Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 5, 175–198

УДК 517.9

Ю.І. Самойленко

Київський національний ун-т імені Тараса Шевченка, Київ

Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром непарного степеня при старшій похідній

Запропоновано алгоритм побудови асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами у випадку малого параметра непарного степеня при старшій похідній.

The paper deals with algorithm of constructing asymptotic two phase soliton-type solution for Korteweg-de Vries equation with variable coefficients and small parameter of odd degree at the highest derivative.

Предложен алгоритм построения асимптотического двухфазного солитоноподобного решения сингулярно возмущенного уравнения Кортевега-де Фриза с переменными коэффициентами и малым параметром нечетной степени при старшей производной.

1. Вступ. Одним з найцікавіших об'єктів сучасної теоретичної та математичної фізики є рівняння Кортевега-де Фріза [1 – 3]

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{1}$$

Це рівняння використовується для моделювання різноманітних фізичних явищ і процесів, наприклад, таких як іонно-звукові хвилі [4], магнітогідродинамічні хвилі в плазмі [5], коливання в ангармонічній решітці [6], вихорові течії в трубі [7] та інших [8, 9], і спонукало виникнення такого потужного інструмента дослідження як метод оберненої задачі розсіювання [2 – 4], який дозволив проінтегрувати в явному вигляді низку нелінійних рівнянь з частинними похідними [2].

Не менш цікавим об'єктом дослідження є рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром, оскільки такі рівняння можуть використовуватися для моделювання фізичних процесів у випадку, коли відповідні середовища є неоднорідними, а їх характеристики змінюються з часом [10]. Слід зауважити, що розв'язки таких рівнянь (зі змінними коефіцієнтами) не можна побудувати у явному вигляді методом оберненої задачі розсіювання, і тому чи не єдиним методом дослідження цих рівнянь є асимптотичні методи.

У [11 – 17] розглянуто сингулярно збурене рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon^m u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon)u_t + b(x,t,\varepsilon)uu_x, \quad m \in \mathbf{N}, \tag{2}$$

де функції $a(x,t,\varepsilon)$, $b(x,t,\varepsilon)$ записуються у вигляді асимптотичних рядів:

$$a(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k a_k(x,t), \quad b(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k b_k(x,t),$$

коефіцієнти $a_k(x,t)$, $b_k(x,t) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R} \times [0;T])$, $k \geq 0$; $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

При цьому у [11, 12] знайдено асимптотичні однофазові солітоноподібні розв'язки рівняння (2), а у [13] – його асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки. Крім того, у [14] досліджено задачу Коші для рівняння (2) і побудовано її однофазові солітоноподібні розв'язки.

Виявилося, що вигляд асимптотичного розв'язку рівняння (2) залежить від степеня малого параметра при старшій похідній. З огляду на це, у [12] побудовано асимптотичні однофазові солітоноподібні розв'язки для випадку, коли $m = 1$, у [15] – для випадку, коли $m > 1$ і непарне, а у [16] – для випадку, коли m – парне.

Цілком природно виникає питання про побудову асимптотичних двофазових солітоноподібних розв'язків рівняння (2) при різних значеннях m. Це питання частково розглядалося в [13, 17], причому у [13] побудовано асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок рівняння (2) при $m = 2$, а у [17] – при $m = 1$.

У даній статті запропоновано алгоритм побудови асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку рівнянян (2) для випадку, коли $m = 2n + 1$, $n \in \mathbf{N}$.

2. Основні позначення. Аналогічно [10, 13] позначимо через $G_1 = G_1(\mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R})$ лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau) \in \mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R}$, що для довільних невід'ємних цілих чисел n, p, q, r рівномірно щодо (x,t) на кожній компактній множині $K \subset \mathbf{R} \times [0;T]$ виконуються такі дві умови:

1^0. справджується співвідношення:

$$\lim_{\tau \to +\infty} \tau^n \frac{\partial^{\,p+q+r}}{\partial x^p \, \partial t^q \, \partial \tau^r} f(x,t,\tau) = 0, \quad (x,t) \in K,$$

2^0. існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, що

$$\lim_{\tau \to -\infty} \tau^n \frac{\partial^{\,p+q+r}}{\partial x^p \, \partial t^q \, \partial \tau^r} \bigl(f(x,t,\tau) - f^-(x,t)\bigr) = 0, \quad (x,t) \in K;$$

а через $G_1^0 = G_1^0(\mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R}) \subset G_1$ – простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau) \in G_1$, $(x,t,\tau) \in \mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R}$, що рівномірно щодо змінних (x,t) на кожному компакті $K \subset \mathbf{R} \times [0;T]$ виконується умова:

$$\lim_{\tau \to -\infty} f(x,t,\tau) = 0.$$

Нехай $G_2 = G_2(\mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ – лінійний простір таких нескінченно диференційованих функцій $f = f(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $(x,t,\tau_1,\tau_2) \in \mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, що існують функції $f_1^\pm = f_1^\pm(x,t,\tau_2)$, $f_2^\pm = f_2^\pm(x,t,\tau_1) \in G_1$ та такі нескінченно диференційовні функції $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, що для довільних невід'ємних цілих чисел p_1, p_2, q_1, q_2, β_1, β_2 мають місце співвідношення:

$$\lim_{\tau_1 \to \pm\infty} \tau_1^{p_1} \frac{\partial^{\,q_1+q_2+\beta_1+\beta_2}}{\partial x^{q_1} \partial t^{q_2} \partial \tau_1^{\beta_1} \partial \tau_2^{\beta_2}} \bigl(f(x,t,\tau_1,\tau_2) - f_1^\pm(x,t,\tau_2) -$$

$$-u_1^{\pm}(x,t)\big) = 0,$$

$$\lim_{\tau_2\to\pm\infty} \tau_2^{p_2} \frac{\partial^{\,q_1+q_2+\beta_1+\beta_2}}{\partial x^{q_1}\partial t^{q_2}\partial\tau_1^{\beta_1}\partial\tau_2^{\beta_2}} \big(f(x,t,\tau_1,\tau_2) - f_2^{\pm}(x,t,\tau_1) -$$

$$-u_2^{\pm}(x,t)\big) = 0,$$

$$(x,t)\in K, \quad k=1,\,2;$$

а $G_2^0 = G_2^0(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ – лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $(x,t,\tau_1,\tau_2)\in\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, що існують функції $f_1^{\pm} = f_1^{\pm}(x,t,\tau_2)$, $f_2^{\pm} = f_2^{\pm}(x,t,\tau_1)\in G_1^0$, і для довільних невід'ємних цілих чисел p_1, p_2, q_1, q_2, β_1, β_2 мають місце співвідношення:

$$\lim_{\tau_1\to\pm\infty} \tau_1^{p_1} \frac{\partial^{\,q_1+q_2+\beta_1+\beta_2}}{\partial x^{q_1}\partial t^{q_2}\partial\tau_1^{\beta_1}\partial\tau_2^{\beta_2}} \big(f(x,t,\tau_1,\tau_2) - f_1^{\pm}(x,t,\tau_2)\big) = 0,$$

$$\lim_{\tau_2\to\pm\infty} \tau_2^{p_2} \frac{\partial^{\,q_1+q_2+\beta_1+\beta_2}}{\partial x^{q_1}\partial t^{q_2}\partial\tau_1^{\beta_1}\partial\tau_2^{\beta_2}} \big(f(x,t,\tau_1,\tau_2) - f_2^{\pm}(x,t,\tau_1)\big) = 0,$$

$$(x,t)\in K, \quad k=1,\,2.$$

Означення 2.1. *Функція $u(x,t,\varepsilon)$ називається двофазовою солітоноподібною, якщо для довільного цілого числа $N\geq 0$ вона може бути зображена у вигляді:*

$$u(x,t,\varepsilon) = Y_N\left(x,t,\frac{S_1(x,t)}{\varepsilon},\frac{S_2(x,t)}{\varepsilon},\varepsilon\right) + O(\varepsilon^{N+1}), \tag{3}$$

