Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 5, 210–220

УДК 532.595

І.Ю. Семенова

Київський національний ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ
E-mail: is25@bigmir.net

Дослідження коливань рідини з вільною поверхнею в гіперболічному резервуарі

Розглядається задача моделювання коливань рідини з вільною поверхнею в двохпорожнинному гіперболоїді. Досліджено вплив глибини рідкого наповнення на власні частоти коливань двох порожнинного гіперболоїда. Порівняно залежність гідродинамічних коефіцієнтів від глибини заповнення та кута напіврозчину асимптотичного конуса з гіперболічним резервуаром. Визначено межу та ступінь впливу нижнього днища (глибини заповнення) на величину частоти власних коливань рідини. Проведено оцінку похибок отриманих результатів.

Вступ. Розглядається задача коливань рідини з вільною поверхнею в резервуарі, що має форму двохпорожнинного гіперболоїда. Задача про збурений рух твердого тіла, частково заповненого рідиною, може бути приведена до розв'язку двох крайових задач математичної фізики [4, 5]. Перша з них є задачею про визначення власних значень і складається із знаходження значень частотного параметра λ (власних значень), для яких існують ненульові розв'язки φ рівняння

$$\Delta\varphi = 0 \ \text{ в } \ \tau,$$

що задовольняє крайовим умовам

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \lambda \varphi \text{ на } S_0. \tag{1}$$

Друга задача є задачею Неймана і може бути представлена у вигляді:

$$\begin{gathered} \Delta \varphi = 0 \ \text{ в } \ \tau, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}}{\|\vec{\nabla}\eta\|} \ \text{ на } \ S \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\varphi\right) + U = 0 \ \text{ на } \ S, \end{gathered} \tag{2}$$

Рух описується в декартовій системі координат $Oxyz$, пов'язаній з резервуаром. Для опису коливань обмеженого об'єму рідини у резервуарі введені наступні позначення: τ – область, яку займає рідина, S – вільна поверхня рідини, Σ – змочувана стінка резервуару, $\eta(x, y, z, t) = 0$ – рівняння вільної поверхні рідини, U – потенційна енергія зовнішніх сил, що діють на рідину.

Об'єкт дослідження. Математичне формулювання задачі динаміки системи резервуар-рідина з вільною поверхнею є сукупністю кінематичних і динамічної граничних умов. Кінематичні умови необхідно задовольнити до застосування варіаційного принципу і динамічної граничної умови. При цьому динамічна гранична умова є природною для варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського.

Першим етапом розв'язання нелінійної задачі про коливання рідини є введення недекартової параметризації області, яку займає рідина [4]. В нових параметрах рідина набуває циліндричної форми і це дає можливість представити рівняння вільної поверхні в розв'язаному щодо однієї з координат вигляді.

Варіаційне формулювання класичної задачі про визначення частот та форм коливань (1) має вигляд:

$$\delta I = 0, \quad \text{где} \quad I = \int\limits_{\tau_0} (\vec{\nabla}\varphi)^2 d\tau - \lambda \int\limits_{S_0} \varphi^2 dS. \tag{3}$$

Для знаходження мінімуму функціоналу (3) застосовується метод Рітца [1].

Розклад потенціалу швидкостей представляємо як лінійну комбінацію базисних функцій w_k :

$$\varphi \sim w_k^{(m)}(r,z) \begin{array}{c} \sin(m\theta) \\ \cos(m\theta) \end{array} ; \tag{4}$$

де $w_k^{(m)}(r,z)$ є системою гармонічних поліномів [4], які одержуються з фундаментальних розв'язків рівняння Лапласа для сферичної системи координат, перетвореними до циліндричної системи. Ці функції взагалі не залежать від геометрії області і для їх обчислення, а також визначення їх похідних існують відповідні рекурентні співвідношення [4]. Це дозволяє легко отримувати функції та їх похідні навіть для великих індексів, що важливо при комп'ютерній реалізації. Прийнятий розклад задовольняє вимогам повноти, ортогональності та гармонічності, проте не задовольняє кінематичним граничним умовам на твердих стінках і на вільній поверхні.

