Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 5, 91–105

MCS 2000: 33C20, 35A08, 35M70, 44A45

А.Н. Новицкая

Актюбинский региональный государственный ун-т
им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан
E-mail address: nannanovitskaya@mail.ru

Интегральные представления для гипергеометрической функции $F_8^{(4)}$

Hypergeometric functions of four variables are poorly studied presently, the list of them was first introduced in the article [1]. In this work we present the theorem on convergence region and prove Euler type integral representations for the hypergeometric function of four variables $F_8^{(4)}$.

На даний час гіпергеометричні функції чотирьох змінних мало вивчено, вперше їх перелік було введено у статті [1]. В цій роботі наведено теорему про область збіжності та доведено інтегральні представлення типу Ейлера для гіпергеометричної функції чотирьох змінних $F_8^{(4)}$.

В настоящее время гипергеометрические функции четырех переменных мало изучены, впервые этот список был введен в статье [1]. В этой работе приводится теорема о области сходимости и доказываются интегральные представления типа Эйлера для гипергеометрической функции четырех переменных $F_8^{(4)}$.

1. Введение. Разнообразие прикладных задач, приводящих к гипергеометрическим функциям, вызвало быстрый рост числа функций, применяемых в приложениях. Например, в монографии [2] определены и изучены области сходимости 205 гипергеометрических функции от трех переменных. В этой монографии также можно найти ссылки на научные работы до 1985 года, посвященные изучению свойств гипергеометрических функций. Поскольку число гипергеометрических функций велико, полное множество их преобразований исчисляется сотнями. Лучшим средством для вывода преобразований являются интегральные представления типа Эйлера рассматриваемых функций [3]. Интегральные представления полезны для нахождения смежных соотношений, а также для интегрирования гипергеометрических систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Известно, что система дифференциальных уравнений в частных производных имеет решение $F_8^{(4)}$ [1, с. 122 (2.8)], [4]:

$$\begin{gathered} F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)= \\ =\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}\,(a_2)_{p+q}\,(b_1)_{m+p}\,(b_2)_n\,(b_3)_q}{(c_1)_m\,(c_2)_n\,(c_3)_p\,(c_4)_q}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}, \end{gathered} \tag{1.1}$$

с областью сходимости $|x|=:r<1; |z|=:\varphi<1; |t|=:\psi<1;$ $|y|=:s<(1-r)(1-\varphi)(1-\psi)$.

В данной статье для гипергеометрической функции от четырех переменных доказываются несколько интегральных представлений типа Эйлера [3]. Нахождения интегральных представлений для более простых гипергеометрических функций рассмотрены в работах [5–15].

2. Интегральные представления для гипергеометрической функции $F_8^{(4)}$.

Теорема *Если выполняются определенные условия на заданные параметры $a_1,a_2,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3,c_4$ гипергеометрической функции $F_8^{(4)}$, то в области сходимости $|x|=:r<1;$ $|z|=:\varphi<1;$ $|t|=:\psi<1;$ $|y|=:s<(1-r)(1-\varphi)(1-\psi)$ имеют место следующие интегральные представления:*

$$\begin{gathered} F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)= \\ =\frac{\Gamma(c_4)}{\Gamma(b_3)\,\Gamma(c_4-b_3)}\times \\ \times\int_0^1\xi^{b_3-1}(1-\xi)^{c_4-b_3-1}(1-t\xi)^{-a_2}\times \\ \times F_K\left(a_2,a_1,b_1,b_2;c_3,c_2,c_1;z\varphi,y,x\right)d\xi, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\varphi = \frac{1}{1-t\xi}, \operatorname{Re} c_4 > \operatorname{Re} b_3 > 0$;

$$\begin{gathered}
F_8^{(4)}\left(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, c_4; x, y, z, t\right) = \\
= \frac{\Gamma\left(b_2 + b_3\right)}{\Gamma\left(b_2\right)\Gamma\left(b_3\right)} \times \\
\times \int_0^1 \xi^{b_2-1}\left(1-\xi\right)^{b_3-1} \times \\
\times F_7^{(4)}\left(a_1, a_2, b_1, b_2+b_3; c_1, c_2, c_3, c_4; x, y\delta, z, t\psi\right) d\xi,
\end{gathered} \tag{2.2}$$

где $\delta = \xi, \psi = (1-\xi)$, $\operatorname{Re} b_2 > 0$, $\operatorname{Re} b_3 > 0$.