де

$$Y_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)\right), \tag{4}$$

$$\tau_1 = \frac{S_1(x,t)}{\varepsilon},\ \tau_2 = \frac{S_2(x,t)}{\varepsilon};$$

функції $S_k = S_k(x,t)\in C^{\infty}(\mathbf{R}\times[0;T])$, причому $\frac{\partial S_k}{\partial x}\Big|_{\Gamma_k}\neq 0$; $\Gamma_k = \{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T],\ S_k(x,t)=0\}$, $k=1,2$; $u_j(x,t)$ – нескінченно диференційовні функції; $V_0(x,t,\tau_1,\tau_2)\in G_2^0$, $V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)\in G_2$, $j=\overline{1,N}$.

Криві Γ_k, $k=1,2$, називаються кривими розриву.

У подальшому використовується стандартне для асимптотичного аналізу позначення: запис $\Psi(x,t,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^N\right)$, $\varepsilon \to 0$, означає, що існують такі величина $\varepsilon_0 > 0$ і стала $C > 0$, яка залежить від числа N і від компакта $K \subset \mathbf{R} \times [0;T]$, що $|\Psi(x,t,\varepsilon)| \leq C\,\varepsilon^N$ для всіх $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ і всіх $(x,t) \in K$.

3. Рівняння для коефіцієнтів асимптотичного розкладу. Порівняно з розглянутими раніше у [13, 17] випадками цієї задачі структура асимптотичного солітоноподібного розв'язку рівняння (2) при $m = 2n+1$, $n \in \mathbf{N}$, суттєво ускладнюється, оскільки шуканий розв'язок записується у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j u_j(x,t) + \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j V_j(x,t,\tau_1,\tau_2) + \qquad (5)$$

$$+ \sum_{j=n+1}^{2N-n} \varepsilon^{\frac{n+j}{2}} V_j(x,t,\tau_1,\tau_2) + O(\varepsilon^{N+1}),$$

$$\tau_1 = \frac{x-\varphi_1(t)}{\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}}, \quad \tau_2 = \frac{x-\varphi_2(t)}{\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Криві $x = \varphi_s(t)$, $s = 1,2$, визначаються в процесі побудови асимптотичного розв'язку.

Функція

$$U_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j u_j(x,t)$$

називається регулярною частиною асимптотики (5), а функція

$$V_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j V_j(x,t,\tau_1,\tau_2) + \sum_{j=n+1}^{2N-n} \varepsilon^{\frac{n+j}{2}} V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)$$

– сингулярною частиною асимптотики (5). При цьому

$$Y_N(x,t,\varepsilon) = U_N(x,t,\varepsilon) + V_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon).$$

Регулярна частина $U_N(x,t,\varepsilon)$ асимптотики (5) визначається із системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку вигляду

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial t} + b_0(x,t)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \qquad (6)$$

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial t} + b_0(x,t)u_j\frac{\partial u_0}{\partial x} + b_0(x,t)u_0\frac{\partial u_j}{\partial x} = F_j(x,t),\ j=\overline{1,N}, \quad (7)$$

де функції $F_j(x,t)$, $j=\overline{1,N}$, знаходяться рекурентним чином за функціями $u_0(x,t)$, $u_1(x,t)$, …, $u_{j-1}(x,t)$.

Питання про існування розв'язку системи рівнянь (6), (7) і алгоритм її розв'язування детально розглянуто в [18, 19]. Тому надалі вважається, що функції $u_j(x,t)$, $j=\overline{0,N}$, є відомими.

Сингулярна частина асимптотики (5) визначається з системи диференціальниих рівнянь з частинними похідними вигляду

$$\begin{gathered}\frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_1^3} + 3\frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_1^2\partial\tau_2} + 3\frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_1\partial\tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_2^3} + \\ + \left[\varphi_1'(t)a_0(x,t) - b_0(x,t)u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \\ + \left[\varphi_2'(t)a_0(x,t) - b_0(x,t)u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2} - \\ - b_0(x,t)V_0\left[\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right] = 0,\end{gathered} \quad (8)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_1^3} + 3\frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_1^2\partial\tau_2} + 3\frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_1\partial\tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_2^3} + \\ + \left[\varphi_1'(t)a_0(x,t) - b_0(x,t)u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_j}{\partial \tau_1} + \\ + \left[\varphi_2'(t)a_0(x,t) - b_0(x,t)u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_j}{\partial \tau_2} - \\ - b_0(x,t)\left[\frac{\partial}{\partial \tau_1}(V_0V_j) + \frac{\partial}{\partial \tau_2}(V_0V_j)\right] = \mathcal{F}_j(x,t,\tau_1,\tau_2), \\ j=\overline{1,2N-n},\end{gathered} \quad (9)$$

де функції $\mathcal{F}_j(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,2N-n}$, визначаються рекурентним чином після знаходження функцій $V_0(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $V_1(x,t,\tau_1,\tau_2)$, …, $V_{j-1}(x,t,\tau_1,\tau_2)$.

4. Головний член асимптотики (5). Припустимо, що криві розриву $x=\varphi_s(t)$, $s=1,2$, відомі, задовольняють умову $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$, а функції $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$, $u_0(x,t)$ на цих кривих є рівними.

Позначимо

$$a_0(t) := a_0(\varphi_1(t), t) = a_0(\varphi_2(t), t), \tag{10}$$

$$b_0(t) := b_0(\varphi_1(t), t) = b_0(\varphi_2(t), t),$$

$$u_0(t) := u_0(\varphi_1(t), t) = u_0(\varphi_2(t), t).$$

Умови (10) у подальшому називаються умовами узгодженості.

Розглянемо функцію $V_0(x, t, \tau_1, \tau_2)$ на кривих розриву. Позначимо

$$V_{0s}(t, \tau_1, \tau_2) = V_0(\varphi_s(t), t, \tau_1, \tau_2), \quad s = 1, 2. \tag{11}$$

Функції $V_{0s}(t, \tau_1, \tau_2)$, $s = 1, 2$, на кривих розриву задовольняють диференціальні рівняння вигляду

$$\frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_1^3} + 3\frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_1^2 \partial \tau_2} + 3\frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_1 \partial \tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_2^3} + \tag{12}$$

$$+ [\varphi_1'(t) a_0(t) - b_0(t) u_0(t)] \frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_1} + [\varphi_2'(t) a_0(t) - b_0(t) u_0(t)] \frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_2} -$$

$$- b_0(t) V_{0s} \left[\frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_2} \right] = 0, \quad s = 1, 2.$$

Згідно умов узгодженості (10) для функцій $V_{0s}(t, \tau_1, \tau_2)$, $s = 1, 2$, виконується рівність $V_{01}(t, \tau_1, \tau_2) = V_{02}(t, \tau_1, \tau_2)$, тобто розв'язки обох рівнянь системи (12) є рівними.

