0; 1]$ наступним чином. На множині A_n , для кожного k , $0 \leq k \leq 2^{n-1}$ виконується рівність

$$h_n(\alpha(k; n-1)) = \beta(k; n-1).$$

Крім того, графік h_n є кусково лінійним і складається з 2^{n-1} відрізків прямих, котрі з'єднують точки площини з координатами

$$(\alpha(k; n-1)); \beta(k; n-1))$$

та координатами

$$(\alpha(k+1; n-1)); \beta(k+1; n-1))$$

Розглянемо відображення h

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x).$$

Оскільки множини A_n та множини B_n вкладені (див. властивості 1) теорем 1 і 2), то для кожного $x \in A$ послідовність $h_i(x)$ стабілізується, крім того множини A і B є щільними в інтервалі $[0; 1]$ (див.

властивості 2) теорем 1 і 2). Враховуючи монотонне зростання неперервного відображення h_n , звідси випливає, по-перше, що границя в означенні $h(x)$ існує, а $h(x)$ є гомеоморфізмом, а, по-друге, що діаграма

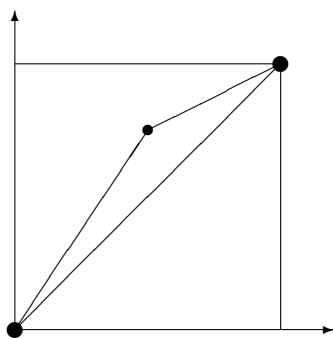
$$\begin{array}{ccc} \overline{A} & \xrightarrow{f} & \overline{A} \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \overline{B} & \xrightarrow{f_v} & \overline{B} \end{array}$$

комутативна.

2.3. Приклад побудови графіків відображень h_n . Проілюструємо описаний вище спосіб побудови відображень h_n для $n \leq 4$ та $v = 3/4$.

За лемою 6, $B_1 = \{0; 1\}$.

Далі, $B_2 = B_1 \cup f_{3/4}^{-1}(1) = B_1 \cup \{3/4\}$. Тому графік відображення h_2 складається з двох відрізків та проходить через точки $(0; 0)$, $(1/2; 3/4)$ та $(1; 1)$. Надалі для кожного $n > 1$ графік відображення h_n також проходить через кожну з цих трьох точок.



Знайдемо відображення h_3 , виходячи з аналітичних розрахунків та явного запису відображення

$$f_{3/4}(x) = \begin{cases} 4/3x, & x \leq 3/4; \\ -4x + 4, & x > 3/4. \end{cases}$$

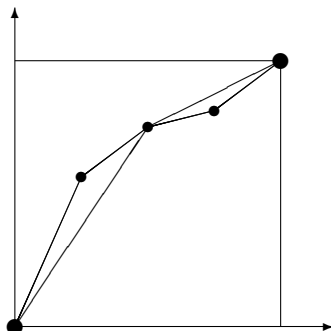
Враховуючи, що $B_2 = B_1 \cup f_{3/4}^{-1}(3/4)$, то двоточкову множину $f_{3/4}^{-1}(3/4)$ знайдемо з рівнянь

$$\begin{cases} 4/3x_1 = 3/4; \\ -4x_2 + 4 = 3/4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9/16; \\ x_2 = 13/16. \end{cases}$$

Таким чином,

$$B_3 = \{0; 9/16; 3/4; 13/16; 1\},$$

і графік відображення h_3 додатково пройде через такі дві точки: $(1/4; 9/16)$ та $(3/4; 13/16)$.



У схожий спосіб можемо побудувати відображення h_4 . Для цього побудуємо множину

$$B_4 = B_3 \cup f_{3/4}^{-1}\{9/16; 13/16\}.$$

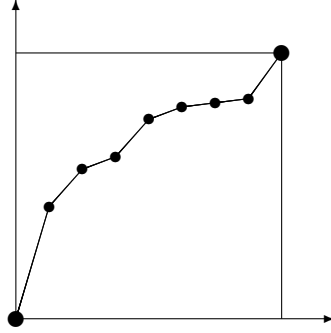
Для цього розв'яжемо рівняння

$$\begin{cases} 4/3x_1 = 9/16; \\ 4/3x_2 = 13/16; \\ -4x_3 + 4 = 13/16; \\ -4x_4 + 4 = 9/16; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 27/64; \\ x_2 = 39/64; \\ x_3 = 51/64; \\ x_4 = 53/64; \end{cases}$$

що означає, що

$$B_4 = \{0; 27/64; 9/16; 39/64; 3/4;$$

$$51/64; 13/16; 53/64; 1\}$$



2.4. Символьний спосіб опису множин A_n , та B_n , а також відображення h_n . Лема 4 дає вичерпний опис елементів множини A_n для кожного n . Множина B_n , в свою чергу, залежить не лише від n , але і від v , тому явне задання цієї множини виглядатиме складніше.

Водночас, наведений вище опис дозволить нам дати як уніфіковане зображення елементів множин A_n та B_n , так і, використавши це зображення, навести інше зображення відображення h . Попередньо введемо деякі додаткові позначення.

Відображення f , визначене формулою (1), є необоротним, втім складається з двох оборотних відображень, які позначимо

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= 2x; \\ \varphi_1(x) &= 2 - 2x.\end{aligned}$$

Обернені до вказаних відображень існують і легко можуть бути виписані явно. Позначимо обернені до відображень φ_0 та φ_1 як φ_0^{-1} та φ_1^{-1} відповідно, а ітерації цих відображень позначимо φ_0^{-n} та φ_1^{-n} відповідно. Аналогічно, користуючись формулами (2), можемо ввести функції ψ_0^{-n} та ψ_1^{-n} .