Оскільки умова неперетікання на входить у постановку задачі (1), тобто не накладається ніяких обмежень на рух рідини вище рівня незбуреної вільної поверхні, для успішного розв'язання нелінійної задачі застосовується метод допоміжної області [1, 2]. При цьому у якості базису приймаються не форми коливань рідини з вільною поверхнею, а близькі до них функції, які додатково задовольняють умовам розв'язності задачі. Першим етапом в алгоритмі побудови системи базисних функцій є додаткове збільшення глибини заповнення резервуару $\Delta\tau$, де $\Delta\tau$ вибирається на основі вимог умови неперетікання на продовженні змочуваної стінки бака, куди можуть досягати гребні хвиль. Класичним методом розв'язується задача для області $\tau + \Delta\tau$. Знайдений розв'язок уточнюється методом ітерацій, а функції з однаковим окружним номером ортогоналізуються. Для оцінки частотних характеристик і контролю власні числа для кожної функції визначаються за методом Релея.

По аналогії з розв'язками задач для інших форм резервуарів для розв'язання нелінійної задачі застосовувались такі координатні функції:

$$\psi_1 = \psi_{11}^* \sin\theta; \psi_2 = \psi_{11}^* \cos\theta; \psi_3 = \psi_{01}^*; \psi_4 = \psi_{21}^* \sin 2\theta;$$

$$\psi_5 = \psi_{21}^* \cos 2\theta; \psi_6 = \psi_{02}^*; \psi_7 = \psi_{31}^* \sin 3\theta; \psi_8 = \psi_{31}^* \cos 3\theta;$$

$$\psi_9 = \psi^*_{12} \sin\theta; \psi_{10} = \psi^*_{12} \cos\theta;$$

де ψ^*_{mk} – розв'язок задачі про уточнене визначення форми коливань рідини кутового номера m, якому відповідає k-е власне число (прийнято розташування координатних функцій відповідно до зростання власних чисел). На основі модифікаційного методу допоміжної області раніше були побудовані координатні функції для розв'язання задачі про нелінійні коливання рідини в конічному, сферичному, параболічному та циліндричному (для порівняння) баках. Отримані функції з точністю 10^{-5} і вище задовольняли умові неперетікання на стінках резервуару, і з точністю порядку 10^{-3} на продовженні стінки над вільною поверхнею.

Дискретна модель системи "гіперболічний резервуар – рідина з вільною поверхнею" у вигляді системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку – рівнянь сумісного руху системи "резервуар – рідина" в амплітудних параметрах та параметрах руху несучого тіла на основі методики робіт [1, 2] має вигляд:

$$\sum_i \ddot{a}_i \left\{ V^1_{ri} + \sum_j a_j V^2_{rij} + \sum_{i,j} a_i a_j V^3_{rijk} \right\} + \tag{5}$$

$$+\ddot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{U}^1_r + \sum_i a_i \vec{U}^2_{ri} + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{U}^3_{rij} + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{U}^4_{rijk} \right\} =$$

$$= \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j V^{2*}_{ijr} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k V^{3*}_{ijkr} - g\left\{ \sum_i a_i W^2_{ir} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} \sum_{i,j} a_i a_j W^3_{ijr} + \sum_{i,j,k} W^4_{ijkr} \right\},$$

$$\frac{\rho}{M_T + M_F} \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[\vec{U}^1_i + \sum_{i,j} a_j \vec{U}^2_{i,j} + \sum_{i,j,k} a_j a_k \vec{U}^3_{ijk} \right] \right\} + \ddot{\vec{\varepsilon}} = \tag{6}$$

$$= \frac{\vec{F}}{M_T + M_F} - g\vec{k} - \frac{\rho}{M_T + M_F} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \left\{ \vec{U}^2_{ij} + 2 \sum_k \dot{a}_k \vec{U}^3_{ijk} \right\}.$$

де ρ – щільність рідини, g – прискорення гравітаційних сил, M_F та M_T – маси рідини та резервуару відповідно.

Рівняння (5) описують динаміку амплітуд коливань вільної поверхні рідини, а рівняння (6) – динаміку резервуару, який рухається поступально. Сумісний рух резервуару з рідиною повністю характеризується незалежними узагальненими координатами a_i та $\vec{\varepsilon}$.

Для визначення власної частоти коливань механічної системи "гіперболічний резервуар – рідина з вільною поверхнею", у відповідності до загальної теорії коливань [3] , представимо рівняння руху (5 – 6) у лінеаризованому вигляді для першої антисиметричної форми. Вважаємо, що рух може здійснюватися в горизонтальному напрямі по координаті ε_y

$$\ddot{a}_1 V_{11}^1 + \ddot{\varepsilon}_y U_1^1 + g a_i W_{ir}^2 = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\rho}{M_T + M_F} \ddot{a}_1 U_1^1 + \ddot{\varepsilon}_y = 0 \tag{8}$$