Позначимо $V_0(t, \tau_1, \tau_2) = V_{0s}(t, \tau_1, \tau_2)$, $s = 1, 2$.

Рівняння (12) розглядалося в [13], де знайдено, що його двосолітонний розв'зок має вигляд

$$V_0(t, \tau_1, \tau_2) = \bar{V}_0(\xi, \eta) = -4 \left[-c_1^2 c_2^2 \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)^2}{\kappa_1 \kappa_2} e^{-2(\kappa_1 + \kappa_2)\xi} + \right. \tag{13}$$

$$+ \kappa_1 c_1^2 e^{-2\kappa_1 \xi} + \kappa_2 c_2^2 e^{-2\kappa_2 \xi} - \frac{c_1^4 c_2^2 (\kappa_1 - \kappa_2)^2 \kappa_2}{4\kappa_1^2 (\kappa_1 + \kappa_2)^2} e^{-(4\kappa_1 + 2\kappa_2)\xi} -$$

$$\left. - \frac{c_1^2 c_2^4 (\kappa_1 - \kappa_2)^2 \kappa_1}{4\kappa_2^2 (\kappa_1 + \kappa_2)^2} e^{-(2\kappa_1 + 4\kappa_2)\xi} \right] \times$$

$$\times \left[1 + \frac{c_1^2}{2\kappa_1} e^{-2\kappa_1 \xi} + \frac{c_2^2}{2\kappa_2} e^{-2\kappa_2 \xi} + \frac{c_1^2 c_2^2 (\kappa_1 - \kappa_2)^2}{4\kappa_1 \kappa_2 (\kappa_1 + \kappa_2)^2} e^{-2(\kappa_1 + \kappa_2)\xi} \right]^{-2},$$

де

$$\xi = \xi(t, \tau_1, \tau_2) = \left(\frac{1}{6} b_0(t)\right)^{1/2} \frac{\gamma_2(t)\tau_1 - \gamma_1(t)\tau_2}{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)}, \tag{14}$$

$$\eta = \eta(t, \tau_1, \tau_2) = \left(\frac{1}{6} b_0(t)\right)^{3/2} \frac{\tau_1 - \tau_2}{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)}.$$

Тут позначено

$$\gamma_s(t) = -\varphi_s'(t) a_0(t) + b_0(t) u_0(t),$$

$$\kappa_s(t) = \left(\frac{1}{6} b_0(t)\right)^{-1/2} \sqrt{\gamma_s(t)}, \quad c_s(\eta) = c_s(0) \exp\left(\kappa_s^3(t)\eta\right),$$

де припускається, що $b_0(t) > 0$, $\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)$, $\gamma_s(t) > 0$, $s = 1, 2$, $t \in [0; T]$; $c_s(0)$, $s = 1, 2$, – довільні додатні сталі.

Величини $\kappa_s(t)$, $s = 1, 2$, належать множині власних значень оператора Штурма-Ліувілля, що асоційований з рівнянням Кортевега-де Фріза [2].

Має місце твердження.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1. *функції* $a_0(x,t)$, $b_0(x,t) \in C^\infty(\mathbf{R} \times [0;T])$, *причому* $a_0(x,t) \neq 0$, $b_0(x,t) \neq 0$, $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]$;
2. *існують функції* $x = \varphi_s(t) \in C^\infty([0;T])$, $s = 1, 2$, *для яких виконуються умови узгодженості (10), причому* $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$;
3. *справджуються нерівності* $b_0(t) > 0$, $\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)$, $\gamma_s(t) > 0$, $s = 1, 2$, $t \in [0;T]$.

Тоді:

1. *функція*
$$Y_0(x, t, \varepsilon) = u_0(x,t) + V_0(t, \tau_1, \tau_2), \tag{15}$$
$$\tau_1 = \frac{x - \varphi_1(t)}{\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}}, \; \tau_2 = \frac{x - \varphi_2(t)}{\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}},$$
задовольняє рівняння (2) з точністю $O\left(\varepsilon^{-n+\frac{1}{2}}\right)$, $\varepsilon \to 0$;
2. *функція (15) при* $x \to \pm\infty$ *задовольняє рівняння (2) з точністю* $O(\varepsilon)$.

Доведення. Для доведення тверджень теореми 1 підставимо функцію (15) в рівняння (2). Враховуючи рівняння для визначення сингулярної і регулярної частин асимптотики, отримаємо, що потрібно оцінити (при $\varepsilon \to 0$) вираз:

$$g_0(x,t,\varepsilon) = \varepsilon^{-n-\frac{1}{2}} \left[a_0(x,t) - a_0(t)\right] \left[-\varphi_1'(t)\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} - \varphi_2'(t)\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right] +$$

$$+\varepsilon^{-n-\frac{1}{2}} \left[-\varphi_1'(t)\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} - \varphi_2'(t)\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right] \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k a_k(x,t) +$$

$$+a(x,t,\varepsilon)\frac{\partial u_0}{\partial t} + b(x,t,\varepsilon)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} + b(x,t,\varepsilon)V_0\frac{\partial u_0}{\partial x} +$$

$$+\varepsilon^{-n-\frac{1}{2}} \left[b_0(x,t) - b_0(t)\right] \left[\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right] V_0 +$$

$$+\varepsilon^{-n-\frac{1}{2}} \left[\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right] V_0 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k b_k(x,t) +$$

$$+\varepsilon^{-n-\frac{1}{2}} \left[b_0(x,t)u_0(x,t) - b_0(t)u_0(t)\right] \left[\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right] +$$

$$+\varepsilon^{-n-\frac{1}{2}} u_0(x,t) \left[\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right] \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k b_k(x,t) - \varepsilon^{2n+1}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}.$$

Оскільки функція $V_0(t,\tau_1,\tau_2) \in G_2^0$, то згідно умов узгодженості (10), враховуючи (4), маємо:

$$\left|\left[a_0(x,t) - a_0(t)\right] \frac{\partial V_0}{\partial \tau_1}\right| = \left|a_0(x,t) - a_0(\varphi_1(t),t)\right| \left|\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1}\right| \leq$$

$$\leq C_0 \left|x - \varphi_1(t)\right| \left|\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1}\right| = C_0\varepsilon^{n+\frac{1}{2}} \ |\tau_1| \left|\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1}\right| \leq C_1\varepsilon^{n+\frac{1}{2}},$$

де стала C_1 залежить від компакта K, на якому розглядаються записані вище нерівності.

Аналогічно знаходимо:

$$\left|\left[a_0(x,t) - a_0(t)\right] \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right| \leq C_2\varepsilon^{n+\frac{1}{2}},$$

$$\left|[b_0(x,t)-b_0(t)]\left(\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}\right)\right|\le C_3\varepsilon^{n+\frac{1}{2}},$$

$$\left|[b_0(x,t)u_0(x,t)-b_0(t)u_0(t)]\left(\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}\right)V_0\right|\le C_4\varepsilon^{n+\frac{1}{2}},$$

де сталі C_2, C_3, C_4 залежать від компакта K, на якому розглядаються записані вище нерівності.

