Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 5, 36–53

УДК 531.36

Зінчук М.О., Новицький В.В.

Ін-т математики НАН України, Київ

Синхронізація дискретних динамічних систем за кроком дискретизації. *

Вивчаються дискретні динамічні системи з різними кроками дискретизації. Наведено умови переходу до еквівалентних дискретних систем з єдиним кроком дискретизації. Для дискретної лінійної системи з дійсною матрицею коефіцієнтів, що має елементарні дільники, які відповідають дійсним від'ємним власним значенням і повторюються непарне число разів отримано дискретний аналог з дійсною матрицею коефіцієнтів та кроком дискретизації меншим від початкового в парне число разів. Теоретичні викладки супроводжуються прикладами.

Изучаются дискретные динамические системы с различными шагами дискретизации. Приведены условия перехода к эквивалентным дискретным системам с одним шагом дискретизации. Для дискретной линейной системы с действительной матрицей коэффициентов, которая имеет элементарные делители, соответствующие действительным отрицательным собственным значениям, что повторяются нечетное число раз получен дискретный аналог с действительной матрицей коэффициентов и шагом дискретизации меньшим от начального в нечетное число раз. Теоретические исследования иллюстрируются примерами.

* Робота виконана за частковою підтримкою НДР № 0112U001015

1. Вступ. Синхронізацію вважають однією з важливих властивостей нелінійних систем, що виражає взаємозв'язок між параметрами зв'язаних (взаємодіючих) систем. Особливо яскраво синхронізація проявляє себе в системах передачі даних, як гарант якості і надійності їх роботи. У хаотичних системах синхронізація може проявлятись через встановлення певного вимушеного періодичного режиму або погодженість (синхронізацію) двох хаотичних систем $[1, 2]$. Синхронізація відіграє неабияку роль у системах з дискретним простором стану і неперервним характером протікання процесу, що визначається певними подіями в системі, які необхідно синхронізувати $[3, 4]$. Цим переліком ми не намагались охопити всі дослідження в цьому напрямку, а тільки хотіли підкреслити важливість синхронізації в динамічних системах, як такої.

Дослідження, що наведені нижче, мають свою певну особливість і пов'язані з так званою кроковою синхронізацією. Крокова синхронізація в дискретних динамічних системах має свої аналогії в фізичних процесах, наприклад синхронізація годинників, уніфікація виробництва. Нижче буде розглянута синхронізація як лінійних, так і нелінійних дискретних систем.

2. Синхронізація лінійних динамічних систем. Розглянемо систему лінійних дискретних матричних рівнянь з різними кроками дискретизації

$$\begin{aligned} x_i(kh_i + h_i) = F_i x_i(kh_i) + G_i u_i(kh_i), \quad x_i(0) = x_{i0}, \\ i = \overline{1, n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

де $x_i = [x_{i1}, \ldots, x_{in_i}]^T$ — вектор стану i-ї системи, $F_i \in \Re_{n_i \times n_i}$ — матриця коефіцієнтів, $G_i \in \Re_{n_i \times m_i}$ — матриця при керуванні, $u_i = [u_{i1}, \ldots, u_{im_i}]^T$ — вектор керування, x_{i0} — вектор початкового стану, h_i — крок дискретизації (раціональне число).

Розглянемо також систему лінійних дискретних матричних рівнянь з одним кроком дискретизації

$$\tilde{x}_i(\tilde{k}h_0 + h_0) = \tilde{F}_i \tilde{x}_i(\tilde{k}h_0) + \tilde{G}_i \tilde{u}_i(\tilde{k}h_0), \quad \tilde{x}_i(0) = \tilde{x}_{i0}, \qquad i = \overline{1,n}, \quad \tilde{k} = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

де $\tilde{x}_i = [\tilde{x}_{i1}, \ldots, \tilde{x}_{in_i}]^T$ — вектор стану i-ї системи, $\tilde{F}_i \in \mathfrak{R}_{n_i \times n_i}$ — матриця коефіцієнтів, $\tilde{G}_i \in \mathfrak{R}_{n_i \times m_i}$ — матриця при керуванні, $\tilde{u}_i = [\tilde{u}_{i1}, \ldots, \tilde{u}_{im_i}]^T$ — вектор керування, $\tilde{x}_{i0}$ — вектор початкового стану, $h_0\,(h_0 \le h_i,\ i = \overline{1,n})$ — крок дискретизації (раціональне число).

Будемо вважати $F_i, G_i, \tilde{F}_i, \tilde{G}_i$ сталими дійсними матрицями, а $h_i = p_i/q_i$, $i = \overline{1,n}$, де p_i, q_i — цілі числа. Необхідно знайти зв'язок між параметрами $F_i, G_i, u_i, x_{i0}, h_i$ і $\tilde{F}_i, \tilde{G}_i, \tilde{u}_i, \tilde{x}_{i0}, h_0$ даних систем, щоб за розв'язками рівнянь (2), можна було знайти розв'язки відповідних (за номером) рівнянь (1). Такий зв'язок описує наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай матриці F_i, $i = \overline{1,n}$ не мають нульових та одиничних власних значень. Покладемо*

$$\tilde{x}_{i0} = x_{i0}, \quad h_i = m_i h_0, \quad \tilde{u}_i(\tilde{k}h_0) = u_i(kh_i), \qquad \tilde{k}h_0 \in [kh_i, kh_i + h_i), \ \ \tilde{k}, k \in \{0, 1, 2, \ldots\}, \ \ i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

