Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 5, 231–239

УДК 531.383-62:50

***О.В. Тетерятник***

*Ін-т математики НАН України, Київ*
*E-mail address: E.Teteryatnik@gmail.com*

# Аналітичний вираз оптимального керування для системи двох зв'язаних керованих майже консервативних осциляторів *

В данной работе система двух связанных управляемых осцилляторов рассматривается как почти консервативная система. Для неё исследована задача оптимального управления в виде обратной связи с квадратичным критерием качества. Применено асимптотическое разложение матрицы-решения по малому параметру. Для нахождения решений получена бесконечная система матричных уравнения типа Риккати, которая решена двумя способами. Приведен алгоритм нахождения оптимального управления с использованием матричных следов.

In this paper, the system of two coupled controlled oscillators is considered as almost conservative system. The optimal control problem is studied in the form of feedback with quadratic quality criterion. Asymptotic expansion of the matrix solution to a small parameter is applied.To find the solutions we obtain an infinite system of matrix Riccati type equations, which is solved in two ways. An algorithm for finding the optimal control using matrix trace is given.

* Робота виконана при частковій підтримці НДР № 0112U001015

**1. Постановка задачі.** В аналітичному вигляді знаходиться оптимальне керування для майже консервативної системи двох зв'язаних осциляторів [1]

$$\dot{x} = (F_0 + \varepsilon F_1)x + \varepsilon C_1 u, \tag{1}$$

де

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & W \\ -W & 0 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ MBW^{-1}M^{-1} & MAM^{-1} \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ MC \end{bmatrix}, \tag{2}$$

або

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ m_{11}c_1 & 0 \\ 0 & m_{22}c_2 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b_{11}}{\omega_1} & \frac{m_{11}b_{12}}{m_{22}\omega_2} & a_{11} & \frac{m_{11}a_{12}}{m_{22}} \\ \frac{m_{22}b_{21}}{m_{11}\omega_1} & \frac{b_{22}}{\omega_2} & \frac{m_{22}a_{21}}{m_{11}} & a_{22} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Система (1) є матричним записом рівнянь двох зв'язаних керованих осциляторів:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 &= \varepsilon(a_{11}\dot{q}_1 + b_{11}q_1 + a_{12}\dot{q}_2 + b_{12}q_2 + c_1u_1), \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 &= \varepsilon(a_{21}\dot{q}_1 + b_{21}q_1 + a_{22}\dot{q}_2 + b_{22}q_2 + c_2u_2), \end{aligned} \tag{4}$$

де $q_i$ — узагальнені координати, $a_{ii}, b_{ii}, w_i, c_i$ — сталі коефіцієнти, $u_i$ — керування, $i \in \{1;2\}$, $\varepsilon$ — малий параметр, або у матричному вигляді

$$\ddot{q} + W^2 q = \varepsilon(A\dot{q} + Bq + Cu), \tag{5}$$

де

$$W = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 2}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 2},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 2}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 2},$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 1}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 1}.$$

**2. Знаходження аналітичного вигляду оптимального керування за допомогою слідів.** Введемо заміну змінних $v_1 = m_{11}c_1u_1$, $v_2 = m_{22}c_2u_2$, тоді система (1) набуде вигляду

$$\dot{x} = (F_0 + \varepsilon F_1)x + \varepsilon C_2 v, \tag{6}$$

де $F_0, F_1$ - ті ж самі, а $C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{2\times 2} \end{bmatrix}$.