Таким чином, отримуємо співвідношення

$$g_0(x,t,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{1-n-\frac{1}{2}}\right)=O\left(\varepsilon^{-n+\frac{1}{2}}\right),\quad \varepsilon\to 0.$$

Оскільки $V_0(t,\tau_1,\tau_2)\in G_2^0$, то при $|x|\to+\infty$ для функції $g_0(x,t,\varepsilon)$ виконується нерівність

$$|g(x,t,\varepsilon)|\le\left|a(x,t,\varepsilon)\frac{\partial u_0}{\partial t}+b(x,t,\varepsilon)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}+\varepsilon^{2n+1}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}\right|.$$

Враховуючи, що функція $u_0(x,t)$ задовольняє рівняння (6), знаходимо, що $g_0(x,t,\varepsilon)=O(\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$, при $|x|\to\pm\infty$.

Теорему 1 доведено.

5. Старші члени асимптотичного розкладу (5). Старші члени для асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку рівняння (2) на кривих розриву визначаються з системи рівнянь

$$\frac{\partial^3 V_{js}}{\partial\tau_1^3}+3\frac{\partial^3 V_{js}}{\partial\tau_1^2\partial\tau_2}+3\frac{\partial^3 V_{js}}{\partial\tau_1\partial\tau_2^2}+\frac{\partial^3 V_{js}}{\partial\tau_2^3}+ \tag{16}$$

$$+[\varphi_1'(t)a_0(t)-b_0(t)u_0(t)]\frac{\partial V_{js}}{\partial\tau_1}+[\varphi_2'(t)a_0(t)-b_0(t)u_0(t)]\frac{\partial V_{js}}{\partial\tau_2}-$$

$$-b_0(t)\left[\frac{\partial}{\partial\tau_1}(V_{0s}V_{js})+\frac{\partial}{\partial\tau_2}(V_{0s}V_{js})\right]=\mathcal{F}_{js}(t,\tau_1,\tau_2),\quad s=1,2,$$

де функції $V_{0s}(t,\tau_1,\tau_2)$, $s=1,2$, визначено в (11), $V_{js}(t,\tau_1,\tau_2)=V_j(\varphi_s(t),t,\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,2N-n}$, $s=1,2$; функції $\mathcal{F}_{js}(t,\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,2N-n}$, $s=1,2$, визначаються після знаходження функцій $V_{0s}(t,\tau_1,\tau_2)$, $V_{1s}(t,\tau_1,\tau_2)$, …, $V_{j-1,s}(t,\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,2N-n}$, $s=1,2$. Зокрема, при $j=1$ маємо

$$\mathcal{F}_{1s}(t,\tau_1,\tau_2)=a_1(\varphi_s(t),t)\left(-\varphi_1'(t)\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}-\varphi_2'(t)\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}\right)+ \tag{17}$$

$$+\left(b_0(\varphi_s(t),t)u_1(\varphi_s(t),t)+b_1(\varphi_s(t),t)u_0(\varphi_s(t),t)\right)\left(\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}\right)+$$

$$+b_1(\varphi_s(t),t)V_0\left(\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}\right),\quad s=1,2.$$

Припустимо також, що додатково до (10) виконуються умови

$$\mathcal{F}_{j1}(t,\tau_1,\tau_2)=\mathcal{F}_{j2}(t,\tau_1,\tau_2),\quad j=\overline{1,2N-n},\tag{18}$$

де припускається, що криві $x=\varphi_s(t)$, $s=1,2$, є відомими і задовольняють умову $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$.

Очевидно, що умова узгодженості (18) при $j=1$ має місце, наприклад, у випадку, коли додатково до (10) виконуються умови:

$$a_1(\varphi_1(t),t)=a_1(\varphi_2(t),t),\quad b_1(\varphi_1(t),t)=b_1(\varphi_2(t),t),\tag{19}$$

$$u_1(\varphi_1(t),t)=u_1(\varphi_2(t),t),\quad t\in[0;T].\tag{20}$$

При виконанні умов узгодженості (10), (18) має місце рівність $V_{j1}(t,\tau_1,\tau_2)=V_{j2}(t,\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,2N-n}$.

За допомогою заміни змінних $\xi=\xi(t,\tau_1,\tau_2)$, $\eta=\eta(t,\tau_1,\tau_2)$ (див. формули (14)) рівняння (16) зводяться до рівнянь вигляду:

$$\frac{\partial^3\bar V_j}{\partial\xi^3}-b_0(t)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\bar V_0\bar V_j\right)+\frac{\partial\bar V_j}{\partial\eta}=\bar{\mathcal{F}}_j(t,\xi,\eta),\quad j=\overline{1,2N-n},\tag{21}$$

де функції $\bar V_0(t,\xi,\eta)$, $\bar V_j(t,\xi,\eta)$, $\bar{\mathcal{F}}_j(t,\xi,\eta)$, $j=\overline{1,2N-n}$, отримані з $V_0(t,\tau_1,\tau_2)$, $V_j(t,\tau_1,\tau_2)$, $\mathcal{F}_j(t,\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,2N-n}$, в результаті виконання заміни змінних $(\tau_1,\tau_2)\to(\xi,\eta)$ згідно формул (14).

Зауважимо, що при виконанні умови 3 теореми 1 заміна змінних (14) є невиродженою.

Якщо функція $\bar{\mathcal{F}}_j(t,\xi,\eta)$, $j=\overline{1,2N-n}$, при кожному $\eta\geq 0$ належить простору швидко спадних щодо ξ функцій, то рівняння (21) має розв'язок $\bar V_j(t,\xi,\eta)$, $(\xi,\eta)\in\mathbf{R}\times[0;T_1]$, $j=\overline{1,2N-n}$, де $T_1>0$ – деяке число, який належить простору швидко спадних щодо змінної ξ функцій [20].

Враховуючи заміну (14), від розв'язку задачі (21) – функції $\bar V_j(t,\xi,\eta)$, $j=\overline{1,2N-n}$, повернемося до відповідного розв'язку рівняння (16).

Такий розв'язок – функція $V_j(t,\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,2N-n}$, записується у вигляді

$$V_j(t,\tau_1,\tau_2)=\tag{22}$$

$$= \bar{V}_j\left(\left(\frac{1}{6}\,b_0(t)\right)^{1/2}\frac{\gamma_2(t)\tau_1-\gamma_1(t)\tau_2}{\gamma_2(t)-\gamma_1(t)},\left(\frac{1}{6}\,b_0(t)\right)^{3/2}\frac{\tau_1-\tau_2}{\gamma_2(t)-\gamma_1(t)}\right),$$

де функція $\bar{V}_j(t,\xi,\eta)$, $j=\overline{1,2N-n}$, в правій частині (22) є розв'язком рівняння (21).