$$\begin{gathered}
F_8^{(4)}\left(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, c_4; x, y, z, t\right) = \\
= \frac{\Gamma\left(c_4\right)}{\Gamma\left(b_3\right)\Gamma\left(c_4-b_3\right)} \frac{\left(\gamma-\alpha\right)^{b_3}\left(\gamma-\beta\right)^{c_4-b_3}}{\left(\alpha-\beta\right)^{c_4-a_2-1}} \times \\
\times \int_\beta^\alpha \frac{\left(\xi-\beta\right)^{b_3-1}\left(\alpha-\xi\right)^{c_4-b_3-1}}{\left(\gamma-\xi\right)^{c_4-a_2}} \times \\
\times \left[\left(\alpha-\beta\right)\left(\gamma-\xi\right) - t\left(\gamma-\alpha\right)\left(\xi-\beta\right)\right]^{-a_2} \times \\
\times F_K\left(a_2, a_1, b_1, b_2; c_3, c_2, c_1; z\sigma, y, x\right) d\xi,
\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $\sigma = \frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\xi)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\xi)-t(\gamma-\alpha)(\xi-\beta)}$, $\operatorname{Re} c_4 > \operatorname{Re} b_3 > 0,\ \beta < \alpha < \gamma$;

$$\begin{gathered}
F_8^{(4)}\left(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, c_4; x, y, z, t\right) = \\
= \frac{\Gamma\left(b_2+b_3\right)}{\Gamma\left(b_2\right)\Gamma\left(b_3\right)} \frac{\left(\gamma-\alpha\right)^{b_2}\left(\gamma-\beta\right)^{b_3}}{\left(\alpha-\beta\right)^{b_2+b_3-1}} \times \\
\times \int_\beta^\alpha \frac{\left(\xi-\beta\right)^{b_2-1}\left(\alpha-\xi\right)^{b_3-1}}{\left(\gamma-\xi\right)^{b_2+b_3}} \times \\
\times F_7^{(4)}\left(a_1, a_2, b_1, b_2+b_3; c_1, c_2, c_3, c_4; x\sigma, z\varphi\right) d\xi,
\end{gathered} \tag{2.4}$$

где $\sigma = \left[\frac{y(\gamma-\alpha)(\xi-\beta)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\xi)}\right]$, $\varphi = \left[\frac{t(\gamma-\beta)(\alpha-\xi)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\xi)}\right]$, $\operatorname{Re} b_2 > 0$, $\operatorname{Re} b_3 > 0$, $\beta < \alpha < \gamma$;

$$\begin{gathered}
F_8^{(4)}\left(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, c_4; x, y, z, t\right) = \\
= 2\frac{\Gamma\left(c_4\right)}{\Gamma\left(b_3\right)\Gamma\left(c_4-b_3\right)} \times \\
\times \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2\xi\right)^{b_3-\frac{1}{2}}\left(\cos^2\xi\right)^{(c_4-b_3)-\frac{1}{2}}\left(1-t\sin^2\xi\right)^{-a_2} \times \\
\times F_K\left(a_2, a_1, b_1, b_2; c_3, c_2, c_1; z\varphi, y, x\right) d\xi,
\end{gathered} \tag{2.5}$$

где $\varphi = \frac{1}{(1-t\sin^2\xi)}$, $\mathrm{Re}\, c_4 > \mathrm{Re}\, b_3 > 0$;

$$\begin{aligned} &F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right) = \\ &= 2\frac{\Gamma\left(b_2+b_3\right)}{\Gamma\left(b_2\right)\Gamma\left(b_3\right)}\times \\ &\times\int_0^{\pi/2}\left(\sin\xi\right)^{2b_2-1}\left(\cos\xi\right)^{2b_3-1}\times \\ &\times F_7^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2+b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y\delta,z,t\psi\right)d\xi, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $\delta = \sin^2\xi$, $\psi = \cos^2\xi$, $\mathrm{Re}\, b_2 > 0$, $\mathrm{Re}\, b_3 > 0$;

$$\begin{aligned} &F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right) = \\ &= 2\frac{\Gamma\left(c_4\right)}{\Gamma\left(b_3\right)\Gamma\left(c_4-b_3\right)}\left(1+\beta\right)^{b_3}\times \\ &\times\int_0^{\pi/2}\frac{\left(\sin\xi\right)^{2b_3-1}\left(\cos\xi\right)^{2(c_4-b_3)-1}}{\left(1+\beta\sin^2\xi\right)^{c_4-a_2}}\times \\ &\times\left[\left(1+\beta\sin^2\xi\right)-t\left(1+\beta\right)\sin^2\xi\right]^{-a_2}\times \\ &\times F_K\left(a_2,a_1,b_1,b_2;c_3,c_2,c_1;z\varphi,y,x\right)d\xi, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $\varphi = \frac{\left(1+\beta\sin^2\xi\right)}{(1+\beta\sin^2\xi)-t(1+\beta)\sin^2\xi}$, $\mathrm{Re}\, c_4 > \mathrm{Re}\, b_3 > 0$, $\beta > -1$;

$$\begin{aligned} &F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right) = \\ &= 2\frac{\Gamma\left(b_2+b_3\right)}{\Gamma\left(b_2\right)\Gamma\left(b_3\right)}\left(1+\beta\right)^{b_2}\times \\ &\times\int_0^{\pi/2}\frac{\left(\sin\xi\right)^{2b_2-1}\left(\cos\xi\right)^{2b_3-1}}{\left(1+\beta\sin^2\xi\right)^{b_2+b_3}}\times \\ &\times F_7^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2+b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y\delta,z,t\psi\right)d\xi, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $\delta = \frac{(1+\beta)(\sin\xi)^2}{(1+\beta\sin^2\xi)}$, $\psi = \frac{(\cos\xi)^2}{(1+\beta\sin^2\xi)}$, $\mathrm{Re}\, b_2 > 0$, $\mathrm{Re}\, b_3 > 0$, $\beta > -1$;

$$\begin{aligned} &F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right) = \\ &= 2\beta^{b_3}\frac{\Gamma\left(c_4\right)}{\Gamma\left(b_3\right)\Gamma\left(c_4-b_3\right)}\times \\ &\times\int_0^{\pi/2}\frac{\left(\sin\xi\right)^{2b_3-1}\left(\cos\xi\right)^{2(c_4-b_3)-1}}{\left(\cos^2\xi+\beta\sin^2\xi\right)^{c_4-a_2}}\times \\ &\times\left[\cos^2\xi+\beta\sin^2\xi\left(1-t\right)\right]^{-a_2}\times \\ &\times F_K\left(a_2,a_1,b_1,b_2;c_3,c_2,c_1;z\varphi,y,x\right)d\xi, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где $\varphi = \frac{\left(\cos^2\xi + \beta\sin^2\xi\right)}{\cos^2\xi + \beta\sin^2\xi(1-t)}$, $\mathrm{Re}\, c_4 > \mathrm{Re}\, b_3 > 0$, $\beta > 0$;

$$\begin{aligned}
&F_8^{(4)}\left(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, c_4; x, y, z, t\right) = \\
&= 2\beta^{b_2}\frac{\Gamma\left(b_2 + b_3\right)}{\Gamma\left(b_2\right)\Gamma\left(b_3\right)}\times \\
&\times\int_0^{\pi/2}\frac{\left(\sin\xi\right)^{2b_2-1}\left(\cos\xi\right)^{2b_3-1}}{\left(\cos^2\xi + \beta\sin^2\xi\right)^{b_2+b_3}}\times \\
&\times F_7^{(4)}\left(a_1, a_2, b_1, b_2 + b_3; c_1, c_2, c_3, c_4; x, y\delta, z, t\psi\right) d\xi,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\delta = \frac{\beta(\sin\xi)^2}{(\cos^2\xi + \beta\sin^2\xi)}$, $\psi = \frac{(\cos\xi)^2}{(\cos^2\xi + \beta\sin^2\xi)}$, $\mathrm{Re}\, b_2 > 0$, $\mathrm{Re}\, b_3 > 0$, $\beta > 0$;
аналогичным образом имеют место двойные интегралы:

$$\begin{aligned}
&F_8^{(4)}\left(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, c_4; x, y, z, t\right) = \\
&= \frac{\Gamma\left(c_3\right)\Gamma\left(c_4\right)}{\Gamma\left(a_2\right)\Gamma\left(b_3\right)\Gamma\left(c_3 - a_2\right)\Gamma\left(c_4 - b_3\right)}\times \\
&\times\int_0^1\int_0^1 \xi^{b_3-1}\eta^{a_2-1}\left(1-\xi\right)^{c_4-b_3-1}\left(1-\eta\right)^{c_3-a_2-1}\times \\
&\times\left(1 - t\xi\right)^{b_1-a_2}\left(1 - t\xi - z\eta\right)^{-b_1}\times \\
&\times F_2\left[a_1; b_1, b_2; c_1, c_2; \frac{x\left(1-t\xi\right)}{1 - t\xi - z\eta}, y\right] d\xi d\eta, \\
&\mathrm{Re}\, c_3 > \mathrm{Re}\, a_2 > 0,\ \mathrm{Re}\, c_4 > \mathrm{Re}\, b_3 > 0;
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
&F_8^{(4)}\left(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, c_4; x, y, z, t\right) = \\
&= \frac{\Gamma\left(b_1 + b_2 + b_3\right)}{\Gamma\left(b_1\right)\Gamma\left(b_2\right)\Gamma\left(b_3\right)}\int_0^1\int_0^1 \xi^{b_2-1}\eta^{b_1-1}\left(1-\xi\right)^{b_3-1}\times \\
&\times\left(1-\eta\right)^{b_2+b_3-1} F_2^{(4)}\left[a_1, a_2, b_1 + b_2 + b_3; c_1, c_2, c_3, c_4;\right. \\
&\left. x\eta, y\xi\left(1-\eta\right), z\eta, t\left(1-\xi\right)\left(1-\eta\right)\right] d\xi d\eta, \\
&\mathrm{Re}\, b_1 > 0,\ \mathrm{Re}\, b_2 > 0,\ \mathrm{Re}\, b_3 > 0;
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$
\begin{aligned}
&F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\\
&=\frac{\Gamma\left(c_3\right)\Gamma\left(c_4\right)}{\Gamma\left(a_2\right)\Gamma\left(b_3\right)\Gamma\left(c_3-a_2\right)\Gamma\left(c_4-b_3\right)}\times\\
&\times\frac{\left(\gamma-\alpha\right)^{a_2+b_3}\left(\gamma-\beta\right)^{c_4+c_3-a_2-b_3}}{\left(\alpha-\beta\right)^{c_3+c_4-2-a_2}}\times\\
&\times\int_\beta^\alpha\int_\beta^\alpha\frac{\left(\xi-\beta\right)^{b_3-1}\left(\alpha-\xi\right)^{c_4-b_3-1}}{\left(\gamma-\xi\right)^{c_4-a_2}}\times\\
&\times\frac{\left(\eta-\beta\right)^{a_2-1}\left(\alpha-\eta\right)^{c_3-a_2-1}}{\left(\gamma-\eta\right)^{c_4}}\times\\
&\times\left[\left(\alpha-\beta\right)\left(\gamma-\xi\right)-t\left(\gamma-\alpha\right)\left(\xi-\beta\right)\right]^{b_1-a_2}\times\\
&\times\left[\left(\alpha-\beta\right)\left(\gamma-\xi\right)-t\left(\gamma-\alpha\right)\left(\xi-\beta\right)-\right.\\
&\left.-z(\alpha-\beta)\left(\gamma-\xi\right)\right]^{-b_1}F_2\left[a_1;b_1,b_2;c_1,c_2;\right.\\
&\frac{x\left[\left(\alpha-\beta\right)\left(\gamma-\xi\right)-t\left(\gamma-\alpha\right)\left(\xi-\beta\right)\right]}{\left(\alpha-\beta\right)\left(\gamma-\xi\right)-t\left(\gamma-\alpha\right)\left(\xi-\beta\right)-z(\alpha-\beta)\left(\gamma-\xi\right)},\\
&\left.y\right]d\xi d\eta,\\
&\mathrm{Re}\ c_3>\mathrm{Re}\ a_2>0,\mathrm{Re}\ c_4>\mathrm{Re}\ b_3>0,\ \beta<\alpha<\gamma;
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

для интегралов (2.4–2.10) аналогичным образом, как (2.11–2.13), имеют место двойные интегральные представления.

Также для функции $F_8^{(4)}$ найдены тройные интегральные представления:

$$
\begin{aligned}
&F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\\
&=\frac{\Gamma\left(c_2\right)\Gamma\left(c_3\right)\Gamma\left(c_4\right)}{\Gamma\left(a_2\right)\Gamma\left(b_2\right)\Gamma\left(b_3\right)\Gamma\left(c_2-b_2\right)\Gamma\left(c_3-a_2\right)\Gamma\left(c_4-b_3\right)}\times\\
&\qquad\times\int_0^1\int_0^1\int_0^1\xi^{b_3-1}\eta^{a_2-1}\zeta^{b_2-1}\left(1-\xi\right)^{c_4-b_3-1}\times\\
&\qquad\times\left(1-\eta\right)^{c_3-a_2-1}\left(1-\zeta\right)^{c_2-b_2-1}\left(1-y\zeta\right)^{-a_1}\times\\
&\qquad\times\left(1-t\xi\right)^{b_1-a_2}\left(1-t\xi-z\eta\right)^{-b_1}\times\\
&\qquad\times F\left[a_1,b_1;c_1;\frac{x\left(1-t\xi\right)}{\left(1-y\zeta\right)\left(1-t\xi-z\eta\right)}\right]d\xi d\eta d\zeta,
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

$$\mathrm{Re}c_2>\mathrm{Re}\,b_2>0,\mathrm{Re}\,c_3>\mathrm{Re}\,a_2>0,\mathrm{Re}\,c_4>\mathrm{Re}\,b_3>0;$$

$$
\begin{aligned}
&F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\\
&=\frac{\Gamma\left(a_1+a_2\right)\Gamma\left(b_1+b_2+b_3\right)}{\Gamma\left(a_1\right)\Gamma\left(a_2\right)\Gamma\left(b_1\right)\Gamma\left(b_2\right)\Gamma\left(b_3\right)}\times\\
&\times\int_0^1\int_0^1\int_0^1\xi^{b_2-1}\eta^{b_1-1}\zeta^{a_1-1}\times\\
&\times\left(1-\xi\right)^{b_3-1}\left(1-\eta\right)^{b_2+b_3-1}\left(1-\zeta\right)^{a_2-1}\times\\
&\times F_C^{(4)}\left[a_1+a_2,b_1+b_2+b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x\eta\zeta,\right.\\
&\left.y\xi\left(1-\eta\right)\zeta,z\eta\left(1-\zeta\right),t\left(1-\xi\right)\left(1-\eta\right)\left(1-\zeta\right)\right]d\xi d\eta d\zeta,\\
&\operatorname{Re}a_2>0,\operatorname{Re}b_1>0,\operatorname{Re}b_2>0,\operatorname{Re}b_3>0;
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

для интегралов (2.3–2.10) аналогичным образом, как (2.14–2.15), имеют место тройные интегралы.

Аналогичным образом имеют место четырехкратные интегральные представления:

$$
\begin{aligned}
&F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\\
&=\frac{\Gamma\left(c_1\right)\Gamma\left(c_2\right)}{\Gamma\left(a_1\right)\Gamma\left(a_2\right)\Gamma\left(b_2\right)\Gamma\left(b_3\right)}\times\\
&\times\frac{\Gamma\left(c_3\right)\Gamma\left(c_4\right)}{\Gamma\left(c_1-a_1\right)\Gamma\left(c_2-b_2\right)\Gamma\left(c_3-a_2\right)\Gamma\left(c_4-b_3\right)}\\
&\times\textstyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1\xi^{b_3-1}\eta^{a_2-1}\zeta^{b_2-1}\tau^{a_1-1}\left(1-\xi\right)^{c_4-b_3-1}\times\\
&\times\left(1-\eta\right)^{c_3-a_2-1}\left(1-\zeta\right)^{c_2-b_2-1}\left(1-\tau\right)^{c_1-a_1-1}\times\\
&\times\left(1-y\zeta\right)^{b_1-a_1}\left(1-t\xi\right)^{b_1-a_2}\times\\
&\times\left[\left(1-y\zeta\right)\left(1-t\xi-z\eta\right)-x\left(1-t\xi\right)\tau\right]^{-b_1}d\xi d\eta d\zeta d\tau,\\
&\operatorname{Re}c_1>\operatorname{Re}a_1>0,\operatorname{Re}c_2>\operatorname{Re}b_2>0,\\
&\operatorname{Re}c_3>\operatorname{Re}a_2>0,\operatorname{Re}c_4>\operatorname{Re}b_3>0;
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\\
&=\frac{\Gamma\left(a_1+a_2+b_1+b_2+b_3\right)}{\Gamma\left(a_1\right)\Gamma\left(a_2\right)\Gamma\left(b_1\right)\Gamma\left(b_2\right)\Gamma\left(b_3\right)}\times\\
&\times\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1\xi^{b_2-1}\eta^{b_1-1}\zeta^{a_1-1}\left(1-\xi\right)^{b_3-1}\times\\
&\times\left(1-\eta\right)^{b_2+b_3-1}\left(1-\zeta\right)^{a_2-1}\tau^{a_1+a_2-1}\times\\
&\times\left(1-\tau\right)^{b_1+b_2+b_3-1}F_c^{(4)}\Big(\frac{a_1+a_2+b_1+b_2+b_3}{2},\\
&\frac{a_1+a_2+b_1+b_2+b_3}{2}+\frac{1}{2};\\
&c_1,c_2,c_3,c_4;x\sigma,y\delta,z\varphi,t\psi\Big)d\xi d\eta d\varsigma d\tau,
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\sigma=\eta\zeta\tau\left(1-\tau\right),\ \ \delta=\xi\left(1-\eta\right)\zeta\tau\left(1-\tau\right),\\
&\varphi=\eta\left(1-\zeta\right)\tau\left(1-\tau\right),\ \ \psi=\left(1-\xi\right)\left(1-\eta\right)\left(1-\zeta\right)\tau\left(1-\tau\right),\\
&\operatorname{Re}a_1>0,\ \operatorname{Re}a_2>0,\ \operatorname{Re}b_1>0,\ \operatorname{Re}b_2>0,\ \operatorname{Re}b_3>0.
\end{aligned}
$$

Для интегралов (2.3–2.10) так же, как (2.16–2.17), имеют место четырехкратные интегральные представления.

В интегральных представлениях гипергеометрической функции $F_8^{(4)}$ использовались известные гипергеометрические функции Gauss, Horn, Srivastava, Sharma:

$$
F\left(a_1,b_1;c_1;x\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_m\left(b_1\right)_m}{\left(c_1\right)_m}\frac{x^m}{m!},
$$

$$
F_2\left(a_1;b_1,b_2;c_1,c_2;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n}\left(b_1\right)_m\left(b_2\right)_n}{\left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},
$$

$$
\begin{aligned}
&F_K\left(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;x,y,z\right)=\\
&=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha_1\right)_m\left(\alpha_2\right)_{n+p}\left(\beta_1\right)_{m+p}\left(\beta_2\right)_n}{\left(\gamma_1\right)_m\left(\gamma_2\right)_n\left(\gamma_3\right)_p m!n!p!}x^m y^n z^p,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_2^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\\
&=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n}\left(a_2\right)_{p+q}\left(b\right)_{m+n+p+q}}{\left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_p\left(c_4\right)_q}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_7^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\\
&=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n}\left(a_2\right)_{p+q}\left(b_1\right)_{m+p}\left(b_2\right)_{n+q}}{\left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_p\left(c_4\right)_q}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_C^{(4)}\left(a_1,b_1;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\\
&=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p+q}\left(b_1\right)_{m+n+p+q}}{\left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_p\left(c_4\right)_q}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&4^r\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)_r=(a)_{2r}\,,\\
&(a_1+a_2+b_1+b_2+b_3)_{2(m+n+p+q)}=\\
&=4^{m+n+p+q}\left(\frac{a_1+a_2+b_1+b_2+b_3}{2}\right)_{m+n+p+q}\times\\
&\times\left(\frac{a_1+a_2+b_1+b_2+b_3}{2}+\frac{1}{2}\right)_{m+n+p+q}=\\
&=4^{m+n+p+q}\left(\frac{a_1+a_2+b_1+b_2+b_3}{2}\right)_{m+n+p+q}\times\\
&\times\left(\frac{a_1+a_2+b_1+b_2+b_3+1}{2}\right)_{m+n+p+q}.
\end{aligned}
$$

3. Доказательство интегральных представлений. Докажем справедливость интегрального представления (2.16) для гипергеометрической функции $F_8^{(4)}$.

Доказательство. Преобразуем выражение $[(1-y\zeta)(1-t\xi-$ $-z\eta)-x(1-t\xi)\tau]^{-b_1}$:

$$
\begin{aligned}
&[(1-y\zeta)(1-t\xi-z\eta)-x(1-t\xi)\tau]^{-b_1}=\\
&=[(1-y\zeta)(1-t\xi-z\eta)]^{-b_1}\times\\
&\times\left[1-\frac{x(1-t\xi)}{(1-y\zeta)(1-t\xi-z\eta)}\tau\right]^{-b_1}=\\
&=[(1-y\zeta)(1-t\xi-z\eta)]^{-b_1}\times\\
&\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(b_1)_m}{m!}\left(\frac{x(1-t\xi)}{(1-y\zeta)(1-t\xi-z\eta)}\right)^m\tau^m.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Подставляя разложение (3.1) в (2.16), имеем:

$$
\begin{aligned}
&F_8^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t)=\\
&=\frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)}\times\\
&\times\frac{\Gamma(c_3)\Gamma(c_4)}{\Gamma(c_1-a_1)\Gamma(c_2-b_2)\Gamma(c_3-a_2)\Gamma(c_4-b_3)}\times
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \xi^{b_3-1}\eta^{a_2-1}\zeta^{b_2-1}\left(1-\xi\right)^{c_4-b_3-1}\times\\
&\times\left(1-\eta\right)^{c_3-a_2-1}\left(1-\zeta\right)^{c_2-b_2-1}\left(1-y\zeta\right)^{b_1-a_1}\times\\
&\times\left(1-t\xi\right)^{b_1-a_2}\left[\left(1-y\zeta\right)\left(1-t\xi-z\eta\right)\right]^{-b_1}\times\\
&\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(b_1\right)_m}{m!}\left(\frac{x\left(1-t\xi\right)}{\left(1-y\zeta\right)\left(1-t\xi-z\eta\right)}\right)^m\times\\
&\times d\xi d\eta d\zeta\int_0^1 \tau^{a_1+m-1}\left(1-\tau\right)^{c_1-a_1-1}d\tau.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

В силу определения бета-функции

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \tau^{a_1+m-1}\left(1-\tau\right)^{c_1-a_1-1}d\tau=\\
&=B\left(a_1+m,c_1-a_1\right)=\frac{\left(a_1\right)_m\Gamma(a_1)\Gamma\left(c_1-a_1\right)}{\left(c_1\right)_m\Gamma(c_1)},
\end{aligned}
$$

тогда получим:

$$
\begin{aligned}
&F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\\
&=\frac{\Gamma\left(c_2\right)\Gamma\left(c_3\right)\Gamma\left(c_4\right)}{\Gamma\left(a_2\right)\Gamma\left(b_2\right)\Gamma\left(b_3\right)\Gamma\left(c_2-b_2\right)\Gamma\left(c_3-a_2\right)\Gamma\left(c_4-b_3\right)}\times\\
&\times\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \xi^{b_3-1}\eta^{a_2-1}\zeta^{b_2-1}\times\\
&\times\left(1-\xi\right)^{c_4-b_3-1}\left(1-\eta\right)^{c_3-a_2-1}\times\\
&\times\left(1-\zeta\right)^{c_2-b_2-1}\left(1-y\zeta\right)^{-(a_1+m)}\left(1-t\xi\right)^{b_1-a_2}\times\\
&\times\left(1-t\xi-z\eta\right)^{-b_1}\times\\
&\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_m\left(b_1\right)_m}{\left(c_1\right)_m}\frac{\left(\frac{x(1-t\xi)}{(1-t\xi-z\eta)}\right)^m}{m!}\,d\xi d\eta d\zeta.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Используя биномиальный ряд для выражения $\left(1-y\zeta\right)^{-(a_1+m)}$, находим:

$$
\left(1-y\zeta\right)^{-(a_1+m)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_1+m\right)_n\frac{\left(y\varsigma\right)^n}{n!},
\tag{3.4}
$$

и, подставляя (3.4) в (3.3), имеем:

$$
\begin{aligned}
&F_8^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t)=\\
&=\frac{\Gamma(c_2)\Gamma(c_3)}{\Gamma(b_2)\Gamma(c_2-b_2)\Gamma(a_2)\Gamma(c_3-a_2)}\times\\
&\times\frac{\Gamma(c_4)}{\Gamma(b_3)\Gamma(c_4-b_3)}\int_0^1\int_0^1\int_0^1\xi^{b_3-1}\eta^{a_2-1}\zeta^{b_2-1}\times\\
&\times(1-\xi)^{c_4-b_3-1}(1-\eta)^{c_3-a_2-1}(1-\zeta)^{c_2-b_2-1}\times\\
&\times(1-t\xi)^{b_1-a_2}(1-t\xi-z\eta)^{-b_1}d\xi d\eta d\zeta\times\\
&\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(b_1)_m}{(c_1)_m}\frac{\left[\frac{x(1-t\xi)}{1-t\xi-z\eta}\right]^m}{m!}\frac{(y\zeta)^n}{n!}.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Выделим интеграл по ς:

$$
\begin{aligned}
&F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\\
&=\frac{\Gamma\left(c_2\right)\Gamma\left(c_3\right)\Gamma\left(c_4\right)}{\Gamma\left(b_2\right)\Gamma\left(c_2-b_2\right)\Gamma\left(a_2\right)\Gamma\left(c_3-a_2\right)\Gamma\left(b_3\right)\Gamma\left(c_4-b_3\right)}\times\\
&\times\int_0^1\int_0^1\xi^{b_3-1}\eta^{a_2-1}\left(1-\xi\right)^{c_4-b_3-1}\times\\
&\times\left(1-\eta\right)^{c_3-a_2-1}\left(1-t\xi\right)^{b_1-a_2}\left(1-t\xi-z\eta\right)^{-b_1}d\xi d\eta\times\\
&\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(b_1)_m}{(c_1)_m}\frac{\left[\frac{x(1-t\xi)}{1-t\xi-z\eta}\right]^m}{m!}\frac{(y)^n}{n!}\times\\
&\times\int_0^1\zeta^{b_2+n-1}(1-\zeta)^{c_2-b_2-1}d\zeta,
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\zeta^{b_2+n-1}\left(1-\zeta\right)^{c_2-b_2-1}d\zeta=\\
&=B\left(b_2+n,c_2-b_2\right)=\frac{\left(b_2\right)_n\Gamma(b_2)\Gamma\left(c_2-b_2\right)}{\left(c_2\right)_n\Gamma(c_2)}.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Подставляя (3.7) в (3.6), получим следующее:

$$
\begin{aligned}
&F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)= \\
&=\frac{\Gamma\left(c_3\right)}{\Gamma\left(a_2\right)\Gamma\left(c_3-a_2\right)}\frac{\Gamma\left(c_4\right)}{\Gamma\left(b_3\right)\Gamma\left(c_4-b_3\right)}\times \\
&\times\int_0^1\int_0^1\xi^{b_3-1}\eta^{a_2-1}\left(1-\xi\right)^{c_4-b_3-1}\left(1-\eta\right)^{c_3-a_2-1}\times \\
&\times\left(1-t\xi\right)^{-a_2}\left(\frac{1-t\xi-z\eta}{1-t\xi}\right)^{-b_1}d\xi d\eta\times \\
&\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n}\left(b_1\right)_m\left(b_2\right)_n}{\left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\left(\frac{1-t\xi-z\eta}{1-t\xi}\right)^{-m},
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

учитывая биномиальный ряд:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1-t\xi-z\eta}{1-t\xi}\right)^{-(b_1+m)}= \\
&=\left[1-\frac{z\eta}{1-t\xi}\right]^{-(b_1+m)}=\sum_{p=0}^{\infty}\left(b_1+m\right)_p\frac{\left(\frac{z\eta}{1-t\xi}\right)^p}{p!},
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

имеем:

$$
\begin{aligned}
&F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)= \\
&=\frac{\Gamma\left(c_3\right)}{\Gamma\left(a_2\right)\Gamma\left(c_3-a_2\right)}\frac{\Gamma\left(c_4\right)}{\Gamma\left(b_3\right)\Gamma\left(c_4-b_3\right)}\times \\
&\times\int_0^1\int_0^1\xi^{b_3-1}\eta^{a_2-1}\left(1-\xi\right)^{c_4-b_3-1}\times \\
&\times\left(1-\eta\right)^{c_3-a_2-1}\left(1-t\xi\right)^{-a_2}d\xi d\eta\times \\
&\times\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n}\left(b_1\right)_{m+p}\left(b_2\right)_n}{\left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{\left(\frac{z\eta}{1-t\xi}\right)^p}{p!}.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Выделим интеграл по η:

$$
\begin{aligned}
&F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)= \\
&=\frac{\Gamma\left(c_3\right)}{\Gamma\left(a_2\right)\Gamma\left(c_3-a_2\right)}\frac{\Gamma\left(c_4\right)}{\Gamma\left(b_3\right)\Gamma\left(c_4-b_3\right)}\times \\
&\times\int_0^1\xi^{b_3-1}\eta^{a_2-1}\left(1-\xi\right)^{c_4-b_3-1}\times
\end{aligned}
$$

$$\begin{gathered}\times(1-\eta)^{c_3-a_2-1}(1-t\xi)^{-a_2}\,d\xi\times\\ \times\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(b_1)_{m+p}(b_2)_n}{(c_1)_m(c_2)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{\left(\frac{z\eta}{1-t\xi}\right)^p}{p!}\times\\ \times\int_0^1\eta^{a_2+p-1}(1-\eta)^{c_3-a_2-1}\,d\eta,\end{gathered}\tag{3.11}$$

где

$$\begin{gathered}\int_0^1\eta^{a_2+p-1}(1-\eta)^{c_3-a_2-1}\,d\eta=\\ =B(a_2+p,c_3-a_2)=\frac{(a_2)_p\Gamma(a_2)\Gamma(c_3-a_2)}{(c_3)_p\Gamma(c_3)}.\end{gathered}\tag{3.12}$$

Подставляя (3.12) в (3.11), получим:

$$\begin{gathered}F_8^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t)=\\ =\frac{\Gamma(c_4)}{\Gamma(b_3)\Gamma(c_4-b_3)}\times\\ \times\int_0^1\xi^{b_3-1}(1-\xi)^{c_4-b_3-1}(1-t\xi)^{-a_2}\,d\xi\times\\ \times\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(a_2)_p(a_1)_{m+n}(b_1)_{m+p}(b_2)_n}{(c_3)_p(c_1)_m(c_2)_n}\frac{\left(\frac{z\eta}{1-t\xi}\right)^p}{p!}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},\\ \operatorname{Re}c_4>\operatorname{Re}b_3>0.\end{gathered}\tag{3.13}$$

Учитывая разложение

$$(1-t\xi)^{-(a_2+p)}=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(a_2+p)_q(t\xi)^q}{q!}$$

и интеграл по ξ:

$$\begin{gathered}\int_0^1\xi^{b_3+q-1}(1-\xi)^{c_4-b_3-1}\,d\xi=B(b_3+q,c_4-b_3)=\\ =\frac{\Gamma(b_3+q)\Gamma(c_4-b_3)}{\Gamma(c_4+q)}=\frac{(b_3)_q\Gamma(b_3)\Gamma(c_4-b_3)}{(c_4)_q\Gamma(c_4)},\end{gathered}$$

имеем (1.1). Что и требовалось доказать.

Аналогичным образом доказываются остальные интегральные представления для гипергеометрической функции $F_8^{(4)}$.

4. Заключение. Интегральные представления для большинства специальных функций математической физики и прикладной математики представляют большой интерес и имеют место во многих литературных источниках. Здесь мы наиболее наглядно доказали интегральные представления только для гипергеометрической функции четырех переменных C. Sharma, C. L. Parihar $F_8^{(4)}$. Этот же метод позволяет построить интегральные представления для других гипергеометрических функций от четырех переменных, которые определены в статье [1].

Литература

[1] C. Sharma, C. L. Parihar, Hypergeometric functions of four variables, Indian Acad. Math. 11 (1989), 121–133.

[2] H. M. Srivastava, P. W. Karlsson, Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), Wiley, New York, Chichester, Brisbane and Toronto, 1985, p. 427.

[3] К. К. Кенжебаев, А. Н. Новицкая, Интегральные представления для гипергеометрической функции $F_8^{(4)}$, Институт математики НАН Украины, Международная математическая конференция «Боголюбовские чтения DIF–2013. Дифференциальные уравнения, теория функций и их приложения», посвященная 75-летию академика А. М. Самойленко, Украина, Севастополь, 23–30 июня 2013, с. 240.

[4] А. Н. Новицкая, Об линейно-независимых решениях гипергеометрической функции $F_8^{(4)}$, Конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения», СамДиф–2013, Самара, 1–3 июля 2013, с. 60.

[5] Harry Bateman, Arthur Erdelyi, Higher transcendental functions. Volume 1. New York Toronto London MC Graw-Hill book company, INC, 1953, translated in English by N. Ya. Vilenkin, p. 296.

[6] Junesang Choi, Anvar Hasanov and Mamasali Turaev, Integral Representations for Srivastava's Hypergeometric Functions H_C. Honam Mathematical journal. 34 (4), 2012, 473–482.

[7] Junesang Choi, Anvar Hasanov and Mamasali Turaev, Integral Representations for Srivastava's Hypergeometric Functions H_B. Journal of the Korea Society of Mathematical Education. 19 (2), 2012, 137–145.

[8] Junesang Choi, Anvar Hasanov and Mamasali Turaev, Certain Integral Representations of Euler type for the Exton Function X_8. Commun. Korean Math. Soc. 27 (2012), No. 2, pp. 257–264.

[9] Junesang Choi, A. Hasanov and M. Turaev, Integral Representations for Srivastava's Hypergeometric Function H_A. Honam Mathematical journal. 34 (1), 2012, 113–124.

[10] Junesang Choi, Anvar Hasanov and H. M. Srivastava, Relations between Lauricella's triple hypergeometric function $F_A^{(3)}[x, y, z]$ and the Srivastava function $F^{(3)}[x, y, z]$. Integral Transforms and Special Functions. Vol. 23, No. 1, January 2012, pp. 69–82

[11] Junesang Choi, Anvar Hasanov, H. M. Srivastava and Mamasali Turaev, Integral representations for Srivastava's triple hypergeometric Functions. Taiwanese Journal of Mathematics. Vol. 15, No. 6, pp. 2751–2762, December 2011.

[12] Junesang Choi, A. Hasanov and M. Turaev, Several Integral Representations Involving Triple Hypergeometric Functions. Honam Mathematical Journal. 33 (2), 2011, 129–142.

[13] Junesang Choi, A. Hasanov and M. Turaev, Certain Integral Representations of Euler Type for the Exton Function X_2. Journal of the Korea Society of Mathematical Education. 17 (4), 2010, 347–354.

[14] Junesang Choi, A. Hasanov and M. Turaev, Certain Integral Representations of Euler Type for the Exton Function X_5. Honam Mathematical journal. 32 (3), 2010, 389–397.

[15] A. Hasanov, H. M. Srivastava, Some decomposition formulas associated with the Lauricella Function $F_A^{(r)}$and other multiple hypergeometric functions. Applications Mathematical Letters, 19, 2006, pp. 113–121.