з урахуванням позначень

$$\lambda_1 = \frac{U_1^1}{V_{11}^1}; \lambda_2 = \frac{\rho U_1^1}{M_T + M_F}$$

представимо у канонічному вигляді:

$$\ddot{a}_1 + \lambda_1 \ddot{\varepsilon_y} + a_1 \omega_1^2 = 0 \tag{9}$$

$$\lambda_2 \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon_y} = 0 \tag{10}$$

Помножимо рівняння (10) на , віднімемо від (9)

$$\ddot{a}_1 (1 - \lambda_1 \lambda_2) + a_1 \omega_1^2 = 0$$

і представимо у канонічному вигляді:

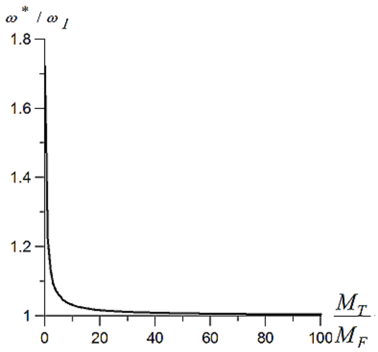
$$\ddot{a}_1 + \frac{\omega_1^2}{1 - \lambda_1 \lambda_2} a_1 = 0.$$

Отримаємо формулу для представлення власної частоти механічної системи "гіперболічний резервуар – рідина з вільною поверхнею":

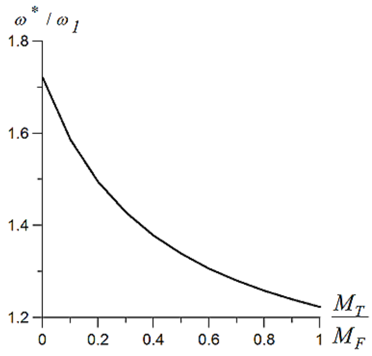
$$\omega^* = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - \lambda_1 \lambda_2}} \tag{11}$$

Власна частота системи при збільшенні маси резервуару M_T буде наближатися до власної частоти ω_1 першої антисиметричної форми, оскільки при збільшенні M_T механічні в'язі стають більш слабкими. Це підтверджує відому теорему механіки: при додаванні механічних в'язей частота зростає. Значення безрозмірної власної частоти

$\frac{\omega^*}{\omega_1}$ механічної системи "гіперболічний резервуар – рідина з вільною поверхнею" в залежності від співвідношення мас резервуару та рідини наведено на Рис. 1 (при цьому рівняння утворюючої резервуару має вигляд $r = \frac{a}{b}\sqrt{(x+H+c)^2 - c^2}$).



а) $0 < \frac{M_T}{M_F} < 100$

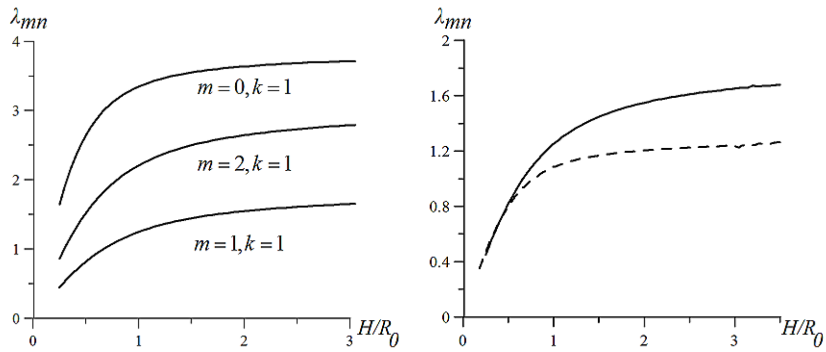


б) $0 < \frac{M_T}{M_F} < 1$

Рис. 1. Залежність коефіцієнту власної частоти системи від відношення мас резервуару та рідини.

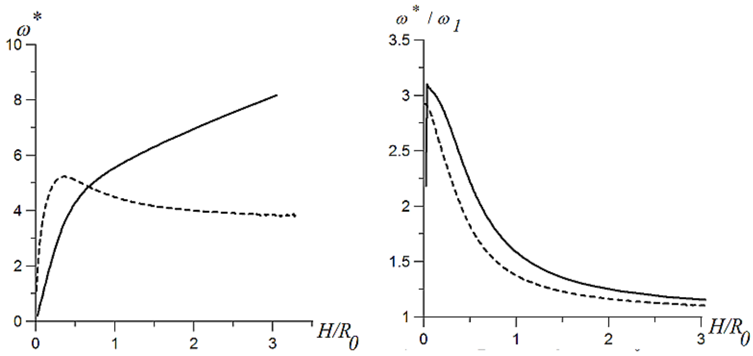
Результати чисельного розв'язку. Розглянемо результати розв'язання задачі для резервуару, що має форму гіперболоїда з рівнянням утворюючої $r = \frac{a}{b}\sqrt{(x+H+c)^2 - c^2}$ з вертикальною віссю OZ. Розв'язок задачі побудований на основі розкладу по 22 гармонічних поліномах. Для всіх випадків приймали $M_T = 0,1M_F$, $R = 1$ значення константи ρ було обране як для води. Алгебраїчна проблема власних чисел розв'язувалась при $\varepsilon = 10^{-19}$. Модифікований метод використовувався при $\Delta H = 0.2R$ (значення ΔH визначає розмір допоміжних областей $\Delta\Sigma$ та $\Delta\tau$).