Оскільки $\bar{V}_j(t,\xi,\eta)$, $j=\overline{1,2N-n}$, при кожному $\eta\in[0;T_1)$, де T_1 згадано вище (див. також [20]), належить простору швидко спадних щодо змінної ξ функцій, то при $\gamma_2(t)\tau_1-\gamma_1(t)\tau_2\neq 0$, $t\in[0;T]$, для всіх $k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ маємо

$$\lim_{\tau_1\to\pm\infty}\tau_1^k V_j(t,\tau_1,\tau_2)=0,\qquad \lim_{\tau_2\to\pm\infty}\tau_2^k V_j(t,\tau_1,\tau_2)=0.$$

Тут додатково припускається, що для всіх $t\in[0;T]$ виконується умова

$$0\le\left(\frac{1}{6}\,b_0(t)\right)^{3/2}\frac{\tau_1-\tau_2}{\gamma_2(t)-\gamma_1(t)}<T_1.$$

Враховуючи позначення в (5), цю нерівність можна записати у вигляді

$$0\le\left(\frac{1}{6}\,b_0(t)\right)^{3/2}\frac{\varphi_2(t)-\varphi_1(t)}{a_0(t)(\varphi_1'(t)-\varphi_2'(t))}\varepsilon^{-n-\frac{1}{2}}<T_1. \tag{23}$$

Очевидно, що при виконанні умов узгодженості (10) існує таке $T_2>0$, що нерівність (23) має місце для всіх $t\in[0;T_2]$. Зауважимо, що, взагалі кажучи, $T_2=O(\varepsilon^{n+\frac{1}{2}})$.

Має місце теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються такі припущення:*

1. *умова 1 теореми 1;*
2. *функції $a_1(x,t)$, $b_1(x,t)$, $u_1(x,t)\in C^\infty(\mathbf{R}\times[0;T])$;*
3. *існують функції $x=\varphi_s(t)\in C^\infty([0;T])$, $s=1,2$, для яких виконуються умови узгодженості (10), (19), (20), причому $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$;*
4. *умова 3 теореми 1;*
5. *функція $V_1(t,\tau_1,\tau_2)$, що є розв'язком рівняння (16), належить простору G_2.*

Тоді:

1. при всіх $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]$ функція

$$Y_1(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{1} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + V_j(t,\tau_1,\tau_2)\right], \tag{24}$$

$$\tau_1 = \frac{x-\varphi_1(t)}{\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}},\ \tau_2 = \frac{x-\varphi_2(t)}{\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}},$$

задовольняє рівняння (2) з точністю $O\left(\varepsilon^{-n+\frac{3}{2}}\right)$, $\varepsilon \to 0$;

2. функція (24) при $x \to \pm\infty$ задовольняє рівняння (2) з точністю $O\left(\varepsilon^2\right)$, $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Аналогічно, як і при доведенні теореми 1 підставимо функцію (24) в рівняння (2). Враховуючи рівняння для регулярної і сингулярної частин асимптотики (4), отримуємо, що для доведення тверджень теореми 2 необхідно оцінити функцію:

$$g_1(x,t,\varepsilon) = \varepsilon^{-n-\frac{1}{2}}\left[a_0(x,t) - a_0(t)\right]\left[-\varphi_1'(t)\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} - \varphi_2'(t)\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right] +$$

$$+\varepsilon^{-n+\frac{1}{2}}\left[a_1(x,t) - a_1(t)\right]\left[-\varphi_1'(t)\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} - \varphi_2'(t)\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right] +$$

$$+\varepsilon^{-n+\frac{1}{2}}\left[a_0(x,t) - a_0(t)\right]\left[-\varphi_1'(t)\frac{\partial V_1}{\partial \tau_1} - \varphi_2'(t)\frac{\partial V_1}{\partial \tau_2}\right] +$$

$$+\varepsilon^{-n-\frac{1}{2}}\left[-\varphi_1'(t)\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} - \varphi_2'(t)\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right]\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k a_k(x,t) +$$

$$+\varepsilon^{-n+\frac{1}{2}}\left[-\varphi_1'(t)\frac{\partial V_1}{\partial \tau_1} - \varphi_2'(t)\frac{\partial V_1}{\partial \tau_2}\right]\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k a_k(x,t) +$$

$$+\varepsilon^{-n-\frac{1}{2}}\left[b_0(x,t)u_0(x,t) - b_0(t)u_0(t)\right]\left[\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right] +$$

$$+\varepsilon^{-n-\frac{1}{2}}\left[b_0(x,t) - b_0(t)\right]\left[\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right] V_0 +$$

$$+\varepsilon^{-n+\frac{1}{2}}\left[b_0(x,t)u_1(x,t) + b_1(x,t)u_0(x,t) - b_0(t)u_1(t) - b_1(t)u_0(t)\right] \times$$

$$\times \left[\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right] + \varepsilon^{-n+\frac{1}{2}}\left[b_1(x,t) - b_1(t)\right]\left[\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right] V_0 +$$

$$
\begin{gathered}
+\varepsilon^{-n+\frac{1}{2}}\left[b_0(x,t)-b_0(t)\right]\left[\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right]V_1+ \\
+\varepsilon^{-n+\frac{1}{2}}\left[b_0(x,t)u_0(x,t)-b_0(t)u_0(t)\right]\left[\frac{\partial V_1}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_1}{\partial \tau_2}\right]+ \\
+\varepsilon^{-n+\frac{1}{2}}\left[b_0(x,t)-b_0(t)\right]\left[\frac{\partial V_1}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_1}{\partial \tau_2}\right]V_0+ \\
+b(x,t,\varepsilon)(u_0+\varepsilon u_1)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)+ \\
+\varepsilon^{-n-\frac{1}{2}}\left[(u_0+\varepsilon u_1)\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k b_k(x,t)+\right. \\
\left.+\varepsilon^2 b_1(x,t)u_1(x,t)\right]\left[\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right]+ \\
+\varepsilon^{-n-\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right]V_0\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k b_k(x,t)+ \\
+\varepsilon^{-n+\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right]V_1\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k b_k(x,t)+ \\
+\varepsilon^{-n+\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial V_1}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_1}{\partial \tau_2}\right]u_0\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k b_k(x,t)+ \\
+\varepsilon^{-n+\frac{1}{2}}b(x,t,\varepsilon)u_1(x,t)\left[\frac{\partial V_1}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_1}{\partial \tau_2}\right]+ \\
+\varepsilon^{-n-\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial V_1}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_1}{\partial \tau_2}\right]V_0\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k b_k(x,t)+ \\
+\varepsilon^{-n+\frac{3}{2}}b(x,t,\varepsilon)\left[\frac{\partial V_1}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_1}{\partial \tau_2}\right]V_1+ \\
+a(x,t,\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial t}+b(x,t,\varepsilon)V_0\left[\frac{\partial u_0}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial x}\right]+ \\
+\varepsilon b(x,t,\varepsilon)V_1\left[\frac{\partial u_0}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial x}\right].
\end{gathered}
$$

Оскільки функція $V_0(t,\tau_1,\tau_2)\in G_2^0$, то згідно умов узгодженості (10) маємо:

$$|a_0(x,t)-a_0(t)|\left|\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1}\right| = |a_0(x,t)-a_0(\varphi_1(t),t)|\left|\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1}\right| \le$$

$$\le C_0\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}|\tau_1|\left|\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1}\right| \le C_1\varepsilon^{n+\frac{1}{2}},$$

де C_0, C_1 – деякі сталі, що залежать від компакта K, на якому розглядаються записані вище нерівності.