Оптимальне керування для системи (6) будемо шукати у вигляді зворотного зв'язку за станом $\dot{x}$ [3]

$$v = -R^{-1}C_2^T Sx \tag{7}$$

з квадратичним критерієм якості

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty (x^T Qx + v^T Rv)dt,$$

де $Q \in R_{4\times 4}$ - невід'ємно визначена матриця, $R \in R_{2\times 2}$ - додатно визначена матриця, $S \in R_{4\times 4}$- додатно визначена матриця-розв'язок матричного рівняння Ріккаті

$$(F_0 + \varepsilon F_1)^T S + S(F_0 + \varepsilon F_1) - \varepsilon^2 SC_2R^{-1}C_2^T S + Q = 0. \tag{8}$$

Введемо заміну [4] $P = \varepsilon S$, тоді матричне рівняння Ріккаті запишеться наступним чином:

$$(F_0 + \varepsilon F_1)^T P + P(F_0 + \varepsilon F_1) - \varepsilon PC_2R^{-1}C_2^T P + \varepsilon Q = 0. \tag{9}$$

Будемо шукати матрицю-розв'язок у вигляді розкладу за малим параметром [2]

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i \tag{10}$$

Розкладемо таким же чином і матрицю $Q$:

$$Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i. \tag{11}$$

Підставимо (9) і (10) в (8), отримаємо

$$(F_0+\varepsilon F_1)^T(P_0+\varepsilon P_1+...)+(P_0+\varepsilon P_1+...)(F_0+\varepsilon F_1)-$$

$$-\varepsilon(P_0+\varepsilon P_1+...)C_2R^{-1}C_2^T((P_0+\varepsilon P_1+...)=-\varepsilon((Q_0+\varepsilon Q_1+...).$$

Звідси випливає наступна нескінченна система алгебраїчних рівнянь типу Ріккаті:

$$-F_0P_0+P_0F_0=0, \qquad (12)$$

$$F_0P_1-F_1^TP_0-P_0F_1-P_1F_0+P_0C_2R^{-1}C_2^TP_0=Q_0,$$

$$F_0P_2-F_1^TP_1-P_1F_1-P_2F_0+P_0C_2R^{-1}C_2^TP_1+P_1C_2R^{-1}C_2^TP_0=Q_1,$$

..................................................................

$$F_0P_i-F_1^TP_{i-1}-P_{i-1}F_1-P_iF_0+\sum_{k=0}^{i-1}P_kC_2R^{-1}C_2^TP_{i-k}=Q_{i-1}. \qquad (13)$$

Розглянемо перше рівняння системи (13). Спочатку перетворимо його наступним чином:

$$F_0P_1-P_1F_0=P_0F_1+F_1^TP_0-P_0C_2R^{-1}C_2^TP_0+Q_0. \qquad (14)$$

Завдяки нульовому сліду лівої частини маємо

$$tr(P_0(F_1+F_1^T))-tr(P_0C_2R^{-1}C_2^TP_0)+tr(Q_0)=0.$$

або

$$2tr(P_0F_1)-tr(P_0C_2R^{-1}C_2^TP_0)+tr(Q_0)=0. \qquad (15)$$

Використовуючи алгоритм [5], множимо (14) зліва та справа на матрицю $F_0$, маємо

$$F_0(F_0P_1F_0)-(F_0P_1F_0)F_0=$$

$$=F_0P_0F_1F_0+F_0F_1^TP_0F_0-F_0P_0C_2R^{-1}C_2^TP_0F_0+F_0Q_0F_0.$$

Враховуючи, що слід лівої частини цього рівняння також нульовий, отримаємо

$$2tr(P_0F_0^2F_1)-tr(F_0^2P_0C_2R^{-1}C_2^TP_0)+tr(F_0^2Q_0)=0. \qquad (16)$$

Обчисливши (15),(16), отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими

$$2p_3a_{11}-\frac{p_3^2}{r_1}+2p_4a_{22}-\frac{p_4^2}{r_2}+q_{11}+q_{22}+q_{33}+q_{44}=0,$$

$$(2p_3a_{11}-\frac{p_3^2}{r_1}+q_{11}+q_{33})\omega_1^2+(2p_4a_{22}-\frac{p_4^2}{r_2}+q_{22}+q_{44})\omega_2^2=0.$$