Графічні залежності частотного параметру від відносної глибини заповнення гіперболічного резервуару для форм $m = 1, k = 1; m = 2, k = 1; m = 0, k = 1$ (Рис. 2а). Як видно з графіків залежність частоти від глибини наближається до деякого асимптотичного значення. Графіки демонструють, що на великих глибинах ($H \gg 2R$) частота майже не залежить від H. На Рис. 2б приведені результати залежності частотного параметру від відносної глибини заповнення гіперболічного резервуару $r = \frac{a}{b}\sqrt{(x+H+c)^2 - c^2}$ (суцільна крива) та усіченого асимптотичного конусу $r = \frac{a}{c}(x + H + c)$ (штрихова) для форм $m = 1, k = 1$.



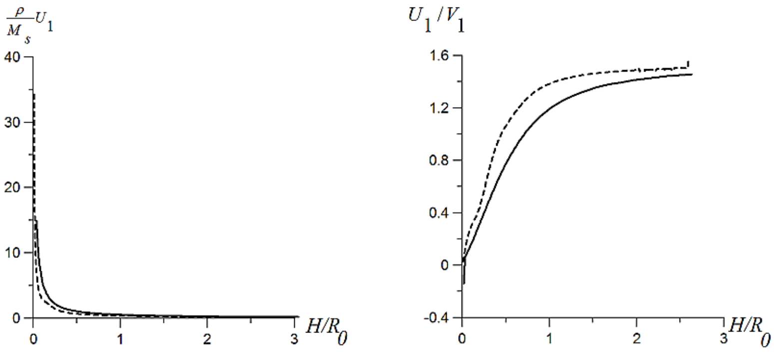
а) для трьох перших форм б) для форми m=1, k=1

Рис. 2. Залежність частот від відносної глибини заповнення.



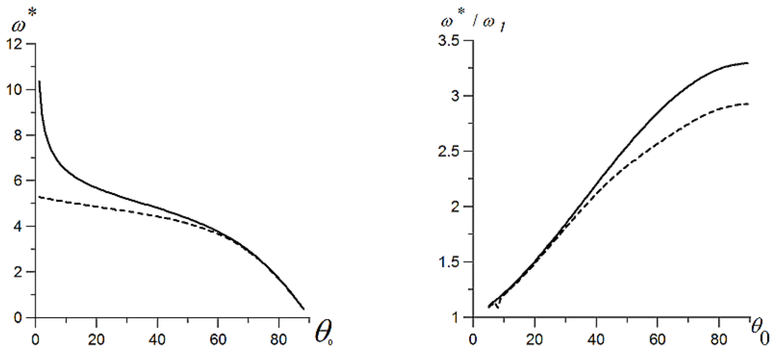
а) власна частота системи б) коефіцієнт власної частоти

Рис. 3. Залежність гідродинамічних коефіцієнтів від відносної глибини заповнення.



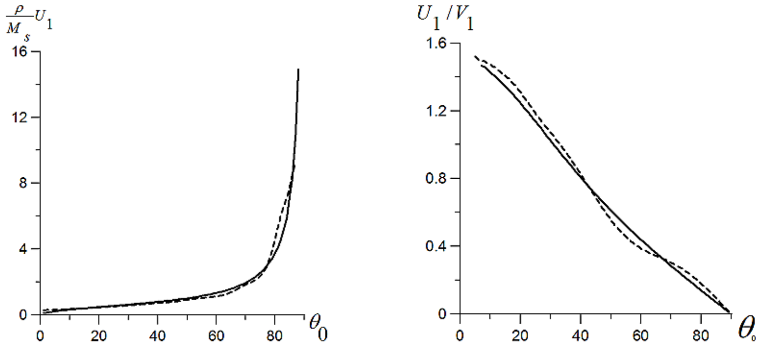
а) коефіцієнт інерційного зв'язку б) коефіцієнт приєднаних мас

Рис. 4. Залежність гідродинамічних коефіцієнтів від відносної глибини заповнення.