Аналогічно знаходимо

$$|a_0(x,t)-a_0(t)| \le C_2\varepsilon^{n+\frac{1}{2}},$$

$$|a_1(x,t)-a_1(t)|\left|\varphi_1'(t)\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1}+\varphi_2'(t)\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right| \le C_3\varepsilon^{n+\frac{1}{2}},$$

$$|a_0(x,t)-a_0(t)|\left|\varphi_1'(t)\frac{\partial V_1}{\partial \tau_1}+\varphi_2'(t)\frac{\partial V_1}{\partial \tau_2}\right| \le C_4\varepsilon^{n+\frac{1}{2}},$$

$$|b_0(x,t)u_0(x,t)-b_0(t)u_0(t)|\left|\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right| \le C_5\varepsilon^{n+\frac{1}{2}},$$

$$|b_0(x,t)-b_0(t)|\left|\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right| \le C_6\varepsilon^{n+\frac{1}{2}},$$

$$|b_0(x,t)u_1(x,t)+b_1(x,t)u_0(x,t)-b_0(t)u_1(t)-b_1(t)u_0(t)|\times$$

$$\times\left|\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right| \le C_7\varepsilon^{n+\frac{1}{2}},$$

$$|b_1(x,t)-b_1(t)|\left|\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right| \le C_8\varepsilon^{n+\frac{1}{2}},$$

$$|b_0(x,t)-b_0(t)|\left|\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right| \le C_9\varepsilon^{n+\frac{1}{2}},$$

$$|b_0(x,t)u_0(x,t)-b_0(t)u_0(t)|\left|\frac{\partial V_1}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_1}{\partial \tau_2}\right| \le C_{10}\varepsilon^{n+\frac{1}{2}},$$

$$|b_0(x,t)-b_0(t)|\left|\frac{\partial V_1}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_1}{\partial \tau_2}\right| \le C_{11}\varepsilon^{n+\frac{1}{2}},$$

де сталі C_j, $j=\overline{2,11}$, залежать від компакта K, на якому розглядаються записані вище нерівності.

Таким чином, отримуємо, що $g_1(x,t,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{-n+\frac{3}{2}}\right)$, $\varepsilon \to 0$.

Враховуючи рівняння для визначення регулярної частини асимптотики, маємо $g_1(x,t,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^2\right)$, $\varepsilon \to 0$, при $x \to \pm\infty$.

Теорему 2 доведено.

Розглянемо тепер задачу про знаходження старших членів ($N > 1$) асимптотичного розкладу (5).

Має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються такі припущення:*

1. *умова 1 теореми 1;*
2. *функції $a_k(x,t)$, $b_k(x,t)$, $u_k(x,t) \in C^\infty(\mathbf{R}\times[0;T])$, $k = \overline{1,N}$;*
3. *існують функції $x = \varphi_s(t) \in C^\infty([0;T])$, $s = 1,2$, для яких виконуються умови узгодженості (10), (18), причому $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$;*
4. *умова 3 теореми 1;*
5. *функції $\bar{\mathcal{F}}_j(t,\xi,\eta)$, $j = \overline{1,2N-k}$, в рівнянні (21) при всіх $t \in [0;T]$ задовольняють умову $\bar{\mathcal{F}}_j(t,\xi,\eta) \in C^\infty(0,\Theta;S)$, $j = \overline{1,2N-k}$, для деякого $\Theta > 0$.*

Тоді, якщо $n \geq N$, то функція вигляду

$$Y_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left(u_j(x,t) + V_j(t,\tau_1,\tau_2)\right), \tag{25}$$

$$\tau_s = \frac{x-\varphi_s(t)}{\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}},\ s = 1,2,$$

задовольняє рівняння (2) на множині $\mathbf{R}\times[0;\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}T]$ з точністю $O(\varepsilon^{N-n+\frac{1}{2}})$, $\varepsilon \to 0$, а якщо $n < N$, то функція вигляду

$$Y_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j u_j(x,t) + \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j V_j(t,\tau_1,\tau_2) + \tag{26}$$

$$+\sum_{j=n+1}^{2N-n} \varepsilon^{\frac{n+j}{2}} V_j(t,\tau_1,\tau_2), \quad \tau_s = \frac{x-\varphi_s(t)}{\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}},\ s = 1,2,$$

задовольняє рівняння (2) на множині $\mathbf{R}\times[0;\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}T]$ з точністю $O(\varepsilon^{N-n+\frac{1}{2}})$, $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Розглянемо спочатку функцію (25) і покажемо, що ця функція задовольняє (2) з точністю до доданків порядку $O(\varepsilon^{N+\frac{1}{2}-n})$. Для цього аналогічно доведенню теореми 1 необхідно оцінити в околі кожної з кривих $x = \varphi_s(t)$, $s = 1, 2$, функцію

$$g_N(x,t,\varepsilon) =$$

$$= a(x,t,\varepsilon)\left[\sum_{j=0}^{n}\varepsilon^j\left[\frac{\partial V_j}{\partial t} - \varepsilon^{-n-\frac{1}{2}}\left(\varphi_1'(t)\frac{\partial V_j}{\partial \tau_1} + \varphi_2'(t)\frac{\partial V_j}{\partial \tau_2}\right)\right]\right] -$$

$$-\left[\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(\frac{\partial V_j}{\partial t} - \varepsilon^{-n-\frac{1}{2}}\left(\varphi_1'(t)\frac{\partial V_j}{\partial \tau_1} + \varphi_2'(t)\frac{\partial V_j}{\partial \tau_2}\right)\right)\right] \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k a_k(\varphi_s(t),t) + b(x,t,\varepsilon)\left[\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(u_j(x,t) + V_j(t,\tau_1,\tau_2)\right.\right] \times$$

$$\times\left[\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \varepsilon^{-n-\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial V_j}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_j}{\partial \tau_2}\right)\right)\right] -$$

$$-b(x,t,\varepsilon)\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k u_k(x,t)\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k\frac{\partial u_k}{\partial x} -$$

$$-\varepsilon^{-n-\frac{1}{2}}\sum_{\substack{p,q,r=0\\ p+q+r\le N}}\varepsilon^{p+q+r}b_p(\varphi_s(t),t)u_q(\varphi_s(t),t)\left(\frac{\partial V_r}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_r}{\partial \tau_2}\right) -$$

$$-\varepsilon^{-n-\frac{1}{2}}\sum_{\substack{p,q,r=0\\ p+q+r\le N}}\varepsilon^{p+q+r}b_p(\varphi_s(t),t)V_q\left(\frac{\partial V_r}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_r}{\partial \tau_2}\right) -$$

$$-\sum_{\substack{p,q,r=0\\ p+q+r\le N}}\varepsilon^{p+q+r}b_p(\varphi_s(t),t)V_q\frac{\partial u_r(\varphi_s(t),t)}{\partial x}.$$

Тоді, оскільки згідно теореми про середнє для довільних невід'ємних цілих чисел p, q, r, для яких $p+q+r \leq N$, виконується нерівність

$$\left| b_p(x,t)u_q(x,t)\left(\frac{\partial V_r}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_r}{\partial \tau_2}\right) - \right.$$

$$\left. -b_p(\varphi_1(t),t)u_q(\varphi_1(t),t)\left(\frac{\partial V_r}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_r}{\partial \tau_2}\right)\right| \leq$$

$$\leq C_{01}\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}|\tau_1| \left|\frac{\partial V_r}{\partial \tau_1}\right| + C_{02}\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}|\tau_1| \left|\frac{\partial V_r}{\partial \tau_2}\right| \leq$$

$$\leq C_{01}\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}|\tau_1| \left|\frac{\partial V_r}{\partial \tau_1}\right| + C_{02}\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}|\tau_2| \left|\frac{\partial V_r}{\partial \tau_2}\right| + C_{02}\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}|\tau_1-\tau_2| \left|\frac{\partial V_r}{\partial \tau_2}\right|,$$

то при виконанні умови $|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)| \leq \varepsilon^{n+\frac{1}{2}}T$, тобто при $|\tau_1-\tau_2| \leq T$, отримуємо:

$$\left| b_p(x,t)u_q(x,t)\left(\frac{\partial V_r}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_r}{\partial \tau_2}\right) - \right.$$

$$\left. -b_p(\varphi_1(t),t)u_q(\varphi_1(t),t)\left(\frac{\partial V_r}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_r}{\partial \tau_2}\right)\right| \leq C_1\varepsilon^{n+\frac{1}{2}},$$

де C_{01}, C_{02}, C_1 – деякі сталі, що залежать від компакта K, на якому розглядаються записані вище нерівності.