Позначення 5. Під знаками φ_0 , φ_1 , ψ_0 та ψ_1 розумітимемо не стільки формальні символи – грецькі літери з використанням індексів з метою зменшення кількості вживаних літер, а функції двох змінних, тобто розглядаються функції $\varphi(i; x)$ та $\psi(i; x)$ де $i \in \{0; 1\} \subset \mathbb{Z}$ та $x \in [0; 1]$, визначені наступним чином

$$\varphi(i; x) = \begin{cases} \varphi_0(x) & \text{при } i=0 \\ \varphi_1(x) & \text{при } i=1, \end{cases}$$

$$\psi(i; x) = \begin{cases} \psi_0(x) & \text{при } i=0 \\ \psi_1(x) & \text{при } i=1. \end{cases}$$

Доведення. Позначення полягає в тому, що з індексами 0 та 1 функцій φ_0 , φ_1 , ψ_0 та ψ_1 ми надалі працюватимемо як з цілими числами, виконуючи над ними арифметичні операції і формулюючи в таких термінах потрібні твердження.

Аналогічно до того, як відображення f було представлено в двійковій системі зчислення можемо навести відповідні представлення для функцій φ_0^{-1} та φ_1^{-1} .

Зауваження 1. Якщо двійковий запис числа $x \in [0; 1]$ має вигляд $x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots$, то виконуються рівності:

$$\begin{aligned} \varphi_0^{-1}(x) &= 0, 0\alpha_1\alpha_2 \dots \quad \text{та} \\ \varphi_1^{-1}(x) &= 0, 1\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 \dots, \end{aligned}$$

де $\bar{\alpha}_i = 1 - \alpha_i$.

Лема 11. Множина A_n є множиною усіх точок вигляду

$$x = \varphi_{i_1}^{-1}(\varphi_{i_2}^{-1}(\dots \varphi_{i_n}^{-1}(0) \dots)), \quad (7)$$

де $i_1, \dots, i_n \in \{0; 1\}$.

Доведення. Очевидно, що для будь-якого набору чисел $i_1, \dots, i_n \in \{0; 1\}$ і числа $x \in [0; 1]$ вигляду (7) виконується умова $f^n(x) = 0$, бо вона є наслідком означення функції φ_0 та φ_1 .

Те, що для різних наборів i_1, \dots, i_n числа x , визначені рівністю (7) будуть різними, випливає з явних формул для функцій φ_0^{-1} та φ_1^{-1} , наведених в зауваженні 1.

Лема 12. Для кожних $i_1, \dots, i_n \in \{0; 1\}$ та числа $x \in [0; 1]$, визначеного рівністю (7), з двійковим записом

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$$

виконуються такі умови:

1. $\alpha_1 = i_1$;
2. Для кожного $k \in \{1, \dots, n\}$ має місце рівність

$$\alpha_k = 2 \cdot \left\{ \frac{i_1 + \dots + i_k}{2} \right\},$$

тобто α_k – остача від ділення на 2 суми

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Доведення. Лема доводиться за індукцією і впливає з зауваження 1.

Мають місце аналогічні твердження, котрі описуються властивості відображень ψ_i та множин B_n .

Лема 13. Множина B_n є множиною усіх точок вигляду

$$x = \psi_{i_1}^{-1}(\psi_{i_2}^{-1}(\dots \psi_{i_n}^{-1}(0) \dots)),$$

де $i_1, \dots, i_n \in \{0; 1\}$.

Лема 14. Для кожних двох наборів чисел i_1, \dots, i_n та j_1, \dots, j_n будуть рівносильними нерівності

$$\begin{aligned} \varphi_{i_1}^{-1}(\dots \varphi_{i_n}^{-1}(0) \dots) &< \psi_{i_1}^{-1}(\dots \psi_{i_n}^{-1}(0) \dots) \quad \text{та} \\ \varphi_{j_1}^{-1}(\dots \varphi_{j_n}^{-1}(0) \dots) &< \psi_{j_1}^{-1}(\dots \psi_{j_n}^{-1}(0) \dots) \end{aligned} .$$

Наслідком цих лем є така теорема.

Теорема 3. Для строго монотонного відображення $h_n : A_n \rightarrow B_n$ і для кожних i_1, \dots, i_n виконується рівність

$$h_n(\varphi_{i_1}^{-1}(\dots \varphi_{i_n}^{-1}(0) \dots)) = \psi_{i_1}^{-1}(\dots \psi_{i_n}^{-1}(0) \dots).$$

Література

- [1] А.Б. Каток, Б. Хасселблат, Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал. — 1999. — 768 с.
- [2] Г.П. Пелюх, А.Н. Шарковский, Метод инвариантов в теории функциональных уравнений. Праці Інституту математики НАН України. Т. 95 — Киев: Ин-т математики НАН Украины. — 2013. — 255 с.
- [3] V. Fedorenko, V. Kurychenko, M. Plakhotnyk, Exponent Matrices and Topological Equivalence of Maps. — Algebra and Discrete Math. — 2007. — № 4. — P. 45-58.
- [4] М. Плахотник, Системи лінійних функціональних рівнянь в задачі про топологічну спряженість відображень. — Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки — 2014. — №4 (у друці).