а) власна частота системи б) коефіцієнт власної частоти системи

Рис. 5. Залежність гідродинамічних коефіцієнтів від кута конусності.



а) коефіцієнт інерційного зв'язку б) коефіцієнт приєднаних мас

Рис. 6. Залежність гідродинамічних коефіцієнтів від кута конусності.

Результати приведені для однакових відносних глибин заповнення резервуарів. В області малих заповнень, коли кривизна стінок резервуару незначна, значення частот майже співпадають, а із зростанням відносної глибини значення частот розбігаються. Це пояснюється впливом кривизною стінок гіперболічного резервуару і розбіжністю у радіусах вільних поверхонь резервуарів при однакових глибинах.

На Рис. 3 та 4 наведена залежність гідродинамічних коефіцієнтів від глибини заповнення резервуару. Рис. 3а ілюструє при малих рівнях заповнення відмінність у залежності власної частоти системи в усіченому асимптотичному конусі у порівнянні з графіком гіперболоїда (Рис. 3а). Це пояснюється наявністю днища в першому резервуарі. Як показано на Рис. 3б форма дна резервуару не впливає на залежність значень коефіцієнта власної частоти при великих значеннях глибини заповнення ($H \gg 2R$). Графіки на Рис. 4 демонструють залежність коефіцієнтів, які визначаються рухомістю рідини. На Рис. 4а приведена залежність коефіцієнту інерційного зв'язку несучого тіла і рідини від глибини рідинного заповнення усіченого асимптотичного конуса і двопорожнинного параболоїда. Графічні залежності майже співпадають в діапазоні $H \gg 2R$. Рис. 4б демонструє зміну коефіцієнту приєднаних мас рідини. Графіки свідчать, що суттєва розбіжність значень присутня в діапазоні $H/R_0 \in [0,3;2]$.

Досліджувалась задача про вплив кута нахилу стінок резервуару на значення гідродинамічних коефіцієнтів (Рис. 5,6). Для обох випадків резервуарів до кута напіврозчину 60^o коефіцієнти інерціального зв'язку несучого тіла та рідини майже співпадають (Рис. 5а), із збільшенням кута, тобто коли стінки бака більш розгорнуті, відмінність збільшується. Рисунок 6 містить графіки зміни першої частоти (Рис. 6а) та приєднаної маси (Рис. 6б) в залежності від кута напіврозчину двохпорожнинного гіперболоїда та усіченого асимптотичного конуса. На Рис. 6а показано, що для значень кутів більше 30^o частоти близькі за значенням. Це пов'язано з тим, що при малих кутах нахилу стінок гіперболічний та конічний резервуари мають різні радіуси вільної поверхні.

Висновки. Розглянуто застосування модифікованої схеми визначення частот і форм коливань рідини з вільною поверхнею в резервуарух, що мають форму двопорожнинного гіперболоїда. На відміну від класичної постановки задачі додатково задовольняються умови розв'язності задачі. Частотні характеристики для кожної функції визначалися за методом Релея. Проаналізовано графічні залежності гідродинамічних характеристик, що визначаються рухомістю рідини, від глибини заповнення та зміни кута напіврозчину асимптотичного конуса для гіперболічних резервуарів у порівнянні з баками, що мають форму усіченого конуса. Показано, що із збільшенням глибини рідини швидко зменшується вплив форми резервуару на характер руху вільної поверхні. Продемонстровано, що при малих кутах конусності зміна форми резервуару майже не впливає на значення коефіцієнтів інерційного зв'язку. При великих кутах нахилу стінок резервуарів частоти мають близькі значення.

Література

[1] *Лимарченко О.С., Ясинский В.В.* Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. — Киев: НТТУ "КПИ 1997. — 338 с.

[2] *Лимарченко О.С., Семенова И.Ю.* Построение координатных функций для решения нелинейной задачи о колебании жидкости в параболоиде вращения // Комплексний аналіз і течії з вільними границями. Збірник праць Інституту математики НАН України. — Київ, Інститут математики НАН України, 2006. — **3**, № 4. — С. 374–388.

[3] *Рабинович Б.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984. — 432 с.

[4] *Фещенко С.Ф., Луковский И.А., Рабинович Б.И., Докучаев Л.В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных областях. —Киев: Наукова думка, 1969. — 251 с.

[5] *Ibrahim R.A.* Liquid sloshing dynamics: theory and applications. — Cambridge University Press. — 2005. — 950 p.