Аналогічно знаходимо, що для довільних невід'ємних цілих чисел p, q, r, для яких $p+q+r \leq N$, має місце нерівність:

$$\left| b_p(x,t)V_q(x,t)\left(\frac{\partial V_r}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_r}{\partial \tau_2}\right) - \right.$$

$$\left. -b_p(\varphi_1(t),t)V_q(\varphi_1(t),t)\left(\frac{\partial V_r}{\partial \tau_1}+\frac{\partial V_r}{\partial \tau_2}\right)\right| \leq C_2\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}.$$

Крім того, для кожного $k=\overline{0,N}$ виконується нерівність

$$\left| a_k(x,t)\frac{\partial V_r}{\partial \tau_1} - a_k(\varphi_s(t),t)\frac{\partial V_r}{\partial \tau_1}\right| \leq C_3\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}, \quad s=1,2,$$

де C_2, C_3 – деякі сталі, що залежать від компакта K, на якому розглядаються записані вище нерівності.

При цьому вважається, що $|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)| \leq \varepsilon^{n+\frac{1}{2}}T$.

Звідси випливає асимптотична рівність

$$g_N(x,t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{N-n+\frac{1}{2}}), \quad \varepsilon \to 0.$$

Розглянемо тепер функцію (26). Позначимо

$$k(j) = \left[\frac{2N+2-2j}{2n+1}\right],$$

де $\left[\frac{2N+2-2j}{2n+1}\right]$ – ціла частина числа $(2N+2-2j)/(2n+1)$.

Оцінимо вираз

$$g_N(x,t,\varepsilon) = a(x,t,\varepsilon)\times$$

$$\times\left[\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{j=0}^{n}\varepsilon^j\left(\frac{\partial V_j}{\partial t} - \varepsilon^{-n-\frac{1}{2}}\left(\varphi_1'(t)\frac{\partial V_j}{\partial \tau_1} + \varphi_2'(t)\frac{\partial V_j}{\partial \tau_2}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=n+1}^{2N-n}\varepsilon^j\left(\frac{\partial V_j}{\partial t} - \varepsilon^{\frac{-n-1+j}{2}}\left(\varphi_1'(t)\frac{\partial V_j}{\partial \tau_1} + \varphi_2'(t)\frac{\partial V_j}{\partial \tau_2}\right)\right)\right] +$$

$$+ b(x,t,\varepsilon)\left(\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j u_j + \sum_{j=0}^{n}\varepsilon^j V_j + \sum_{j=n+1}^{2N-n}\varepsilon^{\frac{n+j}{2}}V_j\right)\times$$

$$\times\left[\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\frac{\partial u_j}{\partial x} + \sum_{j=0}^{n}\varepsilon^{-n-\frac{1}{2}+j}\left(\frac{\partial V_j}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_j}{\partial \tau_2}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=n+1}^{2N-n}\varepsilon^{\frac{-n-1+j}{2}}\left(\frac{\partial V_j}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_j}{\partial \tau_2}\right)\right] -$$

$$- \sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(\sum_{0\le k\le k(j)}\varepsilon^{k\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{\tau_s^k}{k!}\left.\frac{\partial^k a_j(x,t)}{\partial x^k}\right|_{x=\varphi_s(t)}\right)\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\frac{\partial u_j}{\partial t} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(\sum_{0\le k\le k(j)}\varepsilon^{k\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{\tau_s^k}{k!}\left.\frac{\partial^k a_j(x,t)}{\partial x^k}\right|_{x=\varphi_s(t)}\right)\times$$

$$\times\left[\sum_{j=0}^{n}\varepsilon^{-n-\frac{1}{2}+j}\left(\varphi_1'(t)\frac{\partial V_j}{\partial \tau_1} + \varphi_2'(t)\frac{\partial V_j}{\partial \tau_2}\right) - \right.$$

$$
\left.-\sum_{j=k+1}^{2N-n}\varepsilon^{\frac{-n-1}{2}+j}\left(\varphi_1'(t)\frac{\partial V_j}{\partial\tau_1}+\varphi_2'(t)\frac{\partial V_j}{\partial\tau_2}\right)\right]-
$$

$$
-\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(\sum_{0\le k\le k(j)}\varepsilon^{k\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{\tau_s^k}{k!}\frac{\partial^k b_j(x,t)}{\partial x^k}\bigg|_{x=\varphi_s(t)}\right)\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\frac{\partial u_j}{\partial x}\ \sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j u_j-
$$

$$
-\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(\sum_{0\le k\le k(j)}\varepsilon^{k\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{\tau_s^k}{k!}\frac{\partial^k b_j(x,t)}{\partial x^k}\bigg|_{x=\varphi_s(t)}\right)\times
$$

$$
\times\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\frac{\partial u_j}{\partial x}\ \left(\sum_{j=0}^{n}\varepsilon^j V_j+\sum_{j=n+1}^{2N-n}\varepsilon^{\frac{n+j}{2}}V_j\right)-
$$

$$
-\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(\sum_{0\le k\le k(j)}\varepsilon^{k\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{\tau_s^k}{k!}\frac{\partial^k b_j(x,t)}{\partial x^k}\bigg|_{x=\varphi_s(t)}\right)\times
$$

$$
\times\left[\sum_{j=0}^{n}\varepsilon^{-n-\frac{1}{2}+j}\left(\frac{\partial V_j}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_j}{\partial\tau_2}\right)+\sum_{j=n+1}^{2N}\varepsilon^{\frac{-n-1+j}{2}}\left(\frac{\partial V_j}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_j}{\partial\tau_2}\right)\right]\times
$$

$$
\times\left(\sum_{j=0}^{n}\varepsilon^j V_j+\sum_{j=n+1}^{2N}\varepsilon^{\frac{n+j}{2}}V_j\right)-
$$

$$
-\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(\sum_{0\le k\le k(j)}\varepsilon^{k\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{\tau_s^k}{k!}\frac{\partial^k b_j(x,t)}{\partial x^k}\bigg|_{x=\varphi_s(t)}\right)\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\frac{\partial u_j}{\partial x}\times
$$

$$
\times\left[\sum_{j=0}^{n}\varepsilon^{-n-\frac{1}{2}+j}\left(\frac{\partial V_j}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_j}{\partial\tau_2}\right)+\sum_{j=n+1}^{2N-n}\varepsilon^{\frac{j-n-1}{2}}\left(\frac{\partial V_j}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_j}{\partial\tau_2}\right)\right]+
$$

$$
+\sum_{k=N+1}^{\infty}\varepsilon^k a_k(x,t)\left[\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\frac{\partial u_j}{\partial t}+\sum_{j=0}^{n}\varepsilon^j\frac{\partial V_j}{\partial t}-\right.
$$

$$
\left.-\sum_{j=n+1}^{2N-n}\varepsilon^{\frac{-n-1}{2}+j}\left(\varphi_1'(t)\frac{\partial V_j}{\partial\tau_1}+\varphi_2'(t)\frac{\partial V_j}{\partial\tau_2}\right)\right]+
$$

$$+\left(\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j u_j+\sum_{j=0}^{n}\varepsilon^j V_j+\sum_{j=n+1}^{2N-n}\varepsilon^{\frac{n+j}{2}}V_j\right)\sum_{k=N+1}^{\infty}\varepsilon^k b_k(x,t)\times$$

$$\times\left[\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\frac{\partial u_j}{\partial x}+\sum_{j=0}^{n}\varepsilon^{-n-\frac{1}{2}+j}\left(\frac{\partial V_j}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_j}{\partial\tau_1}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=n+1}^{2N-n}\varepsilon^{\frac{-n-1}{2}+j}\left(\frac{\partial V_j}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_j}{\partial\tau_2}\right)\right].$$