де m_i деякі цілі числа. Якщо m_i парне, то вважаємо, що матриця F_i не має елементарних дільників, що повторюються непарне число разів і відповідають дійсним від'ємним власним значенням. Далі покладемо

$$\tilde{F}_i = \sqrt[m_i]{F_i}, \quad \tilde{G}_i = (\sqrt[m_i]{F_i} - I)(F_i - I)^{-1} G_i. \tag{4}$$

Тоді розв'язки відповідних рівнянь систем (1), (2)*, будуть збігатися в точках дискретизації однаково віддалених від нуля (спільних точках).*

Доведення. Укажемо на те, що для раціональних кроків $h_i = p_i/q_i$ завжди можемо вибрати такі h_0, m_i, що буде виконуватися рівність $h_i = m_i h_0$ (3). Дійсно, якщо всі h_i, $i = \overline{1,n}$

цілі числа, то в якості h_0 можна вибрати їх спільний дільник, в протилежному випадку покласти $h_0 = 1/q_0$, де $p_0/q_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i/q_i$ (p_0, q_0 — цілі числа).

Перехід від одного кроку дискретизації до іншого можна зробити, використовуючи неперервний аналог [5] як проміжний. Запишемо неперервні аналоги матричних рівнянь (1)

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t), \quad x_i(0) = x_{i0}, \;\; i = \overline{1,n}, \tag{5}$$

де матриці A_i, B_i обчислюються за формулами [6]

$$A_i = [\ln F_i]/h_i, \quad B_i = (F_i - I)^{-1} A_i G_i. \tag{6}$$

Тут $\det A_i \neq 0$, оскільки матриця F_i не має одиничних власних значень. Керування $u_i(t)$ вважаються сталими на інтервалах

$$t \in [kh_i, kh_i + h_i), \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots\} \tag{7}$$

і рівними $u_i(kh_i)$.

Тепер перейдемо від рівнянь (5) до дискретного аналогу з кроком дискретизації h_0

$$\begin{aligned} x_i(\tilde{k}h_0 + h_0) = F_{i0} x_i(\tilde{k}h_0) + G_{i0} u_i(\tilde{k}h_0), \;\; x(0) = x_{i0}, \\ i = \overline{1,n}, \;\; \tilde{k} = 0, 1, \ldots, \end{aligned} \tag{8}$$

де матриці F_{i0}, G_{i0} обчислюються за формулами [6]

$$F_{i0} = e^{A_i h_0}, \quad G_{i0} = \Psi_{i0} B_i, \quad \Psi_{i0} = \int\limits_0^{h_0} e^{A_i \tau} d\tau. \tag{9}$$

Зі сталості керування на інтервалах (7) випливає рівність $u_i(\tilde{k}h_0) = u_i(kh_i)$, $\tilde{k}h_0 \in [kh_i, kh_i + h_i)$, $\tilde{k}, k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, що відповідає умові (3).

Представляючи експоненту (9) рядом $\sum\limits_{j=0}^{\infty} A_i^j \tau^j / j!$, отримаємо $\Psi_{i0} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} A_i^j h_0^{j+1}/(j+1)!$ або, враховуючи (6) і $\det A_i \neq 0$,

$$\Psi_{i0} = A_i^{-1}(e^{A_i h_0} - I) = (e^{A_i h_0} - I)A_i^{-1} = (F_i^{h_0/h_i} - I)A_i^{-1}. \quad (10)$$

З (9), (10) маємо $G_i = \Psi_i B_i = (e^{A_i h_i} - I)A_i^{-1} B_i$ або

$$B_i = A_i (F_i - I)^{-1} G_i. \quad (11)$$

Тут $\Psi_i = \int\limits_0^{h_i} e^{A_i \tau} d\tau$.

Остаточно з (9)–(11) отримуємо

$$\begin{aligned} F_{i0} &= e^{([\ln F_i]/h_i)h_0} = F_i^{h_0/h_i} = F_i^{1/m_i}, \\ G_{i0} &= (F_i^{h_0/h_i} - I)A_i^{-1} A_i (F_i - I)^{-1} G_i = \\ &\qquad = (F_i^{1/m_i} - I)(F_i - I)^{-1} G_i, \end{aligned} \quad (12)$$

що збігається з (4). Обчислення кореня з невиродженої матриці описано в [7].

Тепер щодо дійсного вигляду матриці $\sqrt[m_i]{F_i}$. Якщо матриця F_i не має від'ємних дійсних власних значень, то при довільних m_i матриця $\sqrt[m_i]{F_i}$ буде дійсною. Для комплексно-спряжених власних значень їх корені вибираємо із m_i значень комплексно-спряженими, а для дійсних додатних — дійсні [8]. Коли ж маємо парне m_i і елементарні дільники, які повторюються парне число разів та відповідають від'ємним власним значенням (наприклад $\mu_s < 0$), то в кожній парі таких елементарних дільників заміняємо їх комлексно-спряженими $(|\mu_s| e^{-i\pi}, |\mu_s| e^{i\pi})$. Дійсну матрицю $\sqrt[m_i]{F_i}$ обчислюємо аналогічно обчисленню дійсного логарифма матриці [7].

Отже, розв'язки відповідних (за номером) дискретних та неперервних рівнянь (1), (5) і (8), (5) збігаються в дискретні моменти часу відповідно $t = kh_i$ і $t = \tilde{k}h_0$, $\tilde{k}, k = 0, 1, 2, \ldots$. Тому розв'язки відповідних рівнянь (1), (8), а, отже, і рівнянь

(1), (2) з дійсними матрицями коефіцієнтів відповідно F_i, G_i і $\tilde{F}_i, \tilde{G}_i$ будуть збігатися в спільних дискретних моментах часу $kh_i = \tilde{k}h_0,\ \tilde{k}, k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Теорема доведена.

Приклад 1. *Нехай система складаєтьcя з двох дискретних матричних рівнянь з такими матрицями коефіцієнтів*

$$F_1 = \begin{bmatrix} 34 & -15 \\ 50 & -21 \end{bmatrix},\ G_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ F_2 = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -9 & 5 \end{bmatrix},\ G_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

і кроками дискретизації $h_1 = 1/3$, $h_2 = 1/2$.

Необхідно перейти до еквівалентних рівнянь з єдиним кроком дискретизації.

Оскільки $h_1 + h_2 = 5/6$, то $h_0 = 1/6$ і $m_1 = 2$, $m_2 = 3$. Отже, ми маємо знайти такі корені з матриць: $\sqrt{F_1}$, $\sqrt[3]{F_2}$. Для цього представимо їх в жорданових формах $F_1 = T_1 J_1 T_1^{-1}$, $F_2 = T_2 J_2 T_2^{-1}$, де

$$T_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix},\ J_1 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ T_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix},\ J_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Далі знаходимо дійсні значення коренів жорданових кліток $\sqrt{J_1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\sqrt[3]{J_2} = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ і остаточно отримуємо

$$\tilde{F}_1 = T_1 \sqrt{J_1} T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{F}_2 = T_2 \sqrt[3]{J_2} T_2^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4/3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{G}_1 = (\tilde{F}_1 - I)(F_1 - I)^{-1} G_1 = \begin{bmatrix} -5/12 \\ -19/12 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{G}_2 = (\tilde{F}_2 - I)(F_2 - I)^{-1} G_2 = \begin{bmatrix} 11/3 \\ 9 \end{bmatrix},$$

а початкові умови та керування визначаються згідно з теоремою 1.

3. Знаходження дійсного кореня парного степеня з дійсної матриці. Нижче вивчимо випадок, який не охоплений теоремою 1, а саме: дійсна матриця коефіцієнтів системи має елементарні дільники, які повторюються непарне число разів і відповідають дійсним від'ємним власним значенням та необхідно обчислювати з неї корінь парного степеня. Такий матричний корінь буде комплексним, оскільки не всі його комплексні власні значення (корені з власних значень початкової матриці) будуть комплексно-спряженими. Обчислення дійсного кореня парного степеня будемо проводити шляхом розширення початкової матриці (збільшення розмірності аналога вихідної системи) подібно обчисленню дійсного логарифма такої матриці [9].

Розглянемо два дискретні матричні рівняння з різними кроками дискретизації

$$x(kh+h) = Fx(kh) + Gu(kh), \quad x(0) = x_0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

$$\tilde{x}(\tilde{k}\tilde{h}+\tilde{h}) = \tilde{F}\tilde{x}(\tilde{k}\tilde{h}) + \tilde{G}\tilde{u}(\tilde{k}\tilde{h}), \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \quad \tilde{k} = 0, 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

де $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$, $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m]^T$ — вектори станів відповідно (13) і (14) систем ($m \geq n$); $u = [u_1, \ldots, u_l]^T$, $\tilde{u} = [\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_l]^T$ — вектори керувань; $\det F \neq 0$, $F \in \mathfrak{R}_{n\times n}$, $\tilde{F} \in \mathfrak{R}_{m\times m}$ — матриці коефіцієнтів; $G \in \mathfrak{R}_{n\times l}$, $\tilde{G} \in \mathfrak{R}_{m\times l}$ — матриці при керуваннях; $x_0, \tilde{x}_0$ — вектори початкових станів; $h, \tilde{h}$ — кроки дискретизації (раціональні числа) і $h = \tilde{m}\tilde{h}$ ($\tilde{m}$ — парне число).

Будемо вважати, що матриця F має елементарні дільники, кожний з яких повторюється непарне число разів і відповідає від'ємному власному значенню. Для того, щоб отримати збіг розв'язків систем (13) і (14) в спільних дискретних точках необхідно виконання умови $\tilde{F} = \sqrt[\tilde{m}]{F}$, але в цьому випадку, як виявлено вище, $\sqrt[\tilde{m}]{F}$ буде комплексною матрицею. Знайти дійсний корінь парного степеня можна, розширивши матрицю F, тоді буде збіг розв'язку x з частиною розв'язку $\tilde{x}$ в однакових дискретних точках. Наступне твердження показує як це зробити в даному випадку.

Теорема 2. *Нехай задана дискретна система* (13) *з матрицею коефіцієнтів, що не має нульових та одиничних власних значень, але має r елементарних дільників*

$$(\mu-\mu_{i_1})^{p_{i_1}},\, \mu-\mu_{i_2})^{p_{i_2}},\, \ldots,\, (\mu-\mu_{i_r})^{p_{i_r}}, \qquad (15)$$

кожний з яких повторюється непарне число разів і відповідає дійсному від'ємному власному значенню.

Тоді можна побудувати дискретну систему (14) *з дійсною матрицею коефіцієнтів $\tilde{F}\in\Re_{m\times m}$, $m=n+\sum_{j=1}^{r}p_{i_j}$, матрицею при керуванні $\tilde{G}\in\Re_{m\times l}$, вектором стану $\tilde{x}=\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}$, $z_1\in\Re_{m-n}$, $z_2\in\Re_n$ з початковими умовами: $z_1(0)$ — довільний вектор, $z_2(0)=x(0)$ та вектором керування $\tilde{u}(\tilde{k}\tilde{h})=u(kh)$ при $\tilde{k}\tilde{h}\in[kh,kh+h)$ таку, що розв'язки z_2, x збігаються в спільних дискретних моментах часу.*

Доведення. При доведенні теореми будемо спиратися на підхід отримання дійсного логарифма матриці, яка має такі ж елементарні дільники [9].

Нехай невироджена матриця F має елементарні дільники

$$\begin{gathered}(\mu-\mu_1)^{p_1},(\mu-\mu_2)^{p_2},\ldots,(\mu-\mu_s)^{p_s},\\ p_1+p_2+\ldots+p_s=n.\end{gathered} \qquad (16)$$

Вважаємо, що елементарні дільники в (16) впорядковані наступним чином. Спочатку йдуть дільники (15), потім дільники, які повторюються парне число разів і відповідають від'ємним власним значенням, потім пари елементарних дільників, які відповідають комплексно-спряженим власним значенням і дільники, що відповідають дійсним додатним власним значенням. Зазначимо, що серед пар елементарних дільників можуть бути такі, які відповідають власним значенням (16).

З послідовності (16) випливає, що матриці F відповідає така нормальна жорданова форма

$$F = TJT^{-1} = T\mathrm{diag}\{\mu_1 I_{p_1} + H_{p_1}, \mu_2 I_{p_2} + H_{p_2}, \\ \ldots, \mu_s I_{p_s} + H_{p_s}\}T^{-1}, \tag{17}$$

де T — деяка невироджена матриця, а J має блочну діагональну форму з жордановими клітками на діагоналі розміру $p_i \times p_i$

$$\mu_i I_{p_i} + H_{p_i} = \begin{bmatrix} \mu_i & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_i \end{bmatrix}.$$

Тут $I_{p_i} \in \mathfrak{R}_{p_i \times p_i}$ — одинична матриця, а матриця $H_{p_i} \in \mathfrak{R}_{p_i \times p_i}$ містить тільки одиничну наддіагональ. В матриці J жорданові клітки йдуть в порядку, описаному вище. Необхідний порядок можна завжди забезпечити за допомогою перестановки жорданових кліток.

Розширимо матрицю J на r жорданових кліток, яким відповідають елементарні дільники (15)

$$\Gamma = \mathrm{diag}\{\mu_1 I_{p_1} + H_{p_1}, \ldots, \mu_r I_{p_r} + H_{p_r}, \mu_1 I_{p_1} + H_{p_1}, \\ \mu_2 I_{p_2} + H_{p_2}, \ldots, \mu_s I_{p_s} + H_{p_s}\}. \tag{18}$$

Далі замінимо від'ємні власні значення комплексними вигляду $|\mu_j|e^{\pm i\pi}$. Причому власні значення в перших r клітках замінимо на $|\mu_j|e^{+i\pi}$, а в наступних r клітках — на $|\mu_j|e^{-i\pi}$, $j = \overline{1, r}$. Потім кожну пару кліток з від'ємними власними значеннями заміняємо комплексно-спряженими числами розглянутого вигляду, а інші власні значення залишаємо без змін і знаходимо корінь $\tilde{m}$-го степеня із сформованої матриці

$$\hat{J} = \mathrm{diag}\{ \sqrt[\tilde{m}]{\hat{\mu}_1 I_{p_1} + H_{p_1}}, \ldots, \sqrt[\tilde{m}]{\hat{\mu}_r I_{p_r} + H_{p_r}}, \\ \sqrt[\tilde{m}]{\hat{\mu}_1 I_{p_1} + H_{p_1}}, \sqrt[\tilde{m}]{\hat{\mu}_2 I_{p_2} + H_{p_2}}, \ldots, \sqrt[\tilde{m}]{\hat{\mu}_s I_{p_s} + H_{p_s}}\}. \tag{19}$$

Тут введено нові позначення для власних значень μ_i (18) з урахуванням вказаних вище змін. Як отримати корінь з жорданової клітки, розглянуто в [7]. Зазначимо, що корінь не розщеплює елементарних дільників в скінченній області (відповідні похідні не дорівнюють нулю). Функцію матриці $\sqrt[\tilde{m}]{\hat{\mu}_j I_{p_j} + H_{p_j}}$ можна записати у вигляді ряда

$$\sqrt[\tilde{m}]{\hat{\mu}_j I_{p_j} + H_{p_j}} = \hat{\mu}_j^{\frac{1}{\tilde{m}}} I_j + \frac{1}{\tilde{m}} \hat{\mu}_j^{\frac{1}{\tilde{m}}-1} H_j + \\ + \frac{1}{2!} \frac{1}{\tilde{m}} \left(\frac{1}{\tilde{m}} - 1 \right) \hat{\mu}_j^{\frac{1}{\tilde{m}}-2} H_j^2 + \ldots, \tag{20}$$

звідки випливає (в правій частині (20) комплексні числа підносяться до степеня [8]), що корені з кліток, яким відповідають комплексно-спряжені власні значення, завжди можна вибрати серед $\tilde{m}$ значень комплексно-спряженими, а це важливо для отримання дійсної матриці.

В [7] показано, що матриця вигляду $D = \mathrm{diag}\{U + iV, U - iV\}$, $U, V \in \mathfrak{R}_{d \times d}$ подібна дійсній матриці з матрицею перетворення $S = \begin{bmatrix} I_d & iI_d \\ I_d & -iI_d \end{bmatrix}$: $S^{-1} D S = \begin{bmatrix} U & -V \\ V & U \end{bmatrix}$.

Аналогічно, для отримання дійсної матриці, подібної до Γ, сформуємо матрицю перетворення

$$P = \mathrm{diag} \left\{ \begin{bmatrix} I_q & iI_q \\ I_q & -iI_q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_{p_{r+1}} & iI_{p_{r+1}} \\ I_{p_{r+1}} & -iI_{p_{r+1}} \end{bmatrix}, \ldots, \\ \begin{bmatrix} I_{p_{s-v}} & iI_{p_{s-v}} \\ I_{p_{s-v}} & -iI_{p_{s-v}} \end{bmatrix}, I_u \right\}, \tag{21}$$

де $q = p_1 + \ldots + p_r$, $u = p_s + p_{s-1} + \ldots + p_{s-v+1}$, v — число елементарних дільників, що відповідають додатнім власним значенням. Застосовуючи (21) до (19), отримаємо дійсну матрицю

$$\tilde{J} = P^{-1} \hat{J} P. \tag{22}$$

Тепер знайдемо дійсну степінь дійсної матриці $\tilde{J}$

$$\hat{F}_J = \tilde{J}^{\tilde{m}} = P^{-1} \hat{J}^{\tilde{m}} P = P^{-1} \Gamma P. \tag{23}$$

При переході від матриці $\tilde{J}$ до матриці $\hat{F}_J$ елементарні дільники також не розщеплюються.

Далі розширимо матрицю коефіцієнтів дискретної системи (13) на жорданові клітки, яким відповідають елементарні дільники (15),

$$\hat{F} = \mathrm{diag}\{\mu_1 I_{p_1} + H_{p_1}, \dots, \mu_r I_{p_r} + H_{p_r}, F\}, \quad \det \hat{F} \neq 0. \tag{24}$$

Запишемо розширену дискретну систему

$$\begin{gathered} \hat{x}(kh+h) = \hat{F}\hat{x}(kh) + \hat{G}u(kh), \;\; \hat{x}(0) = [y_0, x_0]^T, \\ k = 0, 1, \dots, \end{gathered} \tag{25}$$

де $\hat{F} \in \mathfrak{R}_{m\times m}$, $\hat{G} = [G_1, G]^T$, $G_1 \in \mathfrak{R}_{(m-n)\times l}$ — довільна стала матриця, $\hat{x} = [y, x]^T$, $y_0 \in \mathfrak{R}_{m-n}$ — довільний вектор.

Тепер від системи (25) перейдемо до дискретної системи (14). В матриці $\hat{F}$ всі елементарні дільники, що відповідають від'ємним власним значенням, повторюються парне число разів. Тому для неї існує дійсний корінь парного степеня ($\tilde{F} = \sqrt[\tilde{m}]{\hat{F}}$), який знайдемо наступним чином. Матриці $\hat{F}, \hat{F}_J$ подібні жордановій матриці Γ, тому вони подібні між собою. Існує така дійсна невироджена матриця U, що виконується рівність

$$\hat{F} = \tilde{F}^{\tilde{m}} = U\hat{F}_J U^{-1} = U\tilde{J}^{\tilde{m}}U^{-1} = \left[U\tilde{J}U^{-1}\right]^{\tilde{m}}, \quad \tilde{F} = U\tilde{J}U^{-1}. \tag{26}$$

Отже, ми отримали дійсний корінь парного степеня $\tilde{F}$ з розширеної дійсної матриці $\hat{F}$. За теоремою 1 матриця при керуванні дорівнює $\tilde{G} = (\tilde{F} - I)(\hat{F} - I)^{-1}\hat{G} \in \mathfrak{R}_{m\times l}$, початкові умови такі ж: $\tilde{x}(0) = \hat{x}(0)$, а вектор керування — $\tilde{u}(\tilde{k}\tilde{h}) = u(kh)$ при $\tilde{k}\tilde{h} \in [kh, kh+h)$, що відповідає умовам теореми 2. Таким чином, ми побудували еквівалентну системі (25) дискретну систему (14).

Тепер розглянемо розв'язки дискретних систем (13), (14). Розв'язок системи (13) має вигляд

$$x(kh) = F^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} F^{k-1-i}Gu(ih), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{27}$$

а розв'язок системи (14) в дискретні моменти часу $\tilde{k}\tilde{h}$, $\tilde{k} = \tilde{m}k$ такий:

$$\tilde{x}(\tilde{k}\tilde{h}) = \tilde{F}^{\tilde{m}k}\tilde{x}(0) + \sum_{i=0}^{\tilde{m}k-1} \tilde{F}^{\tilde{m}k-1-i}\tilde{G}\tilde{u}(i\tilde{h}) =$$

$$= \hat{F}^k\tilde{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{F}^{\tilde{m}(k-1-j)} \sum_{i=0}^{\tilde{m}-1} \tilde{F}^{\tilde{m}-1-i}\tilde{G}\tilde{u}(j\tilde{m}\tilde{h} + i\tilde{h}) =$$

$$= \hat{F}^k\tilde{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \hat{F}^{k-1-j} \left[\sum_{i=0}^{\tilde{m}-1} \tilde{F}^i(\tilde{F} - I)\right] (\hat{F} - I)^{-1}\hat{G}u(jh) =$$

$$= \hat{F}^k\tilde{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \hat{F}^{k-1-j}(\tilde{F}^{\tilde{m}} - I)(\hat{F} - I)^{-1}\hat{G}u(jh) =$$

$$= \begin{bmatrix} z_1(\tilde{k}\tilde{h}) \\ z_2(\tilde{k}\tilde{h}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_p^k z_1(0) \\ F^k z_2(0) \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^{k-1} \begin{bmatrix} J_p^{k-1-j} G_1 u(jh) \\ F^{k-1-j} G u(jh) \end{bmatrix}, \qquad (28)$$

де $J_p = \operatorname{diag}\{\mu_1 I_{p_1} + H_{p_1}, \ldots, \mu_r I_{p_r} + H_{p_r}\}$.

Тут враховані рівності $\tilde{u}(j\tilde{m}\tilde{h} + i\tilde{h}) = u(jh)$ при $j\tilde{m}\tilde{h} + i\tilde{h} \in \in [jh, jh + h)$.

Оскільки $z_2(0) = x(0)$, то з (27), (28) випливає, що розв'язки $x(k)$, $z_2(\tilde{k})$ відповідно дискретних систем (13), (14) збігаються в спільних моментах часу $\tilde{k}\tilde{h} = kh$ ($\tilde{k}, k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$).

Теорема доведена.

В теоремі 2 побудована еквівалентна дискретній системі (13) система (14) мінімального порядку. Отримати еквівалентну систему більшого порядку можна, розширивши матрицю Γ додатковими жордановими клітками, аналогічно обчисленню дійсного логарифма матриці [9]. При цьому елементарні дільники, що відповідають від'ємним власним значенням мають повторюватися парне число разів.

Приклад 2. *Нехай задана система* (13) *з матрицею коефіцієнтів*

$$F = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 7 \\ -3 & -10 & 30 \\ -1 & -3 & 9 \end{bmatrix},$$

вектором початкових умов $x(0) = x_0$ *і вектором керування* $u \equiv 0$*, а кроки дискретизації такі:* $h = 1$*,* $\tilde{h} = 1/4$*.*

Необхідно знайти таку дійсну матрицю $\tilde{F}$*, щоб розв'язки* x*,* z_2 *відповідно систем* (13) *і* (14) *збігалися в спільних дискретних моментах часу.*

Оскільки $h = 4\tilde{h}$, то необхідно обчислити дійсний корінь четвертого степеня з даної матриці. Матриця F має кратні власні значення $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = -1$, а $\mathrm{rang}(F + I) = 2$, тому маємо один елементарний дільник $(\mu + 1)^3$. Нормальна жорданова форма матриці F має вигляд: $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Отже, маємо непарне число елементарних дільників, що відповідають від'ємному власному значенню, тому для отримання дійсного кореня парного степеня необхідно збільшити розмір системи в двічі. Розширимо матрицю J на таку ж жорданову клітку

$$\Gamma = \mathrm{diag}\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \qquad (29)$$

і обчислимо з неї корінь четвертого степеня за розкладом (20), попередньо замінивши в першій жордановій клітці власне значення -1 на $e^{-i\pi}$, а в другій — на $e^{i\pi}$

$$\hat{J} = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} e^{-i\pi/4} & 1/4e^{3i\pi/4} & -3/32e^{7i\pi/4} \\ 0 & e^{-i\pi/4} & 1/4e^{3i\pi/4} \\ 0 & 0 & e^{-i\pi/4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{i\pi/4} & 1/4e^{-3i\pi/4} & -3/32e^{-7i\pi/4} \\ 0 & e^{i\pi/4} & 1/4e^{-3i\pi/4} \\ 0 & 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} \right\}. \tag{30}$$

Тепер за допомогою невиродженої матриці $P = \begin{bmatrix} I_3 & iI_3 \\ I_3 & -iI_3 \end{bmatrix}$ отримуємо дійсну матрицю для жорданової форми (30)

$$\tilde{J} = P^{-1}\hat{J}P = \frac{\sqrt{2}}{64}\begin{bmatrix} 32 & -8 & -3 & 32 & -8 & -3 \\ 0 & 32 & -8 & 0 & 32 & -8 \\ 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 32 \\ -32 & 8 & 3 & 32 & -8 & -3 \\ 0 & -32 & 8 & 0 & 32 & -8 \\ 0 & 0 & -32 & 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}.$$

Розширимо також матрицю F

$$\hat{F} = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -2 & 7 \\ -3 & -10 & 30 \\ -1 & -3 & 9 \end{bmatrix} \right\}, \tag{31}$$

а розв'язок розширеної системи представимо так: $\tilde{x} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$, $z_1, z_2 \in \Re_3$. Тепер розширена дійсна матриця з (31) має дійсний корінь парного степеня: $\sqrt[4]{\hat{F}} = \tilde{F}$. Далі знаходимо дійсну матрицю жорданової форми (29), що подібна матриці (31) $\hat{F}_J = P^{-1}\Gamma P = \Gamma$.

Подібні дійсні матриці $\hat{F}, \hat{F}_J$ пов'язані рівністю $\hat{F} = U\hat{F}_J U^{-1}$, де U — деяка дійсна невироджена матриця. Невідому матрицю знаходимо з рівняння $\hat{F}U = U\hat{F}_J$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матриці $\hat{F}, \hat{F}_J$ мають подібні матричні корені

$$\hat{F} = \tilde{F}^4 = U\hat{F}_J U^{-1} = U\tilde{J}^4 U^{-1} = \left[U\tilde{J}U^{-1}\right]^4.$$

Звідси отримуємо дійсний корінь парного степеня з матриці $\hat{F}$

$$\tilde{F} = U\tilde{J}U^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{64}\begin{bmatrix} 32 & -8 & -3 & 136 & -101 & 199 \\ 0 & 32 & -8 & -32 & 40 & -88 \\ 0 & 0 & 32 & 0 & -32 & 96 \\ -32 & -88 & 27 & 40 & 19 & -65 \\ -96 & -360 & 41 & 24 & 113 & -267 \\ -32 & -120 & 3 & 8 & 27 & -57 \end{bmatrix}.$$

Матриця $\tilde{F}$ має власні значення кратності 3

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = e^{-i\pi/4},$$
$$\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = e^{i\pi/4}$$

і безпосередня перевірка підтверджує рівність $\hat{F} = \tilde{F}^4$. Оскільки $\operatorname{rang}(\tilde{F} - e^{-i\pi/4}I) = \operatorname{rang}(\tilde{F} - e^{i\pi/4}I) = 5$, то матриця $\tilde{F}$ має два нелінійних елементарних дільника $(\lambda - e^{-i\pi/4})^3, (\lambda - e^{i\pi/4})^3$.

Частина розв'язку знайденої дискретної системи збігається в спільних дискретних моментах часу з розв'язком вихідної системи. Так розв'язок початкової системи має вигляд

$$x(kh) = F^k x(0), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

а розв'язок побудованої системи в дискретні моменти часу $\tilde{k}\tilde{h}$, $\tilde{k} = 4k$ такий:

$$\tilde{x}(\tilde{k}\tilde{h}) = \begin{bmatrix} z_1(\tilde{k}\tilde{h}) \\ z_2(\tilde{k}\tilde{h}) \end{bmatrix} = \tilde{F}^{\tilde{k}}\tilde{x}(0) = \hat{F}^{k}\tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} J^k z_1(0) \\ F^k z_2(0) \end{bmatrix}.$$

При довільному векторі $z_1(0)$ і $z_2(0) = x(0)$, $\tilde{k} = 4k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ виконується тотожність $x(kh) \equiv z_2(\tilde{k}\tilde{h})$.

4. Синхронізація за кроком дискретизації нелінійних дискретних систем. Розглянемо нелінійну дискретну динамічну систему

$$\begin{aligned} x_i(kh_i + h_i) = f_i(x_i(kh_i), u_i(kh_i), kh_i), \quad x_i(0) = x_{i0}, \\ i = \overline{1,n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{32}$$

де $x_i = [x_{i1}, \ldots, x_{in_i}]^T$ — вектор стану, $u_i = [u_{i1}, \ldots, u_{im_i}]^T$ — вектор керування, $f_i \in \mathfrak{R}_{n_i}$ — нелінійна дійсна векторна функція, h_i — крок дискретизації (раціональне число).

Вважаємо, що нелінійні функції в (32) коректні (існують і набувають дійсних значень) для всіх кроків kh_i $i = \overline{1,n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Далі розглянемо наступну нелінійну дискретну систему:

$$\begin{aligned} &\tilde{x}_i(\tilde{k}h_0 + h_0) = \left[f_i(\tilde{x}_i(\tilde{k}h_0), u_i(\theta_i(\tilde{k}h_0)), \theta_i(\tilde{k}h_0)) - \tilde{x}_i(\tilde{k}h_0)\right]\delta_i + \\ &\qquad + \tilde{x}_i(\tilde{k}h_0), \quad \tilde{x}_i(0) = \tilde{x}_{i0}, \quad i = \overline{1,n}, \quad \tilde{k} = 0, 1, 2, \ldots, \\ &\theta_i(\tilde{k}h_0 + h_0) = \theta_i(\tilde{k}h_0) + \delta_i m_i h_0, \quad \theta_i(0) = 0, \\ &\delta_i = 1 - \operatorname{sgn}\left(\tilde{k}h_0/h_i - [\tilde{k}h_0/h_i]\right) = 1 - \operatorname{sgn}\left(\tilde{k}/m_i - [\tilde{k}/m_i]\right), \end{aligned} \tag{33}$$

де $\tilde{x}_i = [\tilde{x}_{i1}, \ldots, \tilde{x}_{in_i}]^T$ — вектор стану, $u_i = [u_{i1}, \ldots, u_{im_i}]^T$ — вектор керування з (32), $f_i \in \mathfrak{R}_{n_i}$ — нелінійна векторна функція з (32), $h_0 = h_i/m_i$ — крок дискретизації (m_i — деякі цілі числа), sgn — сігнум-функція, яка може приймати значення -1,0,1; θ_i — числова змінна стану, $[c]$ — ціла частина числа c [10, с.16].

Вважаємо, що $\tilde{x}_{i0} = x_{i0}$, а крок дискретизації h_0 отримано так само, як в теоремі 1. Змінна δ_i приймає значення 1 в спільних дискретних точках ($\tilde{k}$ кратне m_i) відповідних рівнянь систем (32), (33) і 0 — в інших випадках. Легко бачити, що функція $\theta_i(\tilde{k}h_0)$ приймає значення рівні kh_i на інтервалах

$$\tilde{k}h_0 \in [kh_i + h_0, kh_i + h_i], \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Тоді маємо рівності

$$\theta_i(\tilde{k}h_0) = kh_i, \quad \tilde{x}_i(\tilde{k}h_0) = x_i(kh_i), \quad u_i(\theta_i(\tilde{k}h_0)) = u_i(kh_i),$$

при $\tilde{k}h_0 \in [(k-1)h_i + h_0, kh_i]$, $k = 1, 2, \ldots$.

Таким чином, розв'язки $\tilde{x}_i(\tilde{k}h_0)$ рівнянь (33) збігаються з розв'язками $x_i(kh_i)$ в спільних точках: $\tilde{k}h_0 = kh_i$, $\tilde{k}, k \in \in \{0, 1, \ldots\}$.

Рівняння (33) можна залишити без змін, якщо раціональні кроки дискретизації в (32) залежать від k ($h_i = h_i(k)$). Крок h_0 визначаємо за всіма $h_i(k)$, $i = \overline{1,n}$, $k = 0, 1, \ldots$, тобто $h_i(k) = m_i(k)h_0$, де $m_i(k)$ — деякі цілі числа. Відзначимо, що в цьому випадку h_0 може прямувати до нуля.

Систему (33) можна спростити, якщо нелінійні функції f_i коректні для всіх значень $\tilde{k}h_0$. В цьому випадку система набуде вигляду

$$\begin{gathered}\tilde{x}_i(\tilde{k}h_0 + h_0) = \Big[f_i(\tilde{x}_i(\tilde{k}h_0), \tilde{u}_i(\tilde{k}h_0), \tilde{k}h_0) - \tilde{x}_i(\tilde{k}h_0)\Big]\,\delta_i + \tilde{x}_i(\tilde{k}h_0), \\ \tilde{x}_i(0) = \tilde{x}_{i0}, \quad i = \overline{1,n}, \quad \tilde{k} = 0, 1, 2, \ldots, \\ \delta_i = 1 - \operatorname{sgn}\left(\tilde{k}h_0/h_i - [\tilde{k}h_0/h_i]\right) = 1 - \operatorname{sgn}\left(\tilde{k}/m_i - [\tilde{k}/m_i]\right),\end{gathered} \tag{34}$$

де $\tilde{u}_i(0) = u_i(0)$ і $\tilde{u}_i(\tilde{k}h_0) = u_i(kh_i)$ при

$$\tilde{k}h_0 \in [(k-1)h_i + h_0, kh_i], \quad k \in \{1, 2, \ldots\}. \tag{35}$$

Як і для рівняння (33), в цьому випадку буде виконуватися рівність $\tilde{x}_i(\tilde{k}h_0) = x_i(kh_i)$ для $\tilde{k}h_0$ з інтервалів (35). Таким чином, розв'язки $x_i(kh_i)$, $\tilde{x}_i(\tilde{k}h_0)$ рівнянь відповідно систем (32) і (34) збігаються в спільних дискретних моментах часу.

Література

[1] *Chen J.Y., Wong K.W., Shuai J.W.* Phase synchronization beetween two diferent oscilators with unidirectional signal coupling // International journal of bifurcation and chaos — 2004, **14**, N5. — P. 1877–1884.

[2] *Guan S., Lai C.H., Wei G.W.* Phase synchronization between two essentially different chaotic systems // Phys. Rev. E. — 2005. — **72.** — 0162205.

[3] *Бесараб В.I, Коваленко Є.Г.* Використання апарата "MAX-PLUS"для моделювання динаміки в інформаційних мережах із простою топологією // Наукові праці інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова. — Вип. 44, Київ, 2007. — С.59–62.

[4] *Cassandras C.G., Lafortune S.* Introduction to Discrete event Systems. — Kluver academic Publishers, 1999.

[5] *Зинчук Н.А.* Взаимное преобразование непрерывных и дискретных моделей линейных динамических систем. Ч.2. Матричные модели // Автоматика. — 1988. — №6. — С. 10 – 16.

[6] *Острем К., Виттенмарк Б.* Системы управления с ЭВМ. — М.: Мир, 1987. — 480 с.

[7] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

[8] *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1989. — 480 с.

[9] *Зінчук М.О., Новицький В.В.* Перетворення неперервних та дискретних моделей лінійних динамічних систем. // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, №3. — С. 53 – 64.

[10] *Титчмарш Е.* Теория функций. — М.: Наука, 1980. — 464 с.