Ця система має наступний розв'язок, при умові, що $\omega_1\neq\omega_2$ та $\omega_i\neq 0, i=\overline{1,2}$:

$$p_3=a_{11}r_1+\sqrt{(a_{11}r_1)^2+r_1(q_{11}+q_{33})},$$

$$p_4=a_{22}r_2+\sqrt{(a_{22}r_2)^2+r_2(q_{22}+q_{44})},$$

Аналогічно, із другого рівняння нескінченої системи рівнянь типу Ріккаті, яке є лінійним, знаходимо матрицу $P_1$. Для цього описану процедуру проводимо множення на $F_0$ зліва та справа проводимо $(n-1)$ раз. Тоді із умови, що слід кожної із лівих частин отриманих $n$ матричних рівнянь нульовий, маємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих $n$ параметров матриці $P_1$. Використовуючи систему аналітичних обчислень Maple, отримано наступні результати

$$p_{11}=\frac{r_1}{p_3-r_1a_{11}}(\frac{b_{11}}{2\omega_1^2}q_{11}+\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}((a_{12}b_{21}+a_{21}b_{12})p_3+$$

$$+\frac{m_{22}}{m_{11}}(b_{21}(q_{34}+\frac{\omega_2}{\omega_1}q_{12})-a_{21}\omega_1(q_{14}-\frac{\omega_2}{\omega_1}q_{23}))+\frac{\tilde{q}_{11}+\tilde{q}_{33}}{2}))+p_3\frac{b_{11}}{\omega_1^2}-\frac{q_{13}}{\omega_1},$$

$$p_{22}=\frac{r_2}{p_4-r_2a_{22}}(\frac{b_{22}}{2\omega_2^2}q_{22}+\frac{1}{\omega_2^1-\omega_2^2}((a_{12}b_{21}+a_{21}b_{12})p_4+$$

$$+\frac{m_{11}}{m_{22}}(b_{12}(q_{34}+\frac{\omega_1}{\omega_2}q_{12})-a_{12}\omega_2(q_{23}-\frac{\omega_1}{\omega_2}q_{14}))+\frac{\tilde{q}_{22}+\tilde{q}_{44}}{2}))+p_4\frac{b_{22}}{\omega_2^2}-\frac{q_{24}}{\omega_2}.$$

$$p_{33}=\frac{r_1}{p_3-r_1a_{11}}(\frac{b_{11}}{2\omega_1^2}q_{11}+\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}((a_{12}b_{21}+a_{21}b_{12})p_3+$$

$$+\frac{m_{22}}{m_{11}}(b_{21}(q_{34}+\frac{\omega_2}{\omega_1}q_{12})-a_{21}\omega_1(q_{14}-\frac{\omega_2}{\omega_1}q_{23}))+\frac{\tilde{q}_{11}+\tilde{q}_{33}}{2})),$$

$$p_{44}=\frac{r_2}{p_4-r_2a_{22}}(\frac{b_{22}}{2\omega_2^2}q_{22}+\frac{1}{\omega_2^1-\omega_2^2}((a_{12}b_{21}+a_{21}b_{12})p_4+$$

$$+\frac{m_{11}}{m_{22}}(b_{12}(q_{34}+\frac{\omega_1}{\omega_2}q_{12})-a_{12}\omega_2(q_{23}-\frac{\omega_1}{\omega_2}q_{14}))+\frac{\tilde{q}_{22}+\tilde{q}_{44}}{2})),$$

$$p_{12}=\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}(p_3\frac{m_{11}b_{12}\omega_1}{m_{22}\omega_2}-p_4\frac{m_{22}b_{21}\omega_2}{m_{11}\omega_1}+q_{23}\omega_1-q_{14}\omega_2),$$

$$p_{13}=\frac{q_{11}}{2\omega_1}, p_{24}=\frac{q_{22}}{2\omega_2},$$

$$p_{14}=-\frac{1}{\omega_1^2+\omega_2^2}(p_3\frac{m_{11}a_{12}\omega_1}{m_{22}}+p_4\frac{m_{22}a_{21}\omega_1}{m_{11}}+q_{12}\omega_2+q_{34}\omega_2),$$

$$p_{23}=\frac{1}{\omega_1^2+\omega_2^2}(p_3\frac{m_{11}a_{12}\omega_2}{m_{22}}+p_4\frac{m_{22}a_{21}\omega_2}{m_{11}}+q_{12}\omega_1+q_{34}\omega_2),$$

$$p_{34}=\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}(p_3\frac{m_{11}b_{12}}{m_{22}}-p_4\frac{m_{22}b_{21}}{m_{11}}+q_{23}\omega_2-q_{14}\omega_1),$$

**3. Аналітичний алгоритм побудови оптимального керування.** Із результатів, отриманих в попередньому розділі можно вивести алгоритм побудови аналітичного виразу оптимального керування у вигляді зворотного зв'язку (7) та з зазначеним квадратичним критерієм якості.

1. Керовану механічну систему звести до моделі майже консервативної системи. Для цього можна використати метод, запропонований в роботі [1]. Таким чином отримана система буде подібною системи до (1), (2).

2. Зробити перетворення, яке зведе майже консервативну систему до канонічної форми, зокрема форми Фробеніуса або Гесенберга [3].

3. Для знаходження оптимального керування у вигляді зворотного зв'язку за станом $\dot{x}$ (7) з зазначеним квадратичним критерієм якості записати матричне рівняння Ріккаті (8) для розглядуваної системи.

4. Матрицю-роз'язок можна шукати у вигляді розкладу за малим параметрам [2].

5. Знайдену нескінченну систему алгебраїчних рівнянь типу Ріккаті (12) простіше розв'язати, застосовуючи метод слідів, як у попередній главі.

6. Знайти (обчислити) оптимальне керування за формулою (7).

**4. Прямий (безпосередній) метод побудови оптимального керування.** Введемо наступні позначення, враховуючи [2], [4], [5], [7], що $P_0$, $R$ - діагональні матриці, $P_1$, $Q_1$ - симетричні матриці.

$$P_0 = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} & p_{34} \\ p_{14} & p_{24} & p_{34} & p_{44} \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{34} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}.$$

Використовуючи систему аналітичних обчислень Maple безпосередньо обчислимо перше рівняння системи (13) та отримаємо наступні результати

$$p_3 = a_{11}r_1 + \sqrt{(a_{11}r_1)^2 + r_1(q_{11} + q_{33})},$$

$$p_4 = a_{22}r_2 + \sqrt{(a_{22}r_2)^2 + r_2(q_{22} + q_{44})},$$

$$p_{13} = \frac{q_{11}}{2\omega_1}, p_{24} = \frac{q_{22}}{2\omega_2},$$

$$p_{12} = \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}(p_3\frac{m_{11}b_{12}\omega_1}{m_{22}\omega_2} - p_4\frac{m_{22}b_{21}\omega_2}{m_{11}\omega_1} + q_{23}\omega_1 - q_{14}\omega_2),$$

$$p_{23} = \frac{1}{\omega_1^2 + \omega_2^2}(p_3\frac{m_{11}a_{12}\omega_2}{m_{22}} + p_4\frac{m_{22}a_{21}\omega_2}{m_{11}} + q_{12}\omega_1 + q_{34}\omega_2),$$

$$p_{34} = \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}(p_3\frac{m_{11}b_{12}}{m_{22}} - p_4\frac{m_{22}b_{21}}{m_{11}} + q_{23}\omega_2 - q_{14}\omega_1),$$

$$p_{14} = -\frac{1}{\omega_1^2 + \omega_2^2}(p_3\frac{m_{11}a_{12}\omega_1}{m_{22}} + p_4\frac{m_{22}a_{21}\omega_1}{m_{11}} + q_{12}\omega_2 + q_{34}\omega_2),$$

$$p_{11} = p_{33} + p_3\frac{b_{11}}{\omega_1^2} - \frac{q_{13}}{\omega_1},$$

$$p_{22} = p_{44} + p_4\frac{b_{22}}{\omega_2^2} - \frac{q_{24}}{\omega_2}.$$

Із рівняння (12) легко знайти, що $p_1 = p_3$, а $p_2 = p_4$, оскільки $\omega_i \neq 0$. Таким чином,

$$P_0 = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 \end{bmatrix},$$

де $p_i = a_{ii}r_i + \sqrt{(a_{ii}r_i)^2 + r_i(q_{ii} + q_{i+2,i+2})}, i = \{1; 2\}$.

Для того, щоб знайти $p_{11}, p_{22}, p_{33}, p_{44}$ розглянемо друге рівняння нескінченої системи алгебраїчних рівнянь (12), а саме наступне рівняння

$$F_0P_2 - F_1^TP_1 - P_1F_1 - P_2F_0 + P_0C_2R^{-1}C_2^TP_1 + P_1C_2R^{-1}C_2^TP_0 = Q_1.$$

В результаті розв'язання системи рівнянь отримано:

$$p_{33} = \frac{r_1}{p_3 - r_1a_{11}}(\frac{b_{11}}{2\omega_1^2}q_{11} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}((a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12})p_3 +$$

$$+\frac{m_{22}}{m_{11}}(b_{21}(q_{34} + \frac{\omega_2}{\omega_1}q_{12}) - a_{21}\omega_1(q_{14} - \frac{\omega_2}{\omega_1}q_{23})) + \frac{\tilde{q}_{11} + \tilde{q}_{33}}{2})),$$

$$p_{44} = \frac{r_2}{p_4 - r_2a_{22}}(\frac{b_{22}}{2\omega_2^2}q_{22} + \frac{1}{\omega_2^1 - \omega_2^2}((a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12})p_4 +$$

$$+\frac{m_{11}}{m_{22}}(b_{12}(q_{34} + \frac{\omega_1}{\omega_2}q_{12}) - a_{12}\omega_2(q_{23} - \frac{\omega_1}{\omega_2}q_{14})) + \frac{\tilde{q}_{22} + \tilde{q}_{44}}{2})),$$

де $\tilde{q}_{11}, \tilde{q}_{22}, \tilde{q}_{33}, \tilde{q}_{44}$ - елементи головної діагоналі $Q_2$.

Таким чином, нам вдалось знайти в аналітичному вигляді всі елементи матриці $P_1$.

**5. Висновки.** В роботі знайдено аналітичний вираз оптимального керування за зворотним зв'язком з квадратичним критерієм якості для системи двох зв'язаних керованих майже консервативних осциляторів. Розглянуто два способи розв'язання безпосередній та за допомогою слідів. Останній дозволяє з одного рівняння нескінченної системи алгебраїчних рівнянь типу Ріккаті відразу отримати нульове наближення матриці-розв'язку.

## Література

[1] *Тетерятник О.В.* Дослідження двох зв'язаних керованих осциляторів. // *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* – 2013. – **10**, № 3. – С. 191–200.

[2] *Новицький В.В.* Управление гироскопическими системами. – Київ, 1982. – 44 с. – (Препринт /АН УССР. Ин-т математики; 82.39)

[3] *Новицкий В. В., Хуан Чень.* Оптимальное управление почти консервативными системами. // *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* – 2004. – **1**, № 2. – С. 152–157.

[4] *Ларин В.Б.* О слабом управлении слабодемпфированными системами. – Прикладная математика и механика. – 1978. – **42**, вып 6. – С. 1000-1006.

[5] *Новицкий В. В.* Рівняння Ляпунова для майже консервативних систем. – Київ, 2004. – 33 с. – (Препр. / НАН України. Ін-т математики; 2004.7)

[6] *Прасолов В.В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. – М.: Наука, 1996. – 304 с.

[7] *Новицкий В. В.* Декомпозиція та керування в лінійних системах. // *Праці Ін-ту математики НАН України.Математика та її застосування.* – 2008. – **77**, – С. 252 с.