Використовуючи формулу Тейлора для функції $a_j(x,t)$, $j=\overline{0,N}$, в околі кривої $x=\varphi_s(t)$, $s=1,2$, знаходимо

$$\left|a_j(x,t)-a_j(\varphi_s,t)-\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}\tau_s\frac{\partial a_j(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\varphi_s(t)}-$$

$$-\varepsilon^{2\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{\tau_s^2}{2!}\frac{\partial^2 a_j(x,t)}{\partial x^2}\bigg|_{x=\varphi_s(t)}-$$

$$\left.-\ldots-\varepsilon^{k(j)}\frac{\tau_s^{k(j)}}{k(j)!}\frac{\partial^{k(j)}a_j(x,t)}{\partial x^{k(j)}}\bigg|_{x=\varphi_s(t)}\right|\left|\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}\right|\le C_1\varepsilon^{(k(j)+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

При цьому $s=1,2$ і вважається, що виконується нерівність $|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|\le\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}T$.

Тоді, враховуючи, що функція $V_j(t,\tau_1,\tau_2)\in G_2$, отримуємо нерівність

$$\left|\left(a(x,t,\varepsilon)-\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\sum_{0\le k\le k(j)}\varepsilon^{k\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{\tau_s^k}{k!}\frac{\partial^k a_j(x,t)}{\partial x^k}\bigg|_{x=\varphi_s(t)}\right)\frac{\partial V_j}{\partial\tau_1}\right|\le$$

$$\le C_2\varepsilon^{\rho},\quad s=1,2,$$

де C_2 – деяка стала, що залежить від компакта, на якому розглядається записана вище нерівність,

$$\rho=\min_{j=\overline{0,N}}\left\{(k(j)+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)+j\right\}.$$

Таким чином, має місце оцінка

$$\left| \left(a(x,t,\varepsilon) - \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \sum_{0 \le k \le k(j)} \varepsilon^{k\left(n+\frac{1}{2}\right)} \frac{\tau_s^k}{k!} \frac{\partial^k a_j(x,t)}{\partial x^k} \bigg|_{x=\varphi_s(t)} \right) \frac{\partial V_j}{\partial \tau_1} \right| \le$$

$$\le C\varepsilon^{(m+1)(n+1/2)}, \quad s = 1, 2,$$

де C – деяка стала, яка залежить від компакта, на якому розглядається записана вище нерівність, і від числа m, яке визначається рівністю $m = \left[\frac{2N}{2n+1}\right]$.

Тут позначення $[\alpha]$ означає цілу частину числа α.

Аналогічні нерівності (такого самого порядку стосовно малого параметра) виконуються і для інших доданків виразу для функції $g_N(x,t,\varepsilon)$.

Тоді, враховуючи вигляд функції $g_N(x,t,\varepsilon)$, отримуємо, що $g_N(x,t,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{N-n+\frac{1}{2}}\right)$, $\varepsilon \to 0$.

Теорему 3 доведено.

Зауваження. *З теореми 3 випливає, що для довільного $N \ge 0$ можна побудувати функцію $Y_N(x,t,\varepsilon)$, яка задовольняє умови означення 2.1, тобто ця функція є N–им наближенням для асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку рівняння (2).*

Висновки. Побудовано асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами у випадку, коли малий параметр при старшій похідній має непарний степінь.

Доведено теорему про точність, з якою побудований асимптотичний розв'язок задовольняє вихідне рівняння.

Література

[1] Korteweg D.J., de Vries G. On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves // Philos. Mag. — 1895. — № 39. — P. 422 – 433.

[2] Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett. — 1967. — **19**. — P. 1095 – 1097.

[3] Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of "solitons"/ in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. — 1965. — **15**. — P. 240 – 243.

[4] Tappert F.D. Improved Korteweg-de Vries equation for ion acoustic waves // Phys. Fluids. — 1975. — **15**. — P. 2446 – 2447.

[5] Kever H., Morikawa G.K. Korteweg-de Vries equation for nonlinear hydromagnetic waves in a warm collision free plasma //Phys. Fluids. — 1969. — **12**. — P. 2090 – 2093.

[6] Zabusky N.J. Solitons and energy transport in nonlinear lattices // Comput. Phys. Comm. — 1973. — **5**. — P. 1 – 10.

[7] Leibovich S. Weakly nonlinear waves in rotating fluids // Journ. Fluid. Mech. — 1970. — **42**. — P. 803 – 822.

[8] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. — М.: Наука, 1988. — 368 с.

[9] Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. — М.: Советское радио, 1977. — 368 с.

[10] Маслов В.П., Омельянов Г.А. Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи матем. наук. — 1981. — Вып. 36 (219), № 2. — С. 63 – 124.

[11] Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І. Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 1. — С. 111 – 124.

[12] Samoylenko Yu. I. Asymptotical expansions for one-phase soliton-type solution to perturbed Korteweg-de Vries equation // Proceedings of the Fifth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". — K.: Institute of Mathematics, 2004. — **3**. — P. 1435 – 1441.

[13] Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І. Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 3. – С. 378 – 387.

[14] Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І. Асимптотичні розв'язки задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 1. — С. 122 – 132.

[15] Самойленко Ю. І. Асимптотичні розв'язки задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром парного степеня при старшій похідній // Науковий вісник Чернівецького ун-ту: Збірник наукових праць. Вип. 485. Математика. — 2009. — С. 102 — 107.

[16] Самойленко Ю. І. Задача Коші для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малою дисперсією // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наукових праць. Вип. 336 — 337. Математика. — 2007. — С. 170 – 177.

[17] Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І. Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром першого степеня при старшій похідній // Вісник Київського національного університету. Математика. Механіка. — 2010. — Вип. 23. — С. 19 – 24.

[18] Самойленко Ю.І. Існування розв'язку задачі Коші для рівняння Хопфа зі змінними коефіцієнтами у просторі швидко спадних функцій // Збірник праць Інституту математики НАН України — 2012. — **9**, № 1. — С. 293 – 300.

[19] Самойленко Ю. І. Існування розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами у просторі швидко спадних функцій // Буковинський мат. журн. – 2013. — **1**, № 1 — 2. — С. 118 – 122.

[20] Фаминский А.В. Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза и его обобщений // Труды семинара им. И.Г.Петровского. — 1988. — Вып.13. — С. 56